Arkimedes' arbelos

Karen Sofie Ronæss

Finnbergåsen 32
5063 Bergen Norway
k.s.ronaess@tele2.no

Jeg henviser til Bengt Ulins artikkel *Pappus - en proportionernas jonglör* i Normat nr. 1 2005. Jeg har funnet veldig enkle beviser for problemene 1b og c og et ikke fullt så enkelt, men dog, for problem 2. Alle bygger på tre/to velkjente setninger fra geometrien og trigonometrien, nemlig:

I) At for alle punkter på sirkelperiferien står radien til et punkt på periferien og tangenten i det samme punktet vinkelrett på hverandre. (Bare i 1b).

II) At den rette linjen gjennom sentrene i to sirkler som tangerer hverandre, også går gjennom tangeringspunktet mellom sirklene.

III) Den pytagoreiske læresetningen.

1b. At de to sirklene på hver sin side av normalen er like store

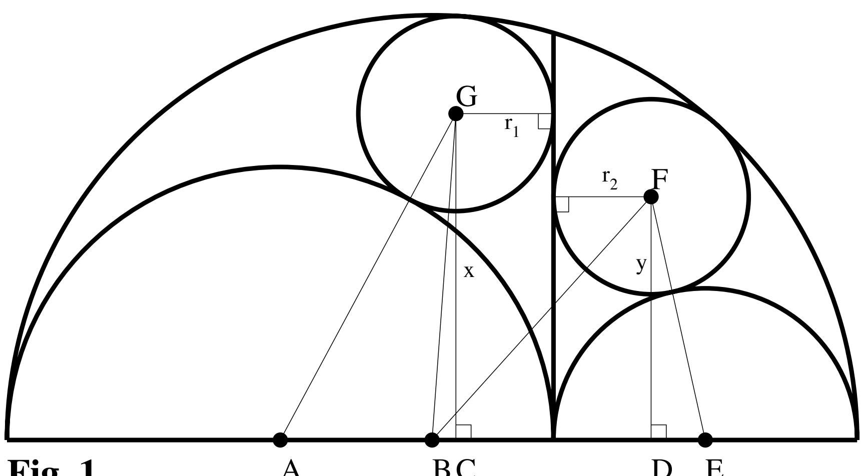

Fig. 1

La B,A,og E være sentrene for sirklene med radier $c = a + b, b$ og a respektive Trekant ACG gir

$$x^2 = (b + r_1)^2 - (b - r_1)^2.$$

Trekant BCG gir

$$x^2 = (c - r_1)^2 - (2b - c - r_1)^2$$

altså er

$$(b + r_1)^2 - (b - r_1)^2 = (c - r_1)^2 - (2b - c - r_1)^2$$

Med litt regning får vi $r_1 = ab/c$.

Trekant BDF gir

$$y^2 = (c - r_2)^2 - (c - 2a + r_2)^2$$

Trekant DEF gir

$$y^2 = (a + r_2)^2 - (a - r_2)^2$$

altså er

$$(a + r_2)^2 - (a - r_2)^2 = (c - r_2)^2 - (c - 2a + r_2)^2$$

Her får vi $r_2 = ab/c$. Altså er sirklene like store. Nå kan punktet B ligge på andre siden av C. Da får vi at linjestykket

$$BC = c - 2b + r_1, \text{ men } (c - 2b + r_1)^2 = (2b - c - r_1)^2,$$

så det skaper ikke problemer.

1c. En formel for radien i sirkelen som er innskrevet i figur 2

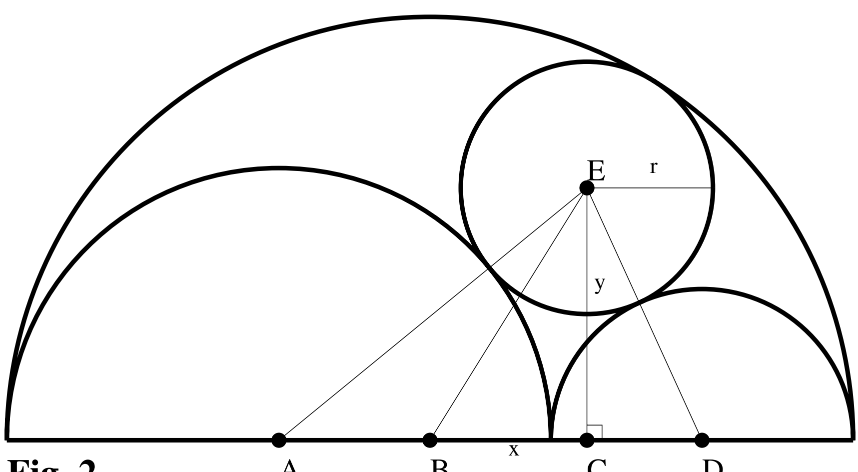

Fig. 2

Trekant ACE gir

I: $$(c-b+x)^2+y^2=(b+r)^2$$

Trekant BCE gir

II: $$x^2+y^2=(c-r)^2$$

Trekant CDE gir

III: $$(c-x-a)^2+y^2=(a+r)^2$$

Altså er

I: $$(a+x)^2+y^2=(b+r)^2$$

II: $$x^2+y^2=(c-r)^2$$

III: $$(b-x)^2+y^2=(a+r)^2$$

Med en del regning kommer vi frem til at

$$r=abc/(a^2+bc), y=2abc/(a^2+bc)$$

og dessuten at $x=c(b^2-a^2)/(a^2+bc)$.

2. Generelle formler for de innskrevne sirklene i figur 3

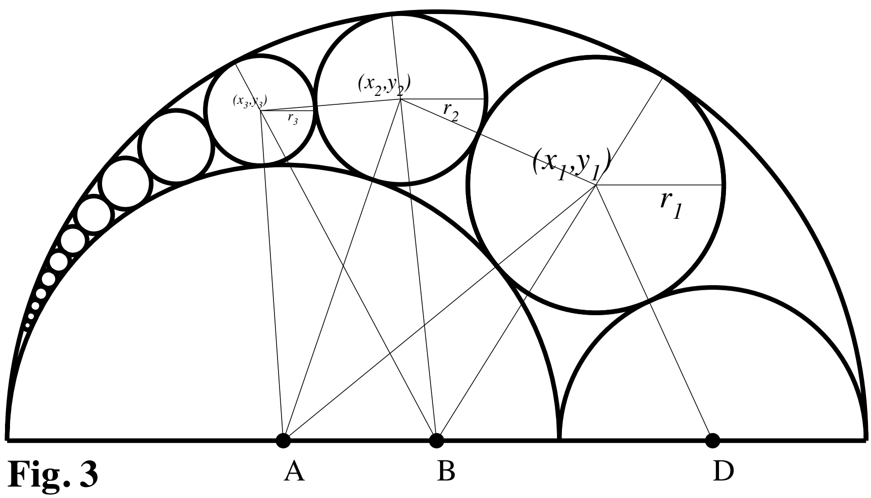

Fig. 3

(x_n, y_n) betegner koordinatene for sentrene i småsirklene, med sentrum B$=(0,0)$ for største halvsirkel. Noterer at A$=(-a,0)$.

Vi får disse generelle ligningene:

1) $$x_n^2+y_n^2=(c-r_n)^2 n=1,2,3,\ldots$$

2) $$(x_n+a)^2+y_n^2=(b+r_n)^2$$

Disse ligningene gir y_n^2 og x_n uttrykt ved r_n:

3) $$y_n^2 = 4bcr_n(a - r_n)/a^2$$

4) $$x_n = r_n(b + c)/a - c$$

Bruker vi Pappos´ resultat at

5) $$y_n = 2nr_n$$

på ligningene og formlene, får vi:

6) $$r_n = abc/((na)^2 + bc)$$

7) $$y_n = 2nabc/((na)^2 + bc)$$

For å vise Pappos trenger vi ytterligere geometrisk informasjon. Vi ser da på de rettvinklede trekantene med hypotenus fra sentrum i den ene småsirkelen til sentrum i den neste.

Hypotenus: $r_n + r_{n+1}$

Vertikal katet: $y_n - y_{n+1}$

Horisontal katet: Ved å bruke formel 4 finner vi at denne blir:

$$(r_n - r_{n+1})(b + c)/a$$

Da får vi følgende ligning for disse trekantene:

8) $$[(r_n - r_{n+1})(b + c)/a]^2 + (y_n - y_{n+1})^2 = (r_n + r_{n+1})^2$$

Kan så vise Pappos´ resultat ved induksjon. Setter n=1 i formlene 6 og 7:

$$r_1 = abc/((1a)^2 + bc) = abc/(a^2 + bc) = r$$

OK, se 1c.

$$y_1 = 2 \times 1abc/((1a)^2 + bc) = 2abc/(a^2 + bc) = y$$

OK, se 1c.
Antar at

$$r_n = abc/((na)^2 + bc) \text{ og } y_n = 2nabc/((na)^2 + bc).$$

Må vise at $r_{n+1} = abc/[((n + 1)a)^2 + bc]$ og $y_{n+1} = 2(n + 1)abc/[((n + 1)a)^2 + bc]$. Bruker ligning 8 og setter inn for y_{n+1}^2, r_n og y_n (formlene 3, 6 og 7) og med en del regning får vi:

9) $$y_{n+1} = [abc + ((n^2 - 1)a^2 - bc)r_{n+1}]/na^2$$

Kvadrerer: $y_{n+1}^2 = \left([abc + ((n^2 - 1)a^2 - bc)r_{n+1}]/na^2\right)^2$.
Bruker formel 3 igjen, og får:

$$[4bcr_{n+1}(a - r_{n+1})]/a^2 = \{[abc + ((n^2 - 1)a^2 - bc)r_{n+1}]/na^2\}^2$$

Noe regning og denne annengradsligningen dukker opp:

$$[(n^2-1)^2a^4+2(n^2+1)a^2bc+(bc)^2]r_{n+1}^2$$
$$-2abc[(n^2+1)a^2+bc]r_{n+1}+(abc)^2=0$$

med løsningene:

11) $$r_{n-1}=[abc(((n+1)a)^2+bc)]/[((n+1)a)^2+bc][((n-1)a)^2+bc]$$
$$=abc/[((n-1)a)^2+bc]$$

12) $$r_{n+1}=[abc(((n-1)a)^2+bc)]/[((n+1)a)^2+bc][((n-1)a)^2+bc]$$
$$=abc/[((n+1)a)^2+bc]$$

Vi får både foranliggende og bakenforliggende sirklers radier som svar siden ligning 8 er symmetrisk. Bør for ordens skyld sjekke om formlene 6 og 7 stemmer for r_0 og y_0.

$$r_0=abc/((0\times a)^2+bc)=a, y_0=2\times 0\times abc/((0\times a)^2+bc)=0$$

Dette stemmer siden det er den minste halvsirkelen. Setter til slutt 12 inn i 9 med følgende resultat:

$$y_{n+1}=2(n+1)abc/[((n+1)a)^2+bc]=2(n+1)r_{n+1}$$

Anser dermed Pappos´ resultat for bevist.