Longomontanus og cirklens kvadratur

Talmystik, matematik og kontrovers

Henrik Kragh Sørensen og Helge S. Kragh

Steno Instituttet
Aarhus Universitet
Ny Munkegade, bygning 1521
DK-8000 Århus C
henrik.kragh.sorensen@si.au.dk
helge.kragh@si.au.dk

Resumé

Danske Longomontanus (1562–1647) er mest kendt som astronom og en af Tycho Brahes (1546–1601) disciple. Imidlertid havde han også en livslang interesse for — næsten besættelse af — et af matematikkens klassiske problemer, nemlig cirklens kvadratur. Igennem årtier publicerede han gentagne beviser, som dog ikke havde international gennemslagskraft. Først henimod slutningen af sit liv fik han international respons og det af den mest kritiske slags, idet den engelske matematiker John Pell (1611–1685) var meget opsat på at gendrive Longomontanus. Dette førte til en kontrovers, som illustrerer, at matematikken — ligesom resten af videnskaben — i 1600-tallet fungerede efter andre normer, end tilfældet er i dag.

I denne artikel beskrives først Longomontanus' brug af talmystiske argumenter i astronomien, idet sådanne argumenter også optræder i forbindelse med cirklens kvadratur. Dernæst fremhæves nogle af de klassiske forudsætninger for Longomontanus' cirkelkvadraturer, og et par af Longomontanus' påståede beviser gengives og diskuteres. Derefter præsenteres Pells gendrivelse af Longomontanus, inden det i konklusionen analyseres, hvad denne kontrovers siger om matematikken for næsten 400 år siden.

Indledning

I 1600-tallet var matematikken i Danmark på mange måder både perifer og provinsiel. Europas mest berømte matematikere tog ikke megen notits af deres danske kolleger, og når disse begav sig ud på matematiske opdagelsesrejser på egen hånd var det ofte i afkroge af matematikken og med metoder, som ikke tjente stort til at påkalde sig samtidens opmærksomhed.[1] Dette er bemærkelsesværdigt forsåvidt at danske astronomer på samme tid var vældigt ansete og at svenske matematikere på mange måder var bedre orienterede om den internationale udvikling end deres danske kolleger.

Det danske akademiske miljø var centreret i København, og ved universitetet fandtes igennem 1600-tallet et eller to professorater i de matematiske fag. I perioden fra 1605 til 1647 beklædte Christen Sørensen fra Lomborg, bedre kendt som Longomontanus (1562–1647), et af disse professorater — først fra 1605 til 1621 det "lavere professorat" og fra 1621 stillingen som *mathematicus superior*, dvs. professoratet i "højere matematik", som reelt var landets første lærestol i astronomi. Som elev af Tycho Brahe (1546–1601) blev og bliver Longomontanus husket som en vigtig dansk astronom, men hele livet bevarede han en interesse for matematikken. Denne side af Longomontanus' virke er ikke blevet ydet helt så meget opmærksomhed — og det med nogen god grund, idet den kun svært lader sig forene med et moderne billede af videnskabens og især matematikkens praksis.

I denne artikel beskrives Longomontanus' liv og matematiske virke, idet vi fokuserer på hans livslange interesse for løsningen af cirklens kvadratur. Ved at præsentere og diskutere nogle af Longomontanus' løsningsforslag og den modtagelse, de fik i hans samtid, tegner vi et billede af en kontroversiel matematiker, som aktivt søgte at forene den jordiske og den himmelske matematik ved hjælp af talmystiske argumenter.

Longomontanus' biografi og astronomiske virke

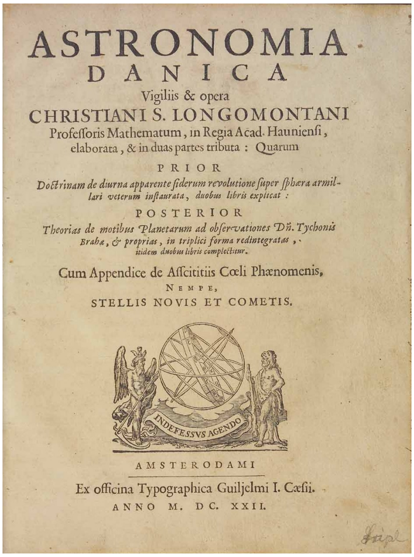
Christen Sørensen (se figur 1) blev født i 1562 i fattige kår i Lomborg (heraf den senere latinisering Longomontanus) ved Lemvig i Vestjylland.[2] Hans forældre var "hæderlige Bønderfolk", men havde ikke mulighed for at sikre drengen den lærdom han efterstræbte, så han rejste hjemmefra i en alder af cirka 15 år og flyttede til Viborg, hvor han blev optaget i katedralskolen. Efter at have tilbragt 11 år i latinskolen blev han i 1588 immatrikuleret ved universitetet i København. Allerede i latinskolen havde Longomontanus udvist evner for større udregninger, og i København blev han anbefalet til Tycho som dennes medhjælper ved astronomiske beregninger. Efter otte års tro tjeneste — og efter at Tycho i 1597 havde forladt observatoriet på Hven — begav Longomontanus sig på en studierejse i udlandet. Undervejs besøgte han Tycho i Prag i året 1600 og opnåede en magistergrad i Rostock i 1602, før han vendte tilbage til en stilling ved Universitetet i København i 1605. Fra 1607 og indtil han døde "mæt af Dage" i 1647 besad Longomontanus som nævnt et professorat i matematik og astronomi samme sted.

Som en af Tychos mest værdsatte assistenter blev Longomontanus naturligt dennes astronomiske arvtager — og det i en periode, hvor astronomien undergik fundamentale forandringer. I Uraniaborg-observatoriet på Hven havde Tycho og hans assistenter foretaget nogle af tidens mest omfattende og præcise observationsserier, og den numeriske og teoretiske efterbehandling af observationerne var et vigtigt og tidskrævende arbejde for såvel Tycho som assistenterne. Tychos observationer blev udgangspunktet for Johannes Keplers (1571–1630) analyser af planetbaner, som i 1609 i værket *Astronomia nova* førte til formuleringen af planeternes ellipseformede omløbsbaner og de to første keplerske love. Men Keplers revision af det kopernikanske system var ikke eneherskende i begyndelsen af 1600-tallet. Med udgangspunkt i Tychos obvervationer og teorier udgav Longomontanus i 1622 værket *Astronomia Danica* (se figur 2), som i nogen tid overskyggede Keplers *Astronomia*

Figur 1: Christen Sørensen Longomontanus, reproduceret fra [T].

nova. I sin *Astronomia Danica* fremstillede Longomontanus det såkaldt "tychoniske verdensbillede", som i overensstemmelse med det klassiske ptolemæiske verdensbillede lader solen kredse om en ubevægelig jord og bibeholder cirkelbevægelserne, men i modsætning dertil lader de øvrige planeter kredse om solen og ikke om jorden.[3] Værket fandt stor udbredelse blandt Europas astronomer umiddelbart efter udgivelsen, og det blev da også genoptrykt to gange i 1640 og 1663. Men med udviklingen af den cartesiske filosofi fra omkring 1640 blev det kopernikanske, heliocentriske verdensbillede i løbet af et par årtier anerkendt som den accepterede kosmologi.[4]

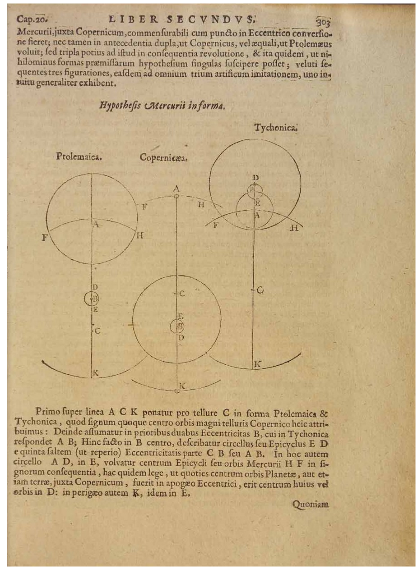
Som Tychos assistent og senere som professor i den højere matematik og forfatter af *Astronomia Danica* bidrog Longomontanus væsentligt til sin tids astronomiske observationer og teoretisering. I særdeleshed var hans bestræbelser i *Astronomia Danica* på at præsentere det tychoniske verdensbillede som et kompromis mellem klassiske og moderne teorier et aspekt, som blev taget op og forfulgt af andre astronomer og lærde. At Longomontanus i 1622 — altså flere år efter at Kepler havde beskrevet planeternes baner som ellipser — publicerede et værk bygget på det tychoniske verdensbillede med dets cirkelbevægelser skal ikke blot ses som et udtryk for usikkerhed i astronomiske kredse omkring det rette verdensbillede. Der har også været tale om en god del kontrovers og polemik, idet Longomontanus så sig selv som Tychos rette forsvarer og kritiserede Kepler for at have benyttet Tychos observationer af Mars til sine egne og "u-tychoniske" teoretiseringer. Denne kontroversielle side af Longomontanus — og flere andre af 1600-tallets videnskabsmænd — kom også til udtryk i forbindelse med indretningen af det nye observatorium i Rundetårn i København. Den franske læge, astrolog og matematiker Jean-Baptiste Morin (1583–1656) angreb i starten af 1640'erne i flere skrifter Longomontanus for hans tychoniske astronomi i almindelighed og for hans plan



ASTRONOMIA
DANICA
Vigiliis & opera
CHRISTIANI S. LONGOMONTANI
Professoris Mathematum, in Regia Acad. Hauniensi,
elaborata, & in duas partes tributa : Quarum
PRIOR
Doctrinam de diurna apparente siderum revolutione super sphæra armillari veterum instaurata, duobus libris explicat :
POSTERIOR
Theorias de motibus Planetarum ad observationes Dn. Tychonis Brahæ, & proprias, in triplici forma redintegratas, itidem duobus libris complectitur.
Cum Appendice de Ascititiis Cœli Phænomenis,
NEMPE,
STELLIS NOVIS ET COMETIS.

AMSTERODAMI
Ex officina Typographica Guiljelmi I. Cæsii.
ANNO M. DC. XXII.

(a) Forsiden



Cap. 20. LIBER SECVNDVS. 303

Mercurii, juxta Copernicum, commensurabili cum puncto in Eccentrico conversione fieret; nec tamen in antecedentia dupla, ut Copernicus, vel æquali, ut Ptolemæus voluit; sed tripla potius ad istud in consequentia revolutione, & ita quidem, ut nihilominus formas præmissarum hypothesium singulas suscipere posset; veluti sequentes tres figurationes, easdem ad omnium trium artificum imitationem, uno intuitu generaliter exhibent.

Hypothesis Mercurii in forma.

Primo super linea A C K ponatur pro tellure C in forma Ptolemaica & Tychonica, quod signum quoque centro orbis magni telluris Copernico heic attribuimus: Deinde assumatur in prioribus duabus Eccentricitas B, cui in Tychonica respondet A B; Hinc facto in B centro, describatur circellus seu Epicyclus E D e quinta saltem (ut reperio) Eccentricitatis parte C B seu A B. In hoc autem circello A D, in E, volvatur centrum Epicycli seu orbis Mercurii H F in signorum consequentia, hac quidem lege, ut quoties centrum orbis Planetæ, aut etiam terræ, juxta Copernicum, fuerit in apogæo Eccentrici, erit centrum huius vel orbis in D: in perigæo autem K, idem in E.

Quoniam

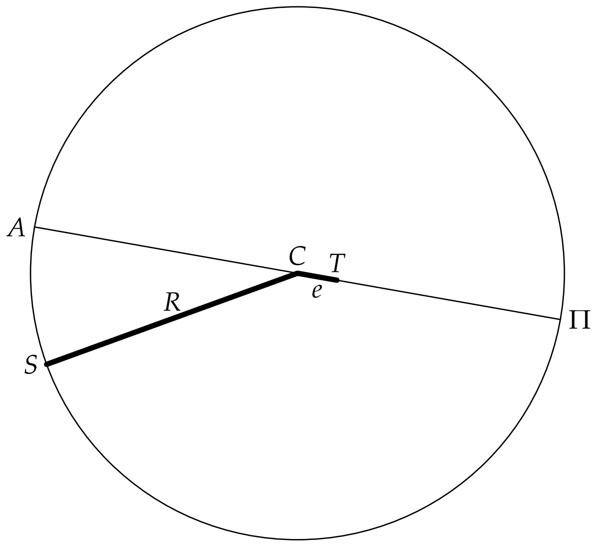
(b) Sammenligning af de tre verdensbilleder med henblik på Mercurs omløb

Figur 2: Longomontanus' *Astronomia Danica* fra 1622 var et vigtigt astronomisk værk, som fremsatte det "tychoniske verdensbillede" til sammenligning med det klassiske, geocentriske ptolemæiske verdensbillede og det kopernikanske verdensbillede.

for observatoriet i særdeleshed. I stedet for selv at svare på angrebene, overlod Longomontanus det til sin assistent Jørgen From (1605–1651) at føre forsvaret.[5]

Blandt Longomontanus' originale bidrag til astronomien var hans teorier om solens bevægelse. Foruden at bygge disse teorier på argumenter omkring jordens alder, benyttede Longomontanus på central vis også talmystiske overvejelser. Der er derfor grund til kort at omtale og diskutere, hvordan tallenes mystik influerede astronomien og verdensopfattelsen hos den danske matematiker og astronom.

Et af de største astronomiske problemer i forbindelse med solens bevægelse var at afgøre, hvordan man skulle forholde sig til ældre observationer, som afveg fra moderne teorier. Man havde i 1600-tallet adgang til gamle observationer helt tilbage fra antikken, men nye observationsmetoder og standarder gjorde det naturligt for Longomontanus at forsøge at lave en ny og almengyldig beskrivelse af solens bevægelse. Med udgangspunkt i 36 af Tychos sol-observationer udledte Longomontanus værdien $\frac{1}{28}$ for eccentriciteten $\frac{e}{R}$ (se figur 3). Undervejs i beregningerne reviderede Longomontanus nogle af de centrale talværdier, men målet helligede i nogen grad midlerne. At Longomontanus fandt netop værdien $\frac{1}{28}$ havde nemlig en større betydning for ham, idet han nu mente at have fundet en dybtliggende sandhed, som ville være stabil og give evig begrundelse for hans model. Grunden var den, at 28 var et *perfekt tal*, hvorved forstås, at 28 er summen af sine egentlige divisorer: $28 = 1 + 2 + 4 + 7 + 14$. Sådanne perfekte tal var blevet studeret siden oldtiden og blev af nogle betragtet som havende en nærmest guddommelig karakter. Siden antikken kendte man til fire perfekte tal: 6, 28, 496 og 8128, og ligesom 28 indtog



Figur 3: Longomontanus' sol-model med eccentriciteten $\frac{e}{R}$, gentegnet på grundlag af [Mo]. T angiver jordens centrum, S solens centrum og e afstanden fra sol-banens centrum til jordens centrum.

også 496 en central betydning i Longomontanus' sol-teorier. At Longomontanus kunne relatere centrale naturkonstanter til perfekte tal var både en bekræftelse af teorierne og et bevis på, at verden var skabt i harmoni og fuldkommenhed.

Longomontanus' talmystiske argumenter var ikke begrænsede til astronomien, men fandt også tilsvarende, stiltiende anvendelser i rene matematiske undersøgelser, nemlig i hans beviser for cirklens kvadratur, som er vores tema i det følgende.

Longomontanus og cirklens kvadratur

Set ud fra et matematikhistorisk perspektiv er Longomontanus mest kendt — eller rettere berygtet — for sine vedvarende påstande om at have løst problemet om cirklens kvadratur, hvilket han arbejdede med gennem 35 år.[6] I det følgende opridses først nogle centrale dele af baggrunden for Longomontanus' arbejder med dette problem, hvorefter hans gentagne forsøg på at løse det diskuteres.

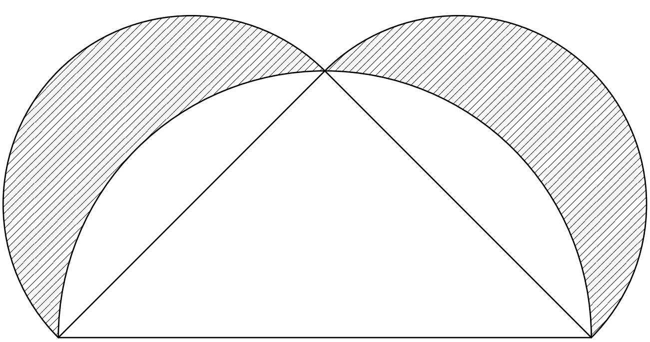
I sit udgangspunkt handler problemet om cirklens kvadratur om til en given cirkel at konstruere et kvadrat med samme areal — deraf problemets navn "cirklens kvadratur". I den klassiske geometri var konstruktionsmidlerne begrænsede til passer og lineal, dvs. til konstruktioner, som kan udføres med linjer og cirkler og disses skæringer. Nedenfor omtales, hvordan antikke matematikere forsøgte at angribe problemet omkring cirklens kvadratur og undervejs nåede til at "kvadrere" visse andre beslægtede figurer.

Antikken bibragte også en anden væsentlig vinkel på problemet om cirklens kvadratur, nemlig at denne kvadratur var relateret til et andet spørgsmål om cirkler, nemlig at finde deres omkreds. Som det også omtales nedenfor, fandt man ud af, at både cirklens areal og dens omkreds afhang af en central proportionalitetskonstant — en konstant, som vi idag benævner π.

Problemet om cirklens kvadratur var på Longomontanus' tid — i 1600-tallet — tæt knyttet til forsøg på at angive en præcis talværdi for forholdet mellem en cirkels omkreds og diameter, dvs. π. Kunne et sådant udtryk findes — enten som en endelig, eksakt decimalbrøk eller ved hjælp af kvadratrødder — ville det også være muligt at gennemføre en eksakt cirkelkvadratur med passer og lineal. Inden vi kommer til at diskutere dette i forhold til Longomontanus' beviser, er det dog på tide at omtale nogle af de klassiske indsigter og resultater.

Cirklens kvadratur i Antikken: Hippokrates

En af de antikke grækere, som studerede cirklens kvadratur, var angiveligt Hippokrates fra Chios (5. årh. f.v.t.).[7] Selvom det ikke lykkedes Hippokrates at nå det endelige mål, er hans navn knyttet sammen med en anden bemærkelsesværdig bedrift, nemlig kvadraturen af visse andre krumlinjede figurer kaldet "småmåner" (*lunulae*, herefter blot omtalt som "måner"), som er af direkte vigtighed for vores diskussion af og forståelse for Longomontanus' første offentliggjorte kvadratur. Hippokrates fandt ud af, at *visse* figurer afgrænset af cirkelbuer faktisk lod sig kvadrere. Hvis man indskriver en retvinklet, ligebenet trekant i en halvcirkel og på hver af trekantens sider tegner en halvcirkel med sidelængden som diameter, så er de fremkomne måner kvadrérbare (se figur 4, hvor månerne er skraverede). Det centrale resultat i Hippokrates' kvadratur findes i sætning XII.2 i Euklid fra Alexandrias (3. årh. f.v.t.) *Elementer*: "Arealerne af to cirkler forholder sig som kvadraterne på deres diametre" [E, XII.2]. I Hippokrates' tilfælde gælder, at forholdet mellem diameteren i de små halvcirkler og den store halvcirkel er $1 : \sqrt{2}$. Halvcirklen i figuren kan nu opfattes som udgjort af trekanten og to skiver, som hvis de tilføjes en måne giver en lille halvcirkel. Ved at sammenfatte disse to observationer ser man, at arealet af hver af de skraverede måner er lige så stort som halvdelen af trekantens areal. Som vi skal se senere, benyttede Longomontanus i sit første argument en tilsvarende konstruktion, blot med et indskreven trapez i stedet for trekanten.



Figur 4: Hippokrates fra Chios' "måner," som hver har samme størrelse som halvdelen af trekanten.

Cirklens kvadratur og π: Arkimedes

Hippokrates' kvadratur af visse "måner" var ingen hjælp til at løse cirklens kvadratur. Matematikere fortsatte med at behandle problemet, og Arkimedes fra Syrakus (287–212 f.v.t.) præsterede to centrale resultater, som var af afgørende vigtighed for de senere bestræbelser. Det første resultat var, at Arkimedes i sin *Cirklens udmåling* beviste, at cirklens areal er lige så stort som arealet af den retvinklede trekant, der har cirklens radius og omkreds som kateter.[8] I moderne notation (og med A for cirklens areal og O for dens omkreds) genkender vi denne sammenhæng som $A = \frac{1}{2}rO = \frac{1}{2} \times r \times (2\pi r) = \pi r^2$.[9]

Arkimedes' andet store resultat af relevans for vores diskussion var en approksimation af forholdet mellem cirklens omkreds og diameter, dvs. en approksimativ bestemmelse af π. Ved at om- og indskrive regulære sekskanter i en cirkel (som vi antager har radius 1) var Arkimedes i stand til at opnå øvre og nedre grænser for π. Idet han så halverede siderne i polygonerne fire gange (dvs. til 96-goner) fandt Arkimedes vurderingen

$$3\tfrac{10}{71} < \underbrace{\frac{\text{cirkelperiferi}}{\text{diameter}}}_{\pi} < 3\tfrac{1}{7} = \tfrac{21}{7}. \tag{1}$$

Denne vurdering dukker senere op i et af Longomontanus' argumenter for hans cirkelkvadratur.[10]

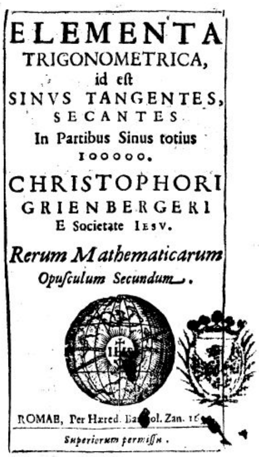
Værdier for π i begyndelsen af 1600-tallet

Man havde på Longomontanus' tid meget gode approksimationer af π. Allerede i 1585 havde Ludolph van Ceulen (1540–1610) beregnet π med en usikkerhed på 20. decimal, og omkring 1610 havde Ceulen forfinet metoden til at kunne beregne hele 35 decimaler af approximationen til π. Hollænderen Willebrord Snell (1580–1626), som Longomontanus kan have mødt da de begge besøgte Tycho i Prag i året 1600, beregnede i 1620'erne med sin egen metode approximationer til π og var også i stand til at verificere de 35 cifre, som Ceulen havde angivet. Den mest imponerende approximation blev leveret af jesuitten Christopher Grienberger (1561–1636) i *Elementa trigonometrica* fra 1630, hvor han fandt en værdi for π, hvis første 39 cifre stemmer med den moderne (se figur 5).[11] Nogle af disse resultater var endda beviseligt kendte i Danmark — og dermed vel også af Longomontanus — idet Christoffer Dybvads (1572–1632) Euklid-kommentarer fra 1603 havde gengivet Ceulens resultat [A2, s. 126]. Disse nok så præcise tilnærmelser løste imidlertid ikke problemet om cirklens kvadratur.

Longomontanus' *Cyclometria*, 1612

Longomontanus' første bidrag til diskussionen omkring cirklens kvadratur fremkom i 1612 med afhandlingen *Cyclometria ex lunulis reciproce demonstrata* (herefter omtalt som *Cyclometria*), dvs. cirklens udmåling bevist ved måneformede figurer. I dette værk, som fylder 83 sider og er dedikeret til kong Christian IV (se figur 7), nåede Longomontanus via forskellige argumenter frem til værdien

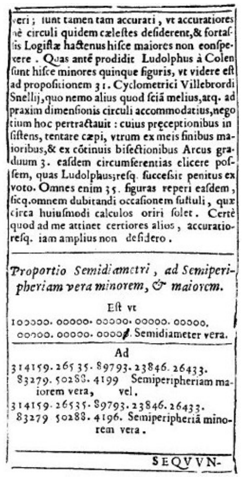
$$\frac{78}{43}\sqrt{3} \approx 3{,}14186 \tag{2}$$



ELEMENTA
TRIGONOMETRICA,
id est
SINVS TANGENTES,
SECANTES
In Partibus Sinus totius
100000.
CHRISTOPHORI
GRIENBERGERI
E Societate IESV.
Rerum Mathematicarum
Opusculum Secundum.

ROMAE, Per Hæred. Ba[illegible]ol. Zan. 16[illegible]
Superiorum permissu.

(a) Forsiden



veri; sunt tamen tam accurati, vt accuratiores nè circuli quidem cæleстes desiderent, & fortassis Logistæ hactenus hisce maiores non conspexere. Quas antè prodidit Ludolphus à Colen sunt hisce minores quinque figuris, vt videre est ad propositionem 31. Cyclometrici Villebrordi Snellij, quo nemo alius quod sciã melius, atq. ad praxim dimensionis circuli accommodatius, negotium hoc pertractauit: cuius preceptionibus insistens, tentare cæpi, vtrum ex meis finibus maioribus, & ex cõtinuis bisectionibus Arcus graduum 3. easdem circumferentias elicere possem, quas Ludolphus; resq. successit penitus ex voto. Omnes enim 35. figuras reperi easdem, sicq. omnem dubitandi occasionem sustuli, quæ circa huiusmodi calculos oriri solet. Certè quod ad me attinet certiores alios, accuratioresq. iam amplius non desidero.

Proportio Semidiametri, ad Semiperipheriam vera minorem, & maiorem.

Est vt
100000. 00000. 00000. 00000. 00000.
00000. 00000. 00000. Semidiameter vera.

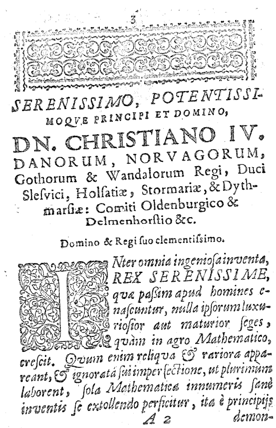
Ad
314159. 26535. 89793. 23846. 26433.
83279. 50288. 4199 Semiperipheriam maiorem vera, vel.
314159. 26535. 89793. 23846. 26433.
83279 50288. 4196. Semiperipheriã minorem vera.

SEQVVN-

(b) Værdien for π

Figur 5: Jesuitten Christopher Grienberger (1561–1636) publicerede i 1630 en værdi for π, som er korrekt på de angivne 39 cifre.

for π, idet han fejlagtigt mente, at udtrykket gjaldt præcist. Beviset er kort diskuteret i [A2, s. 126–127] og skal også kort gennemgås her.



3

SERENISSIMO, POTENTISSI-
MOQVE PRINCIPI ET DOMINO,
DN. CHRISTIANO IV.
DANORUM, NORVAGORUM,
Gothorum & Wandalorum Regi, Duci
Slesvici, Holsatiæ, Stormariæ, & Dythmarsiæ: Comiti Oldenburgico &
Delmenhorstio &c.

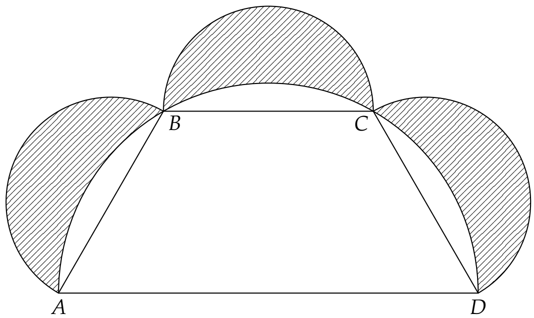
Domino & Regi suo clementissimo.

INter omnia ingeniosa inventa, REX SERENISSIME, quæ passim apud homines enascuntur, nulla ipsorum luxuriosior aut maturior seges, quàm in agro Mathematico, crescit. Quum enim reliqua & variora appareant, & ignoratâ sui imperfectione, ut plurimum laborent, sola Mathematica innumeris sanè inventis se extollendo perficitur, ita è principijs
A 2 *demon-*

Figur 6: Den første side af Longomontanus' *Cyclometria ex lunulis reciproce demonstrata*, hvoraf også dedikationen til kongen fremgår; [L1, s. 3].

Værket begynder med en diskussion, hvori Longomontanus refererer til tidligere arbejder om cirklens kvadratur.[12] Longomontanus' centrale ide ligger tæt op ad Hippokrates' kvadratur, hvortil Longomontanus også henviser gentagne gange. De i titlen på Longomontanus' *Cyclometria* omtalte "måner" er nemlig sammenlignelige med Hippokrates', men adskiller sig alligevel på et enkelt vigtigt punkt.

Longomontanus indskrev en regulær sekskant i en cirkel og tegnede halvcirkler på sekskantens sider. Da figuren er symmetrisk, er kun halvdelen af den vist i figur 7. Tre på hinanden følgende sider i den indskrevne sekskant udgør sammen



Figur 7: Longomontanus' figur fra *Cyclometria* [L1, s. 49], gentegnet på grundlag af [A2, s. 127].

med diameteren et trapez $ABCD$. Simple (og korrekte) arealbetragtninger ledte Longomontanus til den erkendelse, at

$$\text{trapez} - \text{lille halvcirkel} = 3 \text{ “måner”}. \tag{3}$$

For således at udføre cirklens kvadratur var det tilstrækkeligt for Longomontanus at være i stand til at kvadrere de skraverede måner. Desværre for Longomontanus var hans måner ikke af den slags, der kan kvadreres sådan som de tidligere betragtede måner kunne, men det har Longomontanus ikke været klar over.[13] I hvert fald ændrede hans argumentation på dette trin tilsyneladende karakter fra de eksakte arealbestemmelser til mere vidtløftige argumenter. Den centrale oplysning, nemlig månernes areal, er medtaget i *Cyclometria*, men hvor han hidtil havde ført beviser "skønner [Longomontanus] derefter uden at begrunde det, at en lille halvcirkel er lig med $1\frac{3}{10}$ måne" [A2, s. 127]. Trapezets areal kunne han derimod beregne eksakt: hvis radius i den store cirkel er 1 er trapezets areal $\frac{3\sqrt{3}}{4}$, og altså

$$\text{stor cirkel} = \frac{78\sqrt{3}}{43}. \tag{4}$$

En meget lignende konstruktion med måner konstrueret på en sekskant fandtes også hos Hippokrates, men i modsætning til Longomontanus stoppede Hippokrates efter at have relateret månernes kvadratur til kvadraturen af cirklen [Hth, bd. 1, s. 186].

Man noterer sig altså sammenfattende om Longomontanus' 1612-bevis, at det bygger på klassiske ideer sammenlignelige med Hippokrates' måner, at det på et trin bliver skønsbaseret, nærmere "mystisk", og tilsyneladende eksplicit approksimativt uden at Longomontanus synes at dvæle derved, og at Longomontanus når frem til værdien $\pi = \frac{78}{43}\sqrt{3}$. Alle disse træk er centrale også for vor diskussion af de følgende beviser.

Kritikken af Longomontanus' første bevis

Longomontanus' forsøg på cirkelkvadratur i *Cyclometria* blev hurtigt mødt med kritik fra en af landets førende matematiske kapaciteter. Thomas Fincke (1561–1656), som indtil 1602 havde besiddet det professorat i "lavere matematik", som

Longomontanus beklædte i 1612, var ingen uværdig opponent.[14] Fincke havde i 1583 udgivet sit betydningsfulde matematiske værk *Geometriae rotundi libri XIV*, som var ganske banebrydende. I denne bog, som omhandlede den plane og sfæriske trigonometri, gengav Fincke nogle af de trigonometriske resultater og tabeller, som var blevet udviklet før ham. I særdeleshed indeholder hans bog en behandling af tangens-tabeller, som skal vise sig interessant i det følgende. Mest iøjnefaldende for sin samtid var Finckes bog dog nok derved at den ikke byggede direkte på Euklids grundlag for geometrien, men derimod var inspireret af den franske filosof Petrus Ramus (1515–1572).[15]

Selvom han ikke bidrog med meget forskning, nærede Fincke en livslang interesse for matematik, og han fortsatte også efter overgangen til andre professorater med at forelæse over matematiske emner. I sin egenskab af professor ved Universitetet blev Fincke i 1597 pålagt at besigtige instrumenterne på Hven efter Tychos bortrejse, og han fældede en ganske hård dom over deres tilstand.[16] Finckes meget anstrengte forhold til Tycho kan muligvis have ført til et modsætningsforhold mellem Fincke og Longomontanus, selvom de to mænd blev i familie da Longomontanus i 1607 giftede sig ind i den magtfulde Fincke-Bartholin-klan.[17]

I et brev til universitetskansleren kritiserede Fincke i 1612 skarpt Longomontanus' *Cyclometria*.[18] At Fincke valgte at gå til universitetets officielle kanaler og ikke diskutere sine indvendinger direkte med forfatteren — som han jo på dette tidspunkt måtte kende også privat — kan ses som et eksempel på den polemiske (disputerende) stil i den akademiske verden og som et udtryk for, at Fincke fandt sin kritik af Longomontanus ganske alvorlig. Imidlertid formåede hverken Finckes eller andres senere kritik at overbevise Longomontanus om bevisets svagheder eller problemets utilgængelighed.

Longomontanus' efterfølgende beviser

I perioden efter 1612 udgav Longomontanus en række andre beviser for cirklens kvadratur. Man kan undre sig over, at Longomontanus syntes at nok et bevis var berettiget. Men man skal nok ikke tolke hans handling som et udslag af usikkerhed hos ham selv så meget som et forsøg på at overbevise sine kritikere.

I 1627 publicerede Longomontanus nok et arbejde om cirklens kvadratur og det blev indtil 1646 fulgt af yderligere mindst ti skrifter.[19] I 1637 udgav Longomontanus således en pamflet med titlen *Coronis problematica ex mysteriis ...* (*Kort udkast, fremstillet ud fra mysterierne ved de tre tal: 6, 7 og 8, sammenlignede paa rette maade i deres kvadrater, ved hvilke i det store og hele cirkellinien i talværdi gøres lig med den rette linie*) [L2], som kun fyldte 16 sider. Alligevel indeholdt den lille pamflet — og andre som den — flere forskellige sætninger om cirklens kvadratur, som blev præsenteret med tilhørende figurer. Foruden cirkelkvadraturerne indeholdt pamfletterne også nogle af Longomontanus' eksplicit talmystiske overvejelser, som derved også blev sat i forbindelse med den eksakte matematik. Nogle af sætningerne om cirklens kvadratur benyttede igen kvadraturen af månerne, som Longomontanus havde hævdet i 1612. Andre sætninger bestod ikke af meget mere end henvisninger til figurer. Men en af sætningerne henviste til en figur og et argument, som Longomontanus få år senere søgte at udbrede til hele verdens kendskab.[20]

Longomontanus' *Rotundi in plano*, 1644

Det mest omdiskuterede af Longomontanus' cirkelkvadraturer blev udgivet i Amsterdam i 1644 under titlen *Rotundi in plano seu circuli absoluta mensura* (herefter omtalt som *Rotundi in plano*), dvs. det rundes mål i en plan flade, eller cirklens virkelige udmåling. Her brugte Longomontanus en ganske anden metode end i 1612, men alligevel nåede han frem til samme værdi for π (2), blot skrev han den nu på formen $\pi = \sqrt{18252}/43$ og angav som tilnærmet værdi 3,141859604427, hvilket er en endnu større nøjagtighed af denne brøk end tidligere angivet.

I indledningen til *Rotundi in plano* skrev Longomontanus, at han havde haft sit nye kvadraturbevis færdigt i nogle år og via en rejsende havde sendt det til Galileo Galilei (1564–1642) i håb om at denne ville støtte ham og udbrede kendskabet til beviset til andre matematikere. Han havde imidlertid ikke fået noget svar fra Galilei, som også var død i mellemtiden, og Longomontanus så det derfor for sin videnskabelige pligt at gøre Europas matematikere opmærksom på sin opdagelse. Dette gjorde han i form af en bog udgivet af den anerkendte hollandske forlægger Johan Blaeu (1596–1673). Blandt Europas lærde tiltrak Longomontanus' bevis sig især opmærksomhed fra den engelske matematiker John Pell (1611–1685), hvis imødegåelse af Longomontanus vil blive diskuteret nedenfor. Forinden er det dog på sin plads at beskrive Longomontanus' bevis fra *Rotundi in plano*, hvis centrale argumenter som nævnt allerede fandtes i tidligere udgivelser.

Longomontanus' cirkelkvadratur i *Rotundi in plano* bygger på et (forkert) udsagn om figuren 8, som er konstrueret på følgende vis: I den ligesidede trekant ABC er indskrevet en cirkelbue, og DE er trukket parallel med BC. Så er trekanten ADE igen ligesidet, og i ADE indskrives yderligere en cirkelbue. Dette definerer altså afstandene DF ud fra BD og en analyse viser, at

$$AF = AN = AD \times \cos \frac{1}{2}\angle BAC.$$

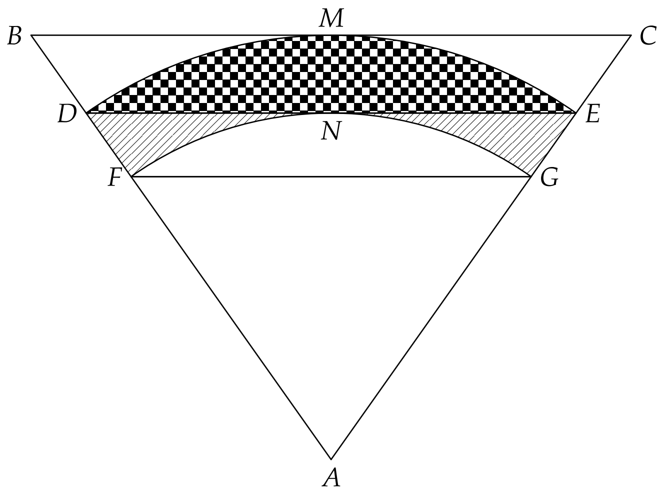
Om denne figur mente Longomontanus, at der gjaldt, at

$$\frac{\text{segment } DNEM}{\text{horn } DFN + \text{horn } EGN} = \frac{9}{4}, \tag{5}$$

dvs. at det ternede areal forholder sig til det skraverede som $9 : 4$.

Longomontanus var måske blevet inspireret til dette lemma ud fra Arkimedes' klassiske areal- og volumen-bestemmelser, der alle bygger på simple forhold mellem heltal. Men i Longomontanus' tilfælde er resultatet forkert. Det bevis, som Longomontanus gav, er bygget på en simpel cirkelslutning, hvori Longomontanus antog det, der skulle bevises (at forholdet er $9 : 4$) for så at bevise det — og så nytter det ikke noget, at han for at efterprøve resultatet regnede yderligere tre iterationer igennem med samme cirkelslutning. En analyse af figur 8 viser nemlig, at forholdet mellem de to segmenter godt nok er uafhængigt af afstanden AB men afhænger af vinklen $\angle BAC$.[21] Den værdi $(9 : 4)$, som Longomontanus hævdede generelt, svarer konkret kun til en bestemt vinkel $\angle BAC \approx 33{,}7^\circ$. Med det fejlagtige resultat nåede Longomontanus til en kvadratur af cirklen, som ligesom tidligere beviser gav værdien $\pi = \frac{78}{43}\sqrt{3}$.[22]

Efter selve beviset anførte Longomontanus nogle yderligere argumenter, som han mente bestyrkede resultatets korrekthed. Et af dem går ud på, at hans værdi $\frac{78}{43}\sqrt{3}$



Figur 8: Longomontanus' centrale figur fra *Rotundi in plano* (1644), gentegnet på grundlag af [vM2, s. 318].

ligger næsten midt i det mest præcise interval, som Arkimedes havde angivet (se tabel 1). Derfor skulle Longomontanus' værdi — ifølge ham selv — være bedre end de andre "konkurrerende" værdier for π [vM2, s. 320].

Arkimedes' nedre grænse	$3\frac{10}{71}$	3,14084507
Arkimedes' øvre grænse	$3\frac{1}{7}$	3,14285714
Midtpunktet af Arkimedes' interval		3,14185111
Longomontanus' værdi	$\frac{78}{43}\sqrt{3}$	3,14185960
Grienbergers værdi	π	3,14159265
Cornus værdi (se nedenfor)	$\frac{20}{9}\sqrt{2}$	3,14269681
Pells øvre grænse (se nedenfor)		3,14176

Tabel 1: Sammenligning af værdier for π.

Kontroversen med Pell om cirklens kvadratur

Som omtalt havde Longomontanus valgt en ganske aktiv strategi for at tiltrække opmærksomhed omkring sin *Rotundi in plano*. Den blev offentliggjort i Amsterdam med det eksplicitte formål at udbrede resultatet til bredere kredse, selvom Longomontanus allerede tidligere havde publiceret næsten præcist det samme argument tilsyneladende uden at tiltrække stor interesse. Publikationen i 1644 provokerede den engelske matematiker Pell til en indædt kamp for at få Longomontanus til at indse sit resultats fejlagtighed. Pell var ingen betydelig forsker, men han havde gode kontakter både i England og på kontinentet.[23] Mellem 1643 og 1652 opholdt han sig i Holland, hvorfra han korresponderede med matematikere i England og også stod i brevveksling med Marin Mersenne (1588–1648) i Frankrig. Selvom cirklens kvadratur var et emne, der stadig blev diskuteret i de matematiske kredse, synes det for Pell at være blevet lidt af en besættelse at gendrive Longomontanus — en besættelse til hvilken han tog ganske mange forskellige midler i brug.[24]

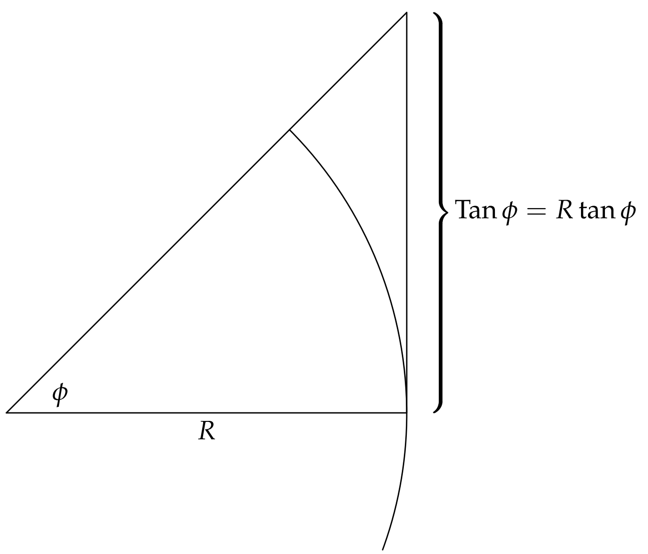
Pell's kritik af Longomontanus

Det meste oplagte for Pell havde måske været at påpege den ovenfor omtalte cirkelslutning i Longomontanus' bevis i *Rotundi in plano* for derved at påpege argumentets ukorrekthed, men dette var ikke Pells strategi. I stedet søgte han at bevise, at den værdi $\pi = \frac{78}{43}\sqrt{3}$, som Longomontanus udledte, ikke kunne være korrekt. Og for at give sit argument ydeligere vægt forsøgte Pell med held at mobilisere den matematiske elite til at udtrykke støtte til hans forehavende og hans argument.

For at bevise, at værdien $\frac{78}{43}\sqrt{3}$ ikke var korrekt kunne Pell måske have henvist til nogle af de meget præcise beregninger af π, der — som allerede omtalt — var tilgængelige i 1640'erne. Men Longomontanus havde allerede taget brodden af dette argument ved at hævde, at fordi hans værdi lå tættere på det aritmetiske gennemsnit af Arkimedes' bedste grænser for π var hans værdi bedre end de konkurrerende bud.

I stedet søgte Pell med simplest mulige redskaber at bevise, at omkredsen af en regulær 256-gon omskrevet om en cirkel med diameter 100.000 er mindre end 314.176. Og da Longomontanus' værdi for cirklens omkreds svarede til 314.185,96 mente Pell, at dette var en stærk gendrivelse.[25]

Pells argumentation byggede på et centralt lemma, som angiver hvad vi i dag vil betegne som en *tangens-relation* ved en vinkelfordobling.[26] Hvis R betegner radius i en cirkel og ϕ en vinkel, så kan vi med Pell betragte $\operatorname{Tan}\phi$ som den størrelse, vi i moderne notation ville skrive som $\operatorname{Tan}\phi = R\tan\phi$ (se figur 9). Udtrykt i denne



Figur 9: Relationen mellem R, ϕ og $\operatorname{Tan}\phi$ som anvendt i Pells lemma, [vM2, s. 326].

notation angiver Pells lemma da, at $\operatorname{Tan} 2\phi$ kan udtrykkes ved

$$\operatorname{Tan} 2\phi = \frac{2R^2 \operatorname{Tan}\phi}{R^2 - \operatorname{Tan}^2\phi}, \tag{6}$$

forudsat at $0° < \phi < 45°$. Pell valgte nu radius $R = 100.000$ og en første vinkel, således at

$$\operatorname{Tan}\phi_1 = 41.421{,}36. \tag{7}$$

Pell var ikke nødt til at angive selve vinklen ϕ_1, men kunne blot (stiltiende) udnytte, at Tan er kontinuert, således at en vinkel fandtes, for hvilken relationen (7) var opfyldt. Nu kunne Pell så benytte lemmaet (6) til at sikre sig, at $\operatorname{Tan} 2\phi_1 > 100.000 = R$. Ved igen stiltiende at udnytte egenskaber ved tangensfunktionen (denne gang, at den er monotont voksende mellem 0° og 45°), var det derfor muligt for Pell at konkludere, at $2\phi_1 > 45°$, og altså at $\phi_1 > 22°30'$. Ideen i Pells videre argument var nu at angive Tan til en række nye vinkler $\operatorname{Tan}\phi_2, \dots, \operatorname{Tan}\phi_6$ uden at behøve at angive selve vinklernes størrelser præcist, men således at $\phi_k < \frac{1}{2}\phi_{k-1}$ ($k = 2,3,\dots$). Formålet var at nå en så lille vinkel (hvilket Pell nåede ved ϕ_6), at denne vinkel ville give en omkreds af den tilhørende omskrevne regulære polygon, som var mindre end Longomontanus' udtryk $\frac{78}{43}\sqrt{3}$. Pell opnåede dette ved at vælge følgende værdier

$$\begin{aligned}
\operatorname{Tan}\phi_1 &= 41.421{,}36 & \phi_1 &> 22°30' \\
\operatorname{Tan}\phi_2 &= 19.891{,}24 & \phi_2 &> 11°15' \\
\operatorname{Tan}\phi_3 &= 9.849{,}15 & \phi_3 &> 5°37'30'' \\
\operatorname{Tan}\phi_4 &= 4.912{,}69 & \phi_4 &> 2°48'45'' \\
\operatorname{Tan}\phi_5 &= 2.454{,}86 & \phi_5 &> 1°24'22'' \\
\operatorname{Tan}\phi_6 &= 1.277{,}25 & \phi_6 &> \frac{360°}{512}
\end{aligned}$$

Lad os fastholde Pells radius $R = 100.000$ og indføre notationen O for omkredsen af en cirkel med radius R og O_n for omkredsen af en regulær n-kant omskrevet en cirkel med radius R. Da gælder $O_n = 2n \operatorname{Tan}\frac{360°}{2n}$, så med den opnåede værdi for $\operatorname{Tan}\phi_6$ fandt Pell ved at vælge $n = 256$, at

$$\frac{1}{2}O_{256} = 256 \operatorname{Tan}\frac{360°}{512} < 256 \operatorname{Tan}\phi_6 = 314.176. \tag{8}$$

Dermed var gendrivelsen af Longomontanus fuldendt, idet omkredsen af den omskrevne 256-kant altså var mindre end 314.176 og dermed mindre end Longomontanus' værdi $R \times \frac{78}{43}\sqrt{3}$ (som nemlig var større end 314.185), altså

$$\frac{1}{2}O < \frac{1}{2}O_{256} < 314.176 < 314.185 < R\frac{78}{43}\sqrt{3}. \tag{9}$$

Det centrale i Pells argumentation var som beskrevet, at hans brug af lemmaet gav ham mulighed for at specificere værdier af $\operatorname{Tan}\phi_k$ som ledte til den ønskede vurdering for ϕ_6. Denne fremgangsmåde var velegnet netop til Pells gendrivelse, fordi den gav en metode til at vurdere omkredsene ved hjælp af rationale approksimationer uden at afrundinger ophobedes. Denne metode benyttede Pell ikke blot til at gendrive Longomontanus' cirkelkvadratur, men også til at afvise et bevis fremført af den stort set ukendte landmåler og amatør-matematiker Cornu fra Pont-sur-Yonne på omtrent samme tid.[27] Cornu havde foreslået, at sidelængden i et indskrevet kvadrat forholdt sig til en fjerdedel af cirkelens omkreds som 9 : 10; dette ville altså svare til

$$\pi_{\text{Cornu}} = 2 \times \frac{10}{9} \times \sqrt{2} \approx 3{,}142696. \tag{10}$$

Da denne værdi er endnu større end Longomontanus' kunne Pell altså med samme fremgangsmåde gendrive også Cornus cirkelkvadratur.

Kontroversen om cirklens kvadratur

Pells tilbagevisning kom i 1644 i form af det korte skrift *I. Pellius contra Ch. S. Longomontanum*, der i sin oprindelige form også kendes som *Refutatiuncula*, dvs. den lille gendrivelse.[28] Han overtalte Blaeu til at indsætte det blot to sider lange modbevis som et slags appendiks til Longomontanus' bog — en usædvanlig manøvre, der virkede som salt i det sår, han havde påført den danske matematiker og astronom. Ikke blot frakendte han beviset nogen gyldighed, han sendte også en kopi af skriftet til Longomontanus sammen med et brev, hvori han bad ham om at indrømme sin fejltagelse. Det havde den 82-årige Longomontanus aldeles ikke i sinde, og i stedet reagerede han ved hurtigt at udgive et polemisk svarskrift i København, der i 1645 blev suppleret med skriftet *Controversia inter Christianum Longomontanum & Johannem Pellium*. Det blev året efter fulgt af endnu et forsvar for cirklens kvadratur i form af *Caput tertium libri primi de absoluta mensura rotundi plani*, dvs. tredje afsnit af den første bog om cirkelskivens virkelige mål.

Der var to aspekter af Pells gendrivelse, som Longomontanus fandt særligt problematiske. For det første var selve Pells argument som beskrevet baseret på et trigonometrisk lemma, hvis gyldighed Longomontanus simpelthen benægtede. Selvom Pells fremgangsmåde udmærkede sig ved at holde sig til rationale vurderinger, var Pells brug af tangens-begrebet en anstødssten for Longomontanus. For det første synes Longomontanus at have forstået tangens-begrebet i relation til tangens-*tabeller*. Disse var notorisk upålidelige og derfor et let offer for kritik.[29] For det andet knyttes selve tangens-begrebet ofte til Finckes ovenfor omtalte værk, så noget af den oprindelige uoverensstemmelse mellem Fincke og Longomontanus omkring cirklens kvadratur i 1612 kan også have haft indflydelse på Longomontanus' modstand mod Pell mange år senere.

I en bemærkelsesværdig og hidtil upåagtet kilde til et møde mellem Longomontanus og den senere så berømte filosof og matematiker René Descartes (1596–1650) i 1631, dukker tangens-argumentets natur op igen. Under sit ophold i Amsterdam mødte Pell i marts 1646 Descartes, og i et brev til sin matematikinteresserede mentor Charles Cavendish (1591–1654) beskrev Pell sine samtaler med Descartes som "[a] long discourse of Mathematicall matters."[30] I deres samtale udtrykte Descartes ros til Pell for netop at undgå irrationaliteter (*surds*), der ligesom tangenstabellerne var forbundet med usikkerheder og mange fejl:[31]

> "That not longe after comming into Denmarke, he [Descartes] visited Longomontanus & proffered to demonstrate to him y^{e} ground of his error. They spent one whole day together, shut up in a chamber alone. In y^{e} evening when they should parte, he perceived y^{t} Longomontanus understood none of his reasons. So he thought it not worth while to goe to him any more. He praises my way of dealing with him in rationall numbers, utterly excluding all mention or thought of Surds, and thinkes that if Longomontanus cannot understand y^{t} paper he can understand nothing. And therefore wondered to heare y^{t} he had written twice against me."

For det andet var det selvfølgelig netop på grund af Longomontanus' modstand mod det centrale lemma en svaghed for Pells argument, at han oprindelig ikke havde angivet et bevis derfor. Men Pell anførte i sin korrespondance med Cavendish, at han ikke følte det nødvendigt at præsentere et bevis. Pells argument var, at enhver duelig matematiker selv ville kunne indse korrektheden i løbet af en halv time — men dette gjaldt åbenbart ikke for Cavendish, hvis første forsøg var fejlagtigt.[32] For at understøtte sit argument, og fordi Longomontanus havde søgt at få Galilei til at legitimere sit bevis, forsøgte Pell selv at mobilisere kendte matematikere for sin sag og få dem til at bevise lemmaet på andre måder. Som han skrev i et brev, "yose ignorant Danes may be so much y^{e} more confounded to see a thing demonstrated so many severall wayes, which Longomontanus sayd was *indemonstrabile*."[33]

Det kan næppe have overrasket Pell, at Longomontanus med alle midler tog til genmæle. Ikke desto mindre reagerede Pell vredt og tilsyneladende med forbavselse. I november 1644 beskrev han i et brev til Cavendish sin modstander i København som "a peevish, obstinate, ignorant, infatuated old man." Om Longomontanus' første svarskrift skrev han, at det var "a reply in scurvy language & long inough to let the readers know that as yet he neither dislikes his owne bookes nor understands my discourse against them." Tilsyneladende overførte han sin vrede mod Longomontanus til dennes landsmænd i almindelighed. I et brev fra 1645, hvor han skældte ud over Longomontanus' nye *Controversia*, skrev han hånligt om "those blundering Danes" og "those selfe-conceited Danes," der absolut intet forstod [MS, s. 388–389, 424].

Den kampagne, som Pell med stor energi førte mod Longomontanus, bestod hovedsageligt i at overtale berømte matematikere til at støtte sin sag, enten ved at levere nye beviser for "Pells lemma" eller ved blot at udtrykke deres accept af lemmaet og derved afvisning af Longomontanus' bevis. Pells stort anlagte kampagne lykkedes, idet foruden Cavendish fremtrædende matematikere som Mersenne, Descartes, Thomas Hobbes (1588–1679), Bonaventura Cavalieri (1598–1647) og Gilles Personne de Roberval (1602–1675) offentligt støttede ham i kontroversen, sådan som den kulminerede i Pells *Controversiae de vera circuli mensura* fra 1647.[34] Heri optrykte han breve fra de ti matematikere, der støttede hans synspunkter. Bogen, der udkom få måneder før Longomontanus' død, afsluttede kontroversen mellem Pell og Longomontanus og bidrog til Pells anerkendelse i det lærde Europa. Den engelske digter Andrew Marvell (1621–1678), der var en bekendt af Pell, alluderede til striden i sit digt *Upon Appleton House*, hvor han skrev: "Let others vainly strive t'immure / The circle in the Quadrature!"[35]

Afslutning: talmystik, matematik og kontrovers

Naturligvis stoppede diskussionen om cirklens kvadratur ikke med Pells bog og Longomontanus' død. Samme år udkom i Antwerpen et stort værk, *Opus geometricum quadraturae circuli*, skrevet af jesuit-matematikeren Gregorius Saint Vincent (1584–1667), hvor cirklens areal blev behandlet ud fra uendelige rækker på en måde, der foregreb den senere integralregning.[36] Også blandt danske matematikere levede problemet videre helt ind i 1700-tallet [A2, s. 127–128, 141–142]. Hobbes, der kendte Descartes og var en nær ven af Mersenne, havde i striden omkring Longomontanus støttet Pell, men det betød ikke, at han afviste cirklens kvadratur. I 1655 opfandt han sit eget bevis for cirklens kvadratur, hvilket førte til en ny strid, denne gang med John Wallis (1616–1703) i en hovedrolle. Men det er en anden historie, hvorom kan læses i Douglas Jessephs bog *Squaring the Circle* [J].

Fælles for disputten mellem Longomontanus og Pell, den senere disput mellem Hobbes og Wallis og mange andre videnskabelige disputter i 1600-tallet er henvisningen til autoriteter og sociale netværk. Således har videnskabshistoriske studier af *Royal Society* igennem dets første år efter grundlæggelsen i 1660 påpeget, hvor meget videnskabsmændenes sociale status betød for deres virke.[37] Når fysiske eksperimenter skulle rapporteres, var noget af deres gyldighed funderet i pålideligheden hos den eksperimentelle fysiker og *gentleman*. Der er tale om tilsvarende "sociale argumenter", når Longomontanus og Pell søgte at understøtte deres egne argumenter ved at søge at henvise til domme derover fældet af de matematiske videnskabers største autoriteter, nemlig henholdsvis Galilei og Roberval. Alt dette foregik i en polemisk og disputerende kultur, som også omfattede matematikken. At være forpligtet på det bedre argument — og udelukkende at bygge på rationale kriterier for at vurdere argumenter — er nyere tilføjelser til de matematiske videnskabers etos. Disse eksempler viser os, at i en vis forstand er det en *moderne* egenskab ved matematikken, at det er den videnskab, hvori "enhver uoverensstemmelse lader sig løse", som moderne matematiksociologer er nået frem til [Htz].

Tilbage står vi så med billedet af den danske matematiker Longomontanus som en, der aldrig accepterede gendrivelsen af sine cirkelkvadraturer, og vi overvejer hvad han kan have tænkt. Longomontanus havde livet igennem arbejdet med jordens og himlenes matematik, både med beregninger og teoretiske modeller. Dette arbejde havde ledt ham til at lægge en stor vægt på numerologiske eller talmystiske overvejelser og argumenter. Således er det blevet beskrevet, hvordan de to perfekte tal 28 og 496 spillede en stor rolle i hans sol-teori, ligesom de indgik centralt i hans astronomisk baserede kronologi, hvor han beregnede Guds skabelse af verden til at have fundet sted 3967 år før Kristi fødsel [Mo].

Tilsvarende indgik der altså i Longomontanus' arbejder med cirklens kvadratur også talmystiske overvejelser for eksempel i hans tro på pæne, heltallige forhold. Foruden en vis portion stædighed var Longomontanus nemlig nok også drevet af et for ham at se ikke tilfældigt sammenfald af resultater opnået ved forskellige metoder. Vi kan formode, at nogle af disse metoder har været inspireret af det mål, de havde i sigte, og en stor portion matematisk æstetik eller talmystik synes at have spillet ind. Men samtidig må man også anerkende, at Pells oprindelige gendrivelse ikke var fuldt underbygget, at tabeller vitterlig ikke var noget godt argument (som jo heller ikke blev brugt), og at både irrationale tal og tangens-relationer kan have været så nye og uhåndterlige størrelser i 1600-tallets begyndelse, at en matematiker på Europas videnskabelige periferi kan være undskyldt i ikke helt at forstå dem.

Longomontanus' argumenter for at afvise fx Pells gendrivelse kan således være svære at forstå for moderne matematikere, som jo også ved, at hele opgaven er umulig at løse.[38] I sit første matematikhistoriske arbejde om cirkelkvadraturernes historie fra 1754 bemærkede Jean Étienne Montucla (1725–1799) således at han var blevet "skuffet over at finde at Longomontanus — den berømte astronom fra begyndelsen af det foregående århundrede — havde påført sig selv skade ved at være underlagt den illusion at have udført cirklens kvadratur." "Men," fortsatte Montucla, "Longomontanus fortjener nogen overbærenhed i kraft af sine nyttige undersøgelser, for hvilke astronomien er ham tak skyldig" [Mon1, s. 224–225].

Noter

[1]En vigtig undtagelse er Rasmus Bartholin (1625–1698), som i Holland leverede bidrag til bearbejdningen af Descartes' geometri [A2, s. 130–133]; se også [KKS1].

[2]Den følgende biografi bygger på oplysninger fra [DBL2; DBL1; T].

[3]Tycho havde selv publiceret om det "tychoniske system" i 1588; se [K1, bd. I, s. 247].

[4]For mere om astronomiens historie og de danske astronomers, inkl. Longomontanus', forhold dertil, se [K1, s. 219–268].

[5][K1, bd. I, s. 164ff]. Morin, der var kendt som polemiker, var professor ved *Collège Royal* i Paris, hvor han var kollega med den fremtrædende naturfilosof Pierre Gassendi (1592–1655), der i 1654 udgav den første biografi om Tycho Brahe, se [K3].

[6]Longomontanus' anstrengelser for at løse cirklens kvadratur omtales af autoriteter inden for matematikhistorien som Montucla og Moritz Cantor (1829–1920); se fx [Mon2, bd. 4, s. 626], der dog fejlagtigt angiver 1622 som årstallet for *Cyclometria*. Montucla havde allerede i 1754 omtalt Longomontanus' påståede beviser i sin [Mon1], se også s. 114. [C, bd. 2, s. 712–713] gengiver hovedtrækket i Longomontanus' bevis i *Rotundi in plano*, der i større detaljer er gennemgået i [vM2, s. 317–320].

[7]Se også [Lu, s. 33–34] og [Hth, bd. 1, s. 183–201]. Matematikeren Hippokrates fra Chios må ikke forveksles med den berømte læge Hippokrates fra Kos (cirka 400 f.v.t.), som har ydet et varigt bidrag til lægevidenskabens historie. Idag kender man kun til matematikeren Hippokrates' arbejder gennem antikke kommentatorer, især Eudemus fra Rhodos (4. årh. f.v.t.).

[8]Se også [Lu, s. 35–44].

[9]Man skal være opmærksom på, at en selvstændig benævnelse og notation for π ikke opstod før i begyndelsen af 1700-tallet og først blev standard efter Leonhard Eulers (1707–1783) brug af symbolet i 1740'erne; se [Lu, s. 128] og [Caj, §§ 396–398].

[10]Nogle steder ser man refereret værdien $\frac{21}{7}$ som "Arkimedes' værdi for π", men det er vigtigt at huske, at Arkimedes angav et *interval* for π, og ikke en bestemt værdi — hverken approksimativ eller eksakt.

[11][G]. Forfatterne takker Siegmund Probst for assistance til at tilgå de relevante dele af Grienbergers værk.

[12]Undervejs henviser Longomontanus til mange antikke matematiske forfattere og desuden også til fx Johann Müller Regiomontanus (1436–1476), François Viète (1540–1603) og Ramus [L1, s. 13,26,30].

[13]Se [Hth, bd. 1, s. 199–200] for en forklaring af, hvilke "Hippokratiske" måner, der lader sig kvadrere eksakt.

[14]Oplysningerne om Fincke bygger på [DBL3; DBL4; Sch].

[15]Ramus er mest kendt for sine opgør med aristotelismen, men han var også forfatter af værket *Scholae mathematicae* fra 1569, som præsenterede et nyt syn på geometrien.

[16]Om det dårlige forhold mellem Fincke og Tycho, se [Ch, s. 199–205].

[17]Longomontanus blev gift med en af Caspar Bartholins (1585–1629) døtre (Dorthe, 1590–1637) og kom således i familie med både Ole Worm (1588–1654) og Caspar Bartholins to begavede sønner, Thomas (1616–1680) og Rasmus. Caspar Bartholin var gift med en af Finckes døtre, Anna.

[18][A2, s. 125], hvoraf desværre ikke fremgår, hvori konkret Finckes kritik bestod.

[19]Titlerne er angivet i [N].

[20]Yderligere en af Longomontanus' kvadraturkonstruktioner, som benytter en anden fremgangsmåde end månerne, er anført i [Lu, s. 110–111]. Der gives ingen præcis reference, men det oplyses, at ved denne lejlighed angav Longomontanus intet bevis.

[21]Forholdet er helt præcist givet ved udtrykket

$$\frac{\angle BAC}{\cos\angle BAC\left(\angle BAC\cos\frac{1}{2}\angle BAC-\sin\frac{1}{2}\angle BAC\right)},$$

hvor $\angle BAC$ angives i radianer.

[22]Beviset er beskrevet i [vM2, s. 317–320].

[23]Om Pell og hans arbejder og forbindelser, se [M1] samt [MS]. Sidstnævnte værk er behandlet i et review symposium i *Metascience* [vM1].

[24]Pell var imidlertid ikke ene om at angribe den aldrende professor i København. Det samme skete i en anonym pamflet udgivet i Paris i 1644 med titlen *Cyclometriae a Christiano Severini Longomontano mathematicarum superiorum in Academia Hafniaensi regio professore*. Skriftet var formentlig forfattet af Claude Hardy (1598–1678), der hørte til kredsen omkring Mersenne og var en af Descartes' støtter [MS, s. 553].

[25][vM2, s. 323–324].

[26]Pells argument er både fotografisk gengivet og gennemgået i [vM2, s. 323–328], hvorpå det følgende bygger.

[27]Mersenne til Pell, 7. oktober 1645 og Pell til Mersenne, 18. oktober 1645; begge gengivet og oversat i [M2, s. 82–86]. Gendrivelsen af Cornu er også kort omtalt [vM2, s. 336], hvor Cornus identitet dog er et mysterium.

[28]Skriftet, som idag kun findes i et enkelt originalt eksemplar, er gennemgået og fotografisk gengivet i [vM2].

[29][vM2, s. 321]; se også [MS, s. 389–390].

[30]Pell til Cavendish, 12. marts 1646, som gengivet i [H]. Brevet er i sin helhed gengivet i [MS, s. 467–471]. På den tid boede Cavendish i Paris.

[31]Descartes' hidtil upåagtede besøg på dansk grund er behandlet i [KKS2; KKS1].

[32][vM2, s. 330–335]. Et bevis kan let uddrages af additionsformlerne for cosinus og sinus, fx

$$\tan 2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=\frac{2\sin x\cos x}{\cos^2 x-\sin^2 x}=\frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}.$$

[33]Pell til John Leake, august 1645, som citeret i [J, s. 2].

[34]Blandt de lærde, han henvendte sig til, var også den holstenske polyhistor Adam Olearius (1603–1671), der var hofmatematiker for hertug Frederick III på Gottorp slot og desuden var kendt som ingeniør og etnograf [K1, s. 167]. Også Descartes udtrykte sin fulde støtte til Pells gendrivelse af Longomontanus i et brev til en ukendt adressat, idet han fandt Pells svar at være "meget klart og åndrigt" [D, bd. 4, s. 342–343]. Descartes var bekendt med nogle af Longomontanus' beviser, og i det mindste beviset i *Rotundi in plano*, men han synes ikke at have haft nogen særlig interesse i emnet og tog knap nok Longomontanus' beviser alvorligt. I et brev fra december 1639 til Mersenne, der tilsyneladende havde fortalt ham om Danmark, skriver han: "Hvis resten af det, De skriver om Danmark, ikke er mere sandt, end det er sandt at Longomontanus har fundet cirklens kvadratur, så er der ingen grund til at tro meget på det" [D, bd. 2, s. 636].

[35]Se [St], der på s. 101 argumenterer, at linjerne henviser til striden mellem Longomontanus og Pell.

[36]Jf. [Lu, s. 111] og [Me]. Rasmus Bartholin var bekendt med Saint Vincents værk, som han nævner i et brev til Worm, men uden at udtale sig om cirkelkvadraturen i øvrigt [S, bd. 3, s. 406].

[37]Se især [Sh].

[38]Det blev i 1882 bevist af Ferdinand Lindemann (1852–1939) [Li], at π er *transcendent*, dvs. ikke er løsning i nogen algebraisk ligning. Dermed kan tallet specielt ikke konstrueres med passer og lineal ud fra givne rationale størrelser, se [Lu, s. 128] eller [Kl, bd. 3, s. 980–982].

Litteratur

[A1] Kirsti Andersen, *An impression of mathematics in Denmark in the period 1600–1800*, Centaurus **24** (1980), 316–334.

[A2] Kirsti Andersen og Thøger Bang, *Matematik*, Københavns Universitet 1479–1979 (Svend Ellehøj, Leif Grane, Knud Waaben, Johannes C. Melchior, Povl Johs. Jensen, Mogens Pihl og Torben Wolff, red.), bind 12, G.E.C. Gads Forlag, København, 1983, Udgivet af Københavns Universitet ved 500 års jubilæet, s. 113–199.

[Caj] Florian Cajori, *A history of mathematical notations*, Open Court Publishing Company, Chicago, IL., 1952, 2 bind, først udgivet 1928–29.

[C] Moritz Cantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B. G. Teubner, Leipzig, 1880–1908, 4 bind.

[Ch] John Robert Christianson, *On Tycho's island: Tycho Brahe and his assistants, 1570–1601*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[D] Descartes, *Oeuvres de Descartes*, Vrin, Paris, 1966, først udgivet 1897–1910, 12 bind, redigeret af C. Adam og P. Tannery.

[DBL1] ______, *Christen Sørensen Longomontanus (1562–1647)*, Dansk Biografisk Leksikon, bind 9, Gyldendahl, København, 3. udg., 1981, 16 bind, s. 109–110.

[DBL2] H. F. Rørdam og C. F. Pechüle, *Christen Sørensen Longomontanus (1562–1647)*, Dansk biografisk Lexikon, tillige omfattende Norge for Tidsrummet 1537–1814, bind 10, Gyldendalske Boghandels Forlag (F. Hegel & Søn), Græbes Bogtrykkeri, Kjøbenhavn, 1896, 19 bind, redigeret af C. F. Bricka, s. 364–369.

[DBL3] H. F. Rørdam og H. G. Zeuthen, *Thomas Fincke (1561–1656)*, Dansk biografisk Lexikon, tillige omfattende Norge for Tidsrummet 1537–1814, bind 5, Gyldendalske Boghandels Forlag (F. Hegel & Søn), Græbes Bogtrykkeri, Kjøbenhavn, 1891, 19 bind, redigeret af C. F. Bricka, s. 150–153.

[DBL4] C. M. Taisbak, *Thomas Fincke (1561–1656)*, Dansk Biografisk Leksikon, bind 4, Gyldendahl, København, 3. udg., 1980, 16 bind, s. 398–399.

[E] Euklid, *Euklids elementer*, Nordisk Forlag, København, 1897–1912, 6 bind, oversat af T. Eibe.

[G] Christopher Grienberger, *Elementa trigonometrica, id est sinus tangentes, secantes. in partibus sinus totius 100000*, Zennetto, Roma, 1630.

[Hth] T. L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1960, 2 bind, først udgivet 1921.

[Htz] Bettina Heintz, *"In der Mathematik ist ein Streit mit Sicherheit zu entscheiden". Perspektiven einer Soziologie der Mathematik*, Zeitschrift für Soziologie **29** (2000), nummer 5, 339–360.

[H] Helen Hervey, *Hobbes and Descartes in the light of some unpublished letters of the correspondence between Sir Charles Cavendish and Dr. John Pell*, Osiris **10** (1952), 67–90.

[J] Douglas M. Jesseph, *Squaring the circle. The war between Hobbes and Wallis*, The University of Chicago Press, Chicago/London, 1999.

[Kl] Morris Kline, *Mathematical thought from ancient to modern times*, Oxford University Press, Oxford, 1990, 3 bind, først udgivet 1972.

[K1] Helge Kragh, *Fra middelalderlærdom til den nye videnskab, 1000–1730*, Dansk Naturvidenskabs Historie, bind 1, Aarhus Universitetsforlag, Århus, 2005.

[K2] ———, *Omkring Kopernikus: De tidligste skrifter om det kopernikanske verdensbillede*, Steno Museets Venner, Århus, 2006.

[K3] ———, *Received wisdom in biography: Tycho biographies from Gassendi to Christianson*, The History and Poetics of Scientific Biography (Thomas Söderqvist, red.), Aldershot, Ashgate, 2007, s. 121–133.

[KKS1] Helge S. Kragh og Henrik Kragh Sørensen, *An odd couple: Descartes and Longomontanus. A contribution to Cartesianism in seventeenth-century Denmark*, Ideas in History **2** (2007), nummer 1, 9–35.

[KKS2] ———, *Longomontanus og Descartes: Et møde i København 1631*, Udkommer i *Ole Rømers Venner*, 2007.

[Li] F. Lindemann, *Ueber die Zahl π*, Mathematische Annalen **20** (1882), 213–225.

[L1] Christiano S. Longomontano, *Cyclometria ex lunulis reciproce demonstrata, unde tam area, quam perimetri circuli exacta dimensio, & in numeros diductio sequnta est, hactenus ab omnibus mathematicis unice desiderata*, Henrici Waldkirchij, Hafniæ, 1612.

[L2] ———, *Coronis problematica ex mysteriis trium numerorum, senarij, septenarij, & octonarij, in suis qvadratis rite inter se collatis, concinnata: Qvibus linea circularis rectæ multifariam in numeris æqvatur*, Solomonis Sartorii, Hafniæ, 1637.

[Lu] Jesper Lützen, *Cirklens kvadratur, vinklens tredeling og terningens fordobling. Fra oldtidens geometri til moderne algebra*, Systime, Herning, 1985.

[M1] Noel Malcolm, *The publications of John Pell, F.R.S. (1611–1685): Some new light and some old confusions*, Notes and Records of the Royal Society of London **54** (2000), nummer 3, 275–292.

[M2] ———, *Five unknown items from the correspondence of Marin Mersenne*, The Seventeenth Century **21** (2006), 73–98.

[MS] Noel Malcolm og Jacqueline Stedall, *John Pell (1611-1685) and his correspondence with Sir Charles Cavendish: The mental world of an early modern mathematician*, Oxford University Press, Oxford, 2005.

[Me] Ad Meskens, *Gregory of Saint Vincent: A pioneer of the calculus*, The Mathematical Gazette **78** (1994), nummer 483, 315–319.

[Mo] Kristian Peder Moesgaard, *Tychonian observations, perfect numbers, and the date of creation: Longomontanus's solar and precessional theories*, Journal for the History of Astronomy **6** (1975), 84–99.

[Mon1] Jean Etienne Montucla, *Histoire des recherches sur la quadrature du cercle; ouvrage propre à instruire des découvertes réelles faites sur ce problême célébre, et à servir de préservatif contre de nouveaux efforts pour le résoudre: avec une addition concernant les problêmes de la duplication du cube et de trisection de l'angle*, Jombert, Paris, 1754.

[Mon2] ———, *Histoire des mathématiques, dans laquelle on rend compte de leurs progrès depuis leur origine jusqu'à nos jours; où l'on expose le tableau et le développement des principales découvertes dans toutes les parties*, Albert Blanchard, Paris, 1968, først udgivet 1799.

[N] Niels Nielsen, *Matematikken i Danmark 1528–1800: Bidrag til en bibliografisk-historisk oversigt*, Gyldendalske Boghandel, København og Kristiania, 1912.

[S] H. D. Schepelern (red.), *Breve til og fra Ole Worm*, Munksgaard, København, 1965–1968, 3 bind.

[Sch] Jürgen Schönbeck, *Thomas Fincke und die* Geometria rotundi, NTM: International Journal of History and Ethics of Natural Sciences, Technology and Medicine **12** (2004), 80–99.

[Sh] Steven Shapin, *A social history of truth*, Science and Its Conceptual Foundations, The University of Chicago Press, Chicago og London, 1994.

[St] Daniel Stempel, *The Garden: Marvell's Cartesian ecstacy*, Journal of the History of Ideas **28** (1967), nummer 1, 99–114.

[T] Victor E. Thoren, *Christian Severin (1562–1647)*, Dictionary of Scientific Biography (Charles Coulstone Gillispie, red.), bind 12, Charles Scribner's Sons, New York, 1975, s. 332.

[T] J. P. Trap (red.), *Billeder af berømte danske mænd og kvinder der have levet i tidsrummet fra Reformationens indførelse indtil Kong Frederik VIIs død*, Chr. Steen, København, 1867–1869, 3 bind.

[vM1] Jan van Maanen, Douglas M. Jesseph, Michael Hunter, Jackie Stedall og Noel Malcolm, *John Pell (1611–1685): Mathematical utopian*, Metascience **15** (2006), 217–249, boganmeldelse af [MS].

[vM2] Jan A. van Maanen, *The refutation of Longomontanus' quadrature by John Pell*, Annals of Science **43** (1986), nummer 4, 315–352.