SO(4) och S^3

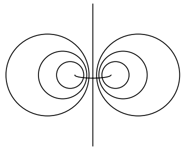
Ulf Persson

Chalmers Tekniska Högskola
Matematiska Institutionen
SE–412 96 Göteborg
ulfp@math.chalmers.se

En given punkt på den 3-dimensionella sfären i $\mathbf{R^4}$ given av $x^2+y^2+z^2+w^2=1$ kan skrivas under formen $(r\cos\theta, r\sin\theta, s\cos\psi, s\sin\psi)$ där $r,s\geq 0$ och $r^2+s^2=1$. Fixerar vi r (och därmed även s) erhåller vi en platt torus, den direkta produkten av cirklarna $x^2+y^2=r^2$ i (x,y) planet och $z^2+w^2=s^2$ i (z,w)-planet. Dessa torusar utgör en fibration över intervallet $0\leq r\leq 1$ (alternativt över $0\leq s\leq 1$) med två degenerade fibrer, bestående av cirklarna korresponderande mot $r=0,1$.

Denna fibration utgör analogin av cirkelfibrationen över $[-1,1]$ på den välbekanta 2-dimensionella sfären S^2 given av latituderna korresponderande till en given rotationsaxel. Denna fibration gör det möjligt att elegant beräkna ytan av S^2. En latitud korresponderande mot $-1\leq r\leq 1$ har radien $\sqrt{1-r^2}$, och en enhetsnormal till cirkel på sfären projiceras på rotationsaxeln med längden $\sqrt{1-r^2}$. Arean av inversa bilden av ett intervall I ges således av $\int_I 2\pi\sqrt{1-r^2}\frac{1}{\sqrt{1-r^2}}dr = 2\pi\int_I dr = 2\pi\mu(I)$ där $\mu(I)$ ger längden av intervallet. Speciellt erhåller vi arean 4π för sfären. Detta upptäcktes redan av Arkimedes, och kan tas som utgångspunkt för en enkel areabevarande kartprojektion genom att projicera sfären på en omskriven cylider.

I fallet S^3 noterar vi att arean hos torusarna givna av r,s är $(2\pi r)(2\pi s) = 4\pi^2 rs = 4\pi r\sqrt{1-r^2}$. En projektion av en enhetsnormal ger samma skalning som tidigare, därmed kan vi beräkna volymen av den inversa bilden av en skiva (säg från projektionen till (z,w) planet) såsom given av integralen $4\pi^2\int_0^R r dr$. Sättes $R=1$ erhåller vi formeln för den 3-dimensionella volymen av S^3 som $2\pi^2$, och sätter vi $R=\frac{1}{\sqrt{2}}$ erhåller vi en solid torus av volymen π^2. Komplementet till denna solida torus är givet av inversa bilden av $x^2+y^2\leq\frac{1}{2}$ i (x,y)-planet $(S=\frac{1}{\sqrt{2}})$. Vi kan således framställa S^3 som unionen av två solida torusar fastklistrade via sina begränsningsytor.

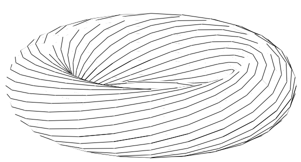


Låter man projicera sfären stereografiskt ner på $\mathbf{R^3}$ från punkten $(0,0,0,1)$ kan man visualisera denna fibrering i rummet. En av de degenerade fibrerna avbildas på enhetscirkeln i (x,y)-planet, och den andra som z-axeln. Vi norterar således att dessa två cirklar är länkade. Torusarna kommer att uppstå som rotationer av cirklar i x,z-planet med radien $\frac{s}{r}$ centrerade med avstånd $\frac{1}{r}$ från z-axeln.

Cirkelfibrationerna på S^2 är fibervis invarianta under rotationsgrupp S^1 med den givna rotationsaxeln, och omvänt finns det en 1-1 korrespondens mellan 1-parameter delgrupperna S^1 av $SO(3)$ och dessa fibrationer. I fallet med $SO(4)$ har vi istället en verkan av en 2-dimensionell tourus på torusfibrationerna via (α, β) verkar på $(r\cos\theta, r\sin\theta, s\cos\psi, s\sin\psi)$ via $(r\cos(\theta+\alpha), r\sin(\theta+\alpha), s\cos(\psi+\beta), s\sin(\psi+\beta))$. Ett elegantare sätt att presentera detta är att betrakta $\mathbf{R^4}$ som $\mathbf{C^2}$ via de komplexa variablerna $\zeta_1 = x+iy, \zeta_2 = z+iw$. Verkan gives då av att (λ_1, λ_2) (med $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$) opererar komponentvis på (ζ_1, ζ_2).

I allmänhet bestämmer ett element i $SO(4)$ två ortogonala invarianta plan, precis som varje icke-trivial rotation i $\mathbf{R^3}$ bestämmer en unik rotationsaxel. Dessa ortogonala plan bestämmer en komplex struktur för vilken skalärprodukten blir den hermitiska formen $z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2$ och avbildningen ett element i motsvarande $U(2)$ (komplex linjära avbildningar som bevarar en given postivt definit hermitisk form). Genom att betrakta alla avbildningar i $SO(4)$ som låter dessa plan vara invarianta, erhåller vi en torus-verkan enligt ovan.

De flesta elementen i $SO(4)$ ligger i en unik torus, vilkoret varandes att $\lambda_1 \neq \lambda_2$. I det fall vi har $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ kommer varje plan, som samtidigt är en komplex linje, att vara invariant. Dessa linjer är parametriserade av $\mathbf{CP^1} \sim \mathbf{S^2}$ (Riemann-sfären) och snittet med S^3 utgöres av cirklar av radien 1 vilka utgöres av fibrerna till en avbildning $S^3 \to S^2$. Som bekant talar vi nu om Hopf-fibrationen. Det finns givetvis många Hopf-fibrationer på S^3 var och en bestämd av en komplex struktur på $\mathbf{R^4}$. I termer av de inledande torus-fibrationerna utgöres Hopf-fibrerna av kurvor på dessa fibrer av typ $(1,1)$. D.v.s. kurvor av typ $(r\cos(\theta+\alpha), r\sin(\theta+\alpha), s\cos(\theta), s\sin(\theta))$ för fixt α. Det är lätt att inse att alla dessa kurvor har samma längd $\sqrt{r^2+s^2} = 1$. På varje torus parametiseras dessa kurvor av S^1 som degenererar till en punkt för de degenerade fibrerna. På detta sätt erhåller vi latitud fibrationen av S^2. Det är naturligt att referera till dessa element som Hopf-rotationer.



Dimensionen av $SO(4)$ är sex, vilket ses av antalet skev-symmetriska 4×4 matriser. Alternativt : de 2-dimensionella delrummen till $\mathbf{R^4}$ är parametriserade av Plückerkvadriken av signatur $(3,3)$ i $\mathbf{PR^5}$, således ett 4-dimensionellt rum. Låt oss nu identifiera det euklidiska $\mathbf{R^4}$ med kvaternionerna $\mathbf{H}$ och dess positiva definita form $z\bar{z}$. Notera att varje icke reellt element $\lambda \in \mathbf{H}$ genererar en delalgebra isomorf med $\mathbf{C}$, och därmed en komplex struktur på $\mathbf{H}$ antingen genom höger eller vänster multiplikation. Speciellt noterar man att avbildnigen $x \mapsto ax$ bevarar alla högerinducerade komplexa strukturer, samt är även komplex linjär m.a.p. på den av delalgebran $< 1, a >$ vänsterinducerade. Med avseende på den senare utgör den en Hopf-rotation ifall $|a| = 1$. Motsvarande gäller för avbildningarna $x \mapsto xb$. Kompositionen av de bägge , nämligen avbildningarna $x \mapsto axb$ är komplex linjära med avseende på lämpliga komplexa strukturer (a inducerad vänster och b-inducerad höger) samt i det fall $|a| = |b| = 1$ bevarar den även den hermitiska formen, och utgör således ett element i $U(2)$ (för fixt a eller b). Tillsammans utgör de en grupp isomorf med $S^3 \times S^3$ modulo antipod-avbildningen $(a,b) \mapsto (-a,-b)$ och därmed en delgrupp av $SO(4)$ av samma dimension. Eftersom den senare är sammanhängande finner vi att de är isomorfa.