 Normat **55**:3, 138–143 (2007)

Uppgifter

494. Låt a och b vara reella tal, sådana att $3^a + 13^b = 17^a$ och $5^a + 7^b = 11^b$. Visa att $a < b$.

495. Varje sida och varje diagonal i en regelbunden n-hörning, där $n \geq 3$ är udda, målas antingen röd eller blå. Det är tillåtet att måla om dessa kanter (sidor och diagonaler) på följande sätt. I varje steg väljer man ett av hörnen och byter färg, från röd till blå och vice versa, på alla kanter som utgår från det valda hörnet. Visa att det för varje ursprunglig färgsättning går att ändra färgerna på nämnt sätt så att det efter ett ändligt antal steg utgår ett jämnt antal blåmålade kanter från varje hörn. Notera att en kant kan komma att ändra färg flera gånger under processens gång. Visa även att den slutliga färgsättningen bestäms entydigt av den ursprungliga.

496. Lös ekvationssystemet

$$\begin{aligned} 3(x^2 + y^2 + z^2) &= 1 \\ x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 &= xyz(x + y + z)^3 \end{aligned}$$

i reella tal x, y, z.

497.

a. För vilka positiva heltal n existerar det en följd $x_1, x_2, \ldots, x_n$ som innehåller vart och ett av heltalen $1, 2, \ldots, n$ exakt en gång så att k är en delare till

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k$$

för $k = 1, 2, \ldots, n$?

b. Existerar det en *oändlig* följd $x_1, x_2, \ldots$ som innehåller varje positivt heltal exakt en gång så att k är en delare till

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_k$$

för varje positivt heltal k?

498. Låt $ABCD$ vara en konvex fyrhörning och låt R_A, R_B, R_C, R_D vara resp radier i de omskrivna cirklarna till trianglarna DAB, ABC, BCD, CDA. Visa att $R_A + R_C > R_B + R_D$ om och endast om $\angle A + \angle C > \angle B + \angle D$.

Lösningar skickas till:
Dag Jonsson, dag@math.uu.se
Box 480
Matematiska institutionen
SE-75106 Uppsala

Insända lösningar till uppgifterna 482-486 i Normat 2007:1

482. (Efter *Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.*) Vi vil først søge at generalisere opgaven ved at erstatte 2007 med et vilkårligt heltal $n \geq 2$. Vi har givet vektoren $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$, hvor $x_i \geq 0$ (restriktion 1). Endvidere skal gælde at $S_n(\mathbf{x}) = 2$ og $C_n(\mathbf{x}) = 1$ (restriktioner 2 og 3), hvor $S_n(\mathbf{x}) = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ og $C_n(\mathbf{x}) = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \cdots + x_{n-1} \cdot x_n + x_n \cdot x_1$. Vi skal da finde maksimum og minimum af kvadratsummen $K_n(\mathbf{x}) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2$. Med $n = 2$ har vi 2 mulige løsninger (tilfredsstiller restriktionerne 1-3): $(x_1, x_2) = (\frac{2\mp\sqrt{2}}{2}, \frac{2\pm\sqrt{2}}{2})$. Begge giver værdien 3 for funktionen K_n.

Antag dernæst $n \geq 3$. Objektfunktionen kan skrives

$$K_n(\mathbf{x}) = S_n(\mathbf{x})^2 - 2C_n(\mathbf{x}) - 2\sum_{i,j}{}' x_i x_j$$

hvor apostroffen over dobbeltsummen angiver att denne skal udstrækkes over alle (i, j), $i \neq j$, undtagen de par hvor $j \equiv i \pm 1 \pmod{n}$. Hvis $\mathbf{x}$ er en mulig løsning, gælder at

$$K_n(\mathbf{x}) = 2 - 2\sum_{i,j}{}' x_i x_j \leq 2.$$

Værdien 2 antages faktisk, nemlig når fx $x_1 = x_2 = 1, x_3 = \cdots = x_n = 0$. Maksimum af $K_n(\mathbf{x})$ er altså 2 for alle $n \geq 3$, specielt for $n = 2007$.

At bestemme minimum af $K_n(\mathbf{x})$ er en vanskeligere opgave. For $n = 3$ får vi $K_3^{min} = 2$; for $n = 4$ får vi $K_4^{min} = 1$ for $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \frac{1}{2}$. For $n > 4$ skal vi vise følgende lemma:

Lemma: Under bibetingelserna 1-2 gælder for $n > 4$, at

$$\max C_n(\mathbf{x}) = 1, \ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$$

Yderligere gælder at maksimum kun kan antages for vektorer der har formen

$$\mathbf{x} = (x_1, 1, 1 - x_1, 0, \ldots, 0), \qquad 0 \leq x_1 \leq 1$$

eller er cykliskt ækvivalente hermed.

Bevis: Vi ignorerer foreløbig (1) og finder evt stationære punkter for $C_n(\mathbf{x})$ ved Lagrange's metode: $\frac{\delta\psi}{\delta x_i} = 0$, hvor $\psi(\mathbf{x}) = C_n(\mathbf{x}) + \lambda(S_n(\mathbf{x}) - 2)$. Som eneste løsning fås $\mathbf{x}^\star = \left(\frac{2}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{2}{n}\right)$. Hertil svarer $C_n(\mathbf{x}^\star) = \frac{4}{n} < 1$ når $n > 4$. Ideen er nu med udgangspunkt i $\mathbf{x}^\star$ at bevæge os skridtvis hen til nye punkter der stedse øger $C_n(\mathbf{x})$ indtil vi sluttelig når maksimumværdien 1. Restriktionerne 1-2 definerer et stykke (en simplex) H_n af en $n-1$-dimensional hyperplan. Idet $z = C_n(\mathbf{x})$ fremstiller en n-dimensional hyperbolsk keglesnitsflade, findes der en retningsvektor $\mathbf{u}$ så man ved at bevæge sig langs denne fra $\mathbf{x}^\star$ og ud til et randpunkt $\mathbf{y}$ av H_n, hvor mindst ét y_i er 0, således at $C_n(\mathbf{y}) > C_n(\mathbf{x}^\star)$. Den kvadratiske form er jo cyklisk-symmetrisk, så vi kan fx antage $y_n = 0$.

Hermed er problemet reduceret til at betragte en ny (ikke-cyklisk) kvadratisk form af orden $m = n - 1$,

$$Q_m(y_1, y_2, \ldots, y_m) = y_1 y_2 + y_2 y_3 + \cdots + y_{m-1} y_m$$

Også denne form definerer hyperbolske keglesnitsflader, så vi kan fortsætte den beskrevne metodik med at opnå $y_i = 0$ samtidigt med att objektfunktionen øges. Det kan ske at det enten er y_1 eller y_m der bliver 0. Man finder at proceduren terminerer når $m = 3$. Her kan vi nemlig som slutskridt gennemføre en analytisk optimering: Vi skal finde maksimum af $Q = y_1 y_2 + y_2 y_3$ under bibetingelserne $y_1 + y_2 + y_3 = 2$ og $y_i \geq 0$; maksimum bliver $Q^{max} = 1$ for $y_2 = 1$, $y_3 = 1 - y_1$, hvor y_1 kan vælges arbitrært. *(Anm. Detaljerna utelämnas.)*

Vi vender nu tilbage til det oprindelige optimeringsproblem hvor vi mangler at minimere $K_n(\mathbf{x})$ under bibetingelserne (1-3) for $n > 4$. Fra lemmaet ved vi at vi kun behøver at afsøge punkter af formen $\mathbf{x} = (x_1, 1, 1 - x_1, 0, \ldots, 0)$ bortset fra cyklisk ækvivalens. Vi finder $K_n(\mathbf{x}) = 2x_1^2 - 2x_1 + 2$, som bliver minimum for $x_1 = \frac{1}{2}$, $K_n^{min} = \frac{3}{2}$ for $n > 4$. Dermed er også det oprindelige optimeringsproblem med $n = 2007$ løst: $K_{2007}^{max} = 2$, $K_{2007}^{min} = \frac{3}{2}$.

(Också löst av *Con Amore Problemgruppe, København, DK.*)

483. (Originallösning.) Vi använder beteckningar enligt figuren. Antag omvänt att vinklarna α, β och γ alla är $> 30°$ och därmed alla $< 150°$. I så fall är

$$\text{(1)} \qquad \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma > (\tfrac{1}{2})^3.$$

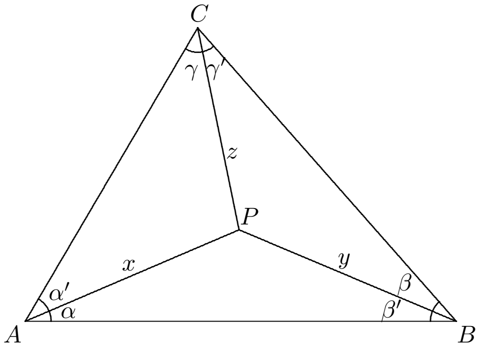
Vi ska visa att förutsättningarna leder till en motsägelse av olikheten (1), vilket innebär att vinkelantagandet inte kan vara riktigt. Sinussatsen använd på de tre deltrianglarna ger

$$\frac{\sin\alpha}{y} = \frac{\sin\beta'}{x}, \quad \frac{\sin\beta}{z} = \frac{\sin\gamma'}{y}, \quad \frac{\sin\gamma}{x} = \frac{\sin\alpha'}{z},$$

varav

$$\text{(2)} \qquad sin\,\alpha' \cdot \sin\beta' \cdot \sin\gamma' = \sin\alpha \cdot \sin\beta \cdot \sin\gamma.$$

Eftersom $\alpha' + \beta' + \gamma' < 90°$, är V.L. i (2) $< \sin\alpha' \cdot \sin\beta' \cdot \sin(\pi - (\alpha' + \beta'))$ $= \frac{1}{2}(\cos(\alpha' - \beta') - \cos(\alpha' + \beta')) \cdot \cos(\alpha' + \beta')$. Med $m = \cos(\alpha' + \beta')$ är det sista ledet $\leq \frac{1}{2}(1 - m) \cdot m \leq \frac{1}{8}$, med likhet $\Leftrightarrow m = \frac{1}{2}$. Under gjorda vinkelantaganden följer att båda leden i (2) är $\leq \frac{1}{8}$, vilket motsäger olikheten (1). Vinklarna α, β, γ kan därför inte alla vara $> 30°$ och påståendet är visat.



(Också löst av *Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.*)

484. (*Con Amore Problemgruppe, København, DK.*) Lad A være mængden af svenske byer, hvorfra der afgår fly til Norge, og lad B være mængden af norske byer, hvorfra der afgår fly til Sverige. Der er givet en afbildning f af A ind i B samt en afbildning g af B ind i A. Endvidere er det givet, at differensmængden $a\backslash g(B)$ ikke er den tomme mængde $\emptyset$. Det skal vises at der findes en delmængde S af A, sådan at $A\backslash S = g(B\backslash f(S))$. Vi sætter

$$\begin{array}{lcl} (\emptyset \neq) S_1 = A & \text{og} & T_1 = B\backslash f(A) = B\backslash f(S_1), \\ (\emptyset \neq) S_2 = A\backslash g(T_1) \subseteq S_1 & \text{og} & T_2 = B\backslash f(S_2) \supseteq T_1, \\ (\emptyset \neq) S_3 = A\backslash g(T_2) \subseteq S_2 & \text{og} & T_3 = B\backslash f(S_3) \supseteq T_2, \\ & \cdots & \end{array}$$

Da A og B naturligtvis er endelige mængder, vil det fra et vist nummer n at regne gælde at $S_n = S_{n+1} = S_{n+2} = \ldots$ og $T_n = T_{n+1} = T_{n+2} = \ldots$. Idet vi vælger k som det næstmindste sådanne naturlige tal, sætter vi nu $S = S_k$ og $T = T_k$. Idet det af $S = S_k = A\backslash g(T_{k-1}) = A\backslash g(T)$ og $T = T_k = B\backslash f(S_k) = B\backslash f(S)$ følger, at

$$A\backslash S = g(T) = g(B\backslash f(S)),$$

er påstanden hermed bevist. Det bemærkes, at S er hele A, hvis og kun hvis $f(A)$ er hele B.

(Också löst av *Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.*)

485. (*Peter Kirkegaard, Gentofte, DK.*) Idet vi indfører funktionen $f : R_+ \times R_+ \to R_+$ ved

$$f(a,n) = \int_0^1 \frac{x^n}{\frac{1}{a} + x^n}\, dx \tag{3}$$

skal vi altså bevise at $\lim_{n\to\infty} f(a,n) = \ln(1+a)$. Substitueres $x = (\frac{t}{a})^{\frac{1}{n}}$ i integralet i (3), finder vi

$$f(a,n) = a^{-\frac{1}{n}} g(a,n), \text{ hvor } g(a,n) = \int_0^a \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\,dt$$

Idet $a^{-\frac{1}{n}} \to 1$ for $n \to \infty$ gælder for ethvert fast $a \in R_+$, er det klart at vi blot behøver at bevise $\lim_{n\to\infty} g(a,n) = \ln(1+a)$. Vi sætter $g(a,n) = I_1 + I_2$, hvor

$$I_1 = \int_0^\delta \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\,dt \ , \ I_2 = \int_\delta^a \frac{t^{\frac{1}{n}}}{1+t}\,dt$$

og hvor $0 < \delta < a$. Nu gælder

$$I_1 < \int_0^\delta t^{\frac{1}{n}}\,dt = \frac{n}{n+1}\delta^{\frac{n+1}{n}}$$

Heraf fremgår at I_1 kan gøres mindre end et fast valgt $\epsilon > 0$ ved at vælge $\delta = \delta(\epsilon)$ tilstrækkelig lille, og dette gælder uniformt over ethvert interval $n \in (n_0, \infty)$ hvor n_0 er fast.

Vi lader nu $n \to \infty$. Så må der gælde $\lim_{n\to\infty} I_1 \leq \epsilon$ og $\lim_{n\to\infty} I_2 = \int_\delta^a \frac{1}{1+t}\,dt = \ln(1+a) - \ln(1+\delta(\epsilon))$. Grænseværdien for integralet $g(a,n)$ kan altså ikke afvige med mere end $\epsilon + \ln(1+\delta(\epsilon))$ fra $\ln(1+a)$. Da dette gælder for alle $\epsilon > 0$, kan vi konkludere at $\lim_{n\to\infty} f(a,n) = \ln(1+a)$ gælder.

(Också löst av *Con Amore Problemgruppe, København, DK.*)

486. (*Con Amore Problemgruppe, København.*) (Anm. Alla sidohänvisningar nedan är till Normat 2003:1)

a) Lagrange-resolventen for $Q(x)$ er bestemt ved $R(y) = -y^3 + by^2 + 4dy - 4bd$, som ses at have roden b, og derfor kan skrives som

$$R(y) = -(y-b)(y^2 - 4d) = -(y-b)(y-2\sqrt{d})(y+2\sqrt{d}) \tag{4}$$

(hvor $\sqrt{d}$ er et af de to komplekse tal hvis kvadrat er d). Diskriminanten for $R(y)$ (som er den samme som for $-R(y)$), og altså også for $Q(x)$ [jf. side 19], er følgelig

$$D = (b-2\sqrt{d})^2(b+2\sqrt{d})^2(4\sqrt{d})^2 = 16d\big((b-2\sqrt{d})(b+2\sqrt{d})\big)^2 = 16d(b^2-4d)^2,$$

dvs. D er et kvadrattal, hvis og kun hvis d er et kvadrattal. Da $R(y)$ har en heltallig rod, gælder ifølge *Setning* på side 17, at $n = 4$. Og i fortsættelse heraf fremgår af side 21, linje 6, at $G = V$ (Kleins fire-gruppe)$= \mathbf{Z}_2 \times \mathbf{Z}_2$, hvis og kun hvis d er et kvadrattal.

b) I denne situation benytter vi fodnoten [9)] på side 21. Vi definerer et polynomium $P(x)$ ved $P(x) = (x^2 - bx + d)\cdot x^2$. Idet ved med x_1, x_2, x_3 og x_4 betegner rødderne i $Q(x)$, gælder at x_1x_2 og x_3x_4 er rødderne i x^2-bx+d, og at x_1+x_2 og x_3+x_4 er rødderne i x^2. Rødderne i x^2-bx+d ses let at være $\frac{1}{2}\big(b\pm\sqrt{b^2+4|d|}\big)$, mens x^2 har dobbeltroden 0. Det fremgår af (1), at spaltningslegemet E for $R(y)$ over $\mathbf{Q}$ er bestemt ved $E=\mathbf{Q}\big(i\sqrt{|d|}\big)$. Det er tydeligt, at $\sqrt{b^2+4|d|}$ (og dermed rødderne i polynomiet x^2-bx+d) tilhører E (altså kan fås på formen $r+si\sqrt{|d|}$, hvor r og s er rationale tal), hvis og kun hvis $b^2+4|d|$ er et kvadrattal. På den anden side fremgår af

$$(5)\qquad Q(x)=x^4+bx^2+d=\big(x^2+\frac{b}{2}\big)^2-\frac{b^2-4d}{4}=\big(x^2+\frac{b}{2}\big)^2-\frac{b^2+4|d|}{4}$$

straks, at hvis $b^2+4|d|$ er et kvadrattal, så er $Q(x)$ reducibelt (i modstrid med det givne). Af fodnoten fremgår nu, at Galois-gruppen for $P(x)$ er $\mathbf{D}_4$ som påstået.

c) Vi kan nu forudsætte, at d er et positivt helt tal, som ikke er et kvadrattal. I denne situation ses spaltningslegemet E for $R(y)$ over $\mathbf{Q}$ at være $\mathbf{Q}\big(\sqrt{|d|}\big)$. Videre bemærker vi, at det af første del av omskrivningen i (5) fremgår, at hvis b^2-4d $(=b^2-4|d|)$ er af form h^2 eller $(hi)^2$, hvor h er et helt tal, så er $Q(x)$ reducibelt i modstrid med forudsætningen. Vi kan derfor forudsætte, at $=b^2-4|d|$ ikke er af denne form; og da størrelsen $=b^2-4|d|$ er afgørende for, om Galois-gruppen er $\mathbf{Z}_4$ eller $\mathbf{D}_4$, kan vi forudsætte $b>0$.

Rødderne i x^2-bx+d ses her at være $\frac{1}{2}\big(b\pm\sqrt{b^2-4|d|}\big)$. Det er klart, at hvis $b^2-4|d|<0$, så tilhører rødderne ikke E, dvs.Galois-gruppen er $\mathbf{D}_4$. Hvis $b^2-4|d|\geq 0$ [men altså, lige som d, ikke et kvadrattal; dvs. $d\geq 2$ og $b^2-4|d|\geq 2$], er spørgsmålet, om vi kan finde rationale tal r og s, sådan at $\sqrt{b^2-4d}=r+s\sqrt{d}$. I så fald vil gælde, at $b^2-4d=r^2+s^2d+2rs\sqrt{d}$, og dermed at mindst ét af tallene r og s må være 0. Da s ikke kan være 0, må altså gælde at $r=0$. Det medfører, at

$$(6)\qquad b^2=\big(s^2+4\big)d.$$

Hvis nu yderligere $\gcd(b,d)=1$, så er (6) en modstrid. Vi kan derfor slutte, at hvis $\gcd(b,d)=1$, så tilhører rødderne i x^2-bx+d ikke E; dvs. Galois-gruppen er også i denne situation $\mathbf{D}_4$.

d) Det fremgår af det ovenfor sagte, at hvis Galois-gruppen for $Q(x)$ er $\mathbf{Z}_4$ [som ifølge side 21, linje 6 og lidt frem, er eneste mulighed for, at Galois-gruppen är cyklisk], så må det nødvendigtvis gælde, at $d\geq 2$, d er ikke kvadrattal, $b^2-4d\geq 2$, b^2-4d er ikke et kvadrattal, samt at $\gcd(b,d)\geq 2$. Yderligere fremgår af (6), at d nødvendigtvis må gå op i b^2, samt at der findes et helt tal $s\geq 1$, sådan at

$$(7)\qquad s^2=\frac{b^2}{d}-4.$$

Hvis omvendt alle disse betingelser er opfyldt, så gælder for $r=0$ og s som det ved (7) bestemte positive hele tal, at $\sqrt{b^2-4d}=r+s\sqrt{d}$, dvs. at E indeholder alle rødderne i $P(x)$, med andre ord at Galois-gruppen for $Q(x)$ er $\mathbf{Z}_4$.

(Också löst av *Peter Kirkegaard, Gentofte, DK*)