 Normat **56**:1, 24–33 (2008)

Formler for π fra femtenhundretallets Kerala

Paul Papatzacos

Institutt for matematikk og naturvitenskap, UiS
NO–4036 Stavanger
paul.papatzacos@uis.no

1 Introduksjon

I 1915 skrev G. R. Kaye [8] at “after the time of Bhaskara (born 1114) no Indian mathematical work of historical value or interest is known”, og påstanden har ført til en del historiske arbeider fra indiske forskere. Se Thrivikraman [15] for en kartlegging av mulige indiske bidrag fra middelalderen, for eksempel innen tallteori og logikk, og en beskrivelse av vanskelighetene som er forbundet med autentifiserings- og dateringsarbeidet.

Vi skal her se på et bidrag fra femtenhundretallets Kerala (Sørvestindia) innen rekkerepresentasjon av π, der det er alminnelig enighet om dokumentenes opphav og datering [7, 9].

Åtti år før publikasjonen av Kayes bok, altså i 1835, skrev Charles W. Whish en artikkel der tittelen begynner med “On the Hindu Quadrature of the Circle” [16], hvor han omtaler fire verk, skrevet i sanskrit og i malayalam (keralesisk). Han daterte to av de fire verk til senere enn 1730, men han mente at de to andre var betydelig eldre, noe som har blitt bekreftet siden [9, 11, 12, 14]. Det fremgår av artikkelen at rekkene for sinus, cosinus og arctangens, samt Leibnizrekken for π ble utledet av keralesiske matematikere et par hundre år før Gregory, Newton, og Leibniz gjorde disse rekkene kjent i Europa. Det later også til at de kjente til en form for konvergensakselerasjon lenge før Euler brukte den i 1755, noe som Whish dokumenterte med flere hurtigkonvergerende rekker for π.

Tittel, omtrentlig dato, og forfatter, for de to eldste verkene er som følger:

- *Tantrasangraha* (1500) av Nilakantha (1445–1545),
- *Yuktibhasa* (1600) av Jyesthadeva (1530–1610).

Lite er kjent om Whish, bortsett fra at han var “of the Hon. East India Company’s Civil Service in the Madras Establishment” [11]. Han døde trolig i 1836 [11] og artikkelen hans (som åpenbart ikke ble lest av Kaye) blir ikke nevnt før i 1940-årene da Rajakopal og medarbeidere begynte å skrive om keralesisk matematikk fra middelalderen [11, 12, 13]. I 1977 [12] omtaler Rajagopal og Rangachari et verk som Whish ikke hadde hatt kjennskap til,

- *Tantrasangraha-vyakhya* (1530) av ukjent forfatter.

Nilakanthas *Tantrasangraha* (senere i denne artikkelen omtalt som T) er en katalog av resultater som gis uten bevis. De to andre verkene, *Yuktibhasa* (nedenfor omtalt som Y) og *Tantrasangraha-vyakhya* (nedenfor omtalt som TV) tar opp teoremene i T og gir bevisene. Nilakantha, Jyesthadeva, og forfatteren av TV krediterer en tidligere keralesisk matematiker ved navn Madhava (1340–1425) for resultatene som siteres og diskuteres. Ingen matematiske verk av Medhava finnes, og det er litt uklart om han krediteres for alt som står i T, Y, og TV eller bare for noen av formlene: se for eksempel referanse [12].

Vi skal i seksjon 2 se på de første formlene for π som ble utledet i Europa, spesielt på sekstenhundretallet. Så ser vi, i seksjon 3, på den tidlige oppdagelsen av Leibnizrekken i Kerala, og på de arbeidene som ble gjort for å forbedre dens konvergens. (Disse arbeidene er trolig, historisk sett, de første eksempler på konvergensakselerasjon). Vi avslutter, i seksjon 4, med å se på noen andre bidrag fra Kerala til historien om π.

2 De første europeiske formler for π

Disse er som følger.

- Viète (1593):

$$\pi = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots}. \tag{1}$$

- Wallis (1656):

$$\frac{2}{\pi} = \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 2}\right)\left(\frac{3\cdot 5}{4\cdot 4}\right)\left(\frac{5\cdot 7}{6\cdot 6}\right)\left(\frac{7\cdot 9}{8\cdot 8}\right)\cdots. \tag{2}$$

- Brouncker (1656):

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \frac{1^2}{2+}\,\frac{3^2}{2+}\,\frac{5^2}{2+}\cdots. \tag{3}$$

- Gregory (1671), Leibniz (1674):

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots. \tag{4}$$

Denne siste rekken er en konsekvens av

$$\theta = \tan\theta - \frac{\tan^3\theta}{3} + \frac{\tan^5\theta}{5} - \frac{\tan^7\theta}{7} + \ldots, \quad (|x| \le 1), \tag{5}$$

som Gregory og Leibniz utledet uavhengig av hverandre. I dag kalles (4) Leibnizrekken og (5) Gregoryrekken.

Viète utledet formel (1) ved å bruke en variant av Arkimedesalgoritmen (se artikkel 9 i [2]) og denne formelen står kanskje derfor i en klasse for seg, mens de tre formlene som fulgte kronologisk er ekvivalente, som vi skal se.

Wallis utledet formel (2) like etter 1650 ved å anvende den nye analytiske metoden som integralregningen da var (se artiklene 10 og 11 i [2]). Euler [4] skriver at Wallis viste formelen til Brouncker, som omformet den til kjedebrøken (3). Wallis la frem utledningen av formel (2) i sin bok *Arithmetica Infinitorum* (1656) der han også oppgir formel (3), men uten Brounckers utledning. Det finnes moderne bevis på at formlene (2) og (3) er ekvivalente (se Dutka [3]), men Brounckers utledning forblir et lite mysterium. Ekvivalensen av alle tre rekkene ble stadfestet da Euler [5] utledet Brounckers kjedebrøk fra Leibnizrekken. (Se også seksjon 4 nedenfor.)

Gregoryrekken brukes fremdeles til å beregne π [2] ved en generalisering av en ide som først ble anvendt av Sharp i 1699: Han satte $\tan\theta = 1/\sqrt{3}$ i Gregoryrekken og fikk

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[1 - \frac{1}{3\cdot 3} + \frac{1}{3^2\cdot 5} - \frac{1}{3^3\cdot 7} + \dots\right]. \tag{6}$$

Konvergensegenskapene til denne gjorde det mulig for Sharp å oppnå 71 riktige desimaler for π.

Leibnizrekken er ubrukelig til å beregne π, men har gitt opphav til tallrike varianter, altså formler for π med betydelig bedre konvergensegenskaper. En av de første europeiske variantene skyldes Euler [6] som skrev formel (4) om til

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{7}\right) + \dots$$

som kan skrives

$$\frac{\pi - 2}{4} = \frac{1}{2^2 - 1} - \frac{1}{4^2 - 1} + \frac{1}{6^2 - 1} - \dots . \tag{7}$$

3 Leibnizrekken i keralesisk matematikk

La oss nå se på formlene for π som ble utledet i Kerala rundt år 1500 (og kanskje av Madhava hundre år tidligere for noen av dem). Det er vist i referansene [11, 12, 13] at Leibnizrekken og Sharprekken var kjente i Kerala et par hundre år før de ble kjent i Europa. Det er også klart at mye ble satset på å forbedre den dårlige konvergensen til Leibnizrekken, noe som resulterte i to typer formler: Endelige og uendelige rekker. Spesielt de uendelige rekkene er et tidlig eksempel på konvergensakselerasjon.

Innledningsvis kan det være nyttig å minne leseren om at formlene som følger er omskrivninger i moderne form, siden: (i) symbolet π ble innført i Europa like etter 1700, mens man, i Kerala, skrev om “forholdet mellom omkretsen og diameteren til en sirkel”; (ii) formlene i tidlig indisk matematikk er beskrivelser i versform, eksempelvis er en omtrentlig oversettelse av versene som beskriver Leibnizrekken: "Multipliser diameteren med fire; trekk fra det og legg til det, på alternerende vis, kvosientene som fås ved å dele fire ganger diameteren med tallene 3, 5, 7, og så videre" [11].

Nilakanthas verk (T) ser ut til å være en samling av praktiske formler til å beregne π med en viss akseptabel nøyaktighet. Han oppgir ikke selve Leibnizrekken, men han oppgir approksimasjoner til π, der hver approksimasjon er i form av en delsum av Leibnizrekken med en korreksjon. I T og Y finnes tre korreksjoner, betegnet nedenfor f_r $(r = 1, 2, 3)$. De tilhørende π-approksimasjonene er betegnet med $\pi_r(m)$:

$$\frac{\pi_r(m)}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{1}{2m-1} + (-1)^m f_r(2m) \tag{8}$$

$$f_1(n) = \frac{1}{2n}, \qquad f_2(n) = \frac{n}{2(n^2+1)}, \qquad f_3(n) = \frac{n^2+4}{2n(n^2+5)}. \tag{9}$$

Korreksjonen f_r blir bedre ettersom indeksen r øker. Tabellen nedenfor viser hva som kan oppnås med formlene (8) og (9).

m	$\pi_1(m)$	$\pi_2(m)$	$\pi_3(m)$
4	3.14...	3.141...	3.141...
8	3.14...	3.1415...	3.141592...
12	3.141...	3.14159...	3.1415926...
16	3.141...	3.141592...	3.14159265...

Bare de korrekte desimalene er tatt med. Den minst effektive korreksjonen, f_1, er ikke tatt med i T. Den er med i Y "men bare som et steg i argumentet som fører til f_2" [12].

Utledningen av det vi kaller Leibnizrekken finnes i Y, og går ut på å beregne buelengden til en åttedels omkrets ved å tilnærme buen med en sum av små rette linjesegmenter: se referansene [9, 11, 14] for detaljene. Utledningen kan lett gjennomføres på buelengden av en tolvtedels omkrets og resulterer i Sharps rekke (6), som også er med i T. En videre generalisering som fører til Gregoryrekken finnes i TV og i Y [12, 13], slik at Leibniz-, Sharp- og Gregory-rekkene var kjent i Kerala omtrent 150 år før de ble kjent i Europa. At Nilakantha selv kjente til Gregoryrekken er mindre sikkert. I følge referanse [11] er ikke denne rekken med i T. At Sharps rekke er det, kan forklares med at Nilakantha eller en forgjenger utledet Leibnizrekken og Sharprekken hver for seg.

La oss nå komme tilbake til korreksjonene f_1, f_2, f_3. En har ikke funnet noe, i de originale verkene, som forklarer hvordan disse korreksjonene ble oppdaget. Følgende kan oppfattes som en elegant spekulasjon.

3.1 Nilakanthas korreksjoner

I 1944 foreslo Mukunda Marar og Rajagopal [11] at f_1, f_2, f_3 er suksessive konvergente av en og samme kjedebrøk, uten at de oppga selve kjedebrøkens uttrykk. Dette ble gitt av Rajagopal og Rangachari trettitre år senere [12], uten utledning, men med takk til D. T. Whiteside (redaktøren av Newtons matematiske arbeider fra 1967 til 1981). Utledningen publiserte de ni år etter det igjen [13].

Bruken av kjedebrøk kan virke anakronistisk, siden kjedebrøkenes historie før sekstenhundretallet er usikker, men kan ses på som en kortfattet uttrykksmåte som bevarer hovedpoenget.

Detaljene i Mukunda Marars og Rajagopals forslag er som følger. Leibnizrekken kan skrives

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \ldots + (-1)^{m-1}\frac{1}{2m-1} + (-1)^m f(2m), \tag{10}$$

der, ved å sette $2m = n$ (og dermed anta at n er jamn),

$$f(n) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3} + \ldots + (-1)^{k-1}\frac{1}{n+2k-1} + \ldots. \tag{11}$$

Det som kunne kalles Whitesides teorem er påstanden om at

$$f(n) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n+}\,\frac{1^2}{n+}\,\frac{2^2}{n+}\,\frac{3^2}{n+}\cdots\ . \tag{12}$$

Nilakanthas korreksjon f_r er nå ganske enkelt den r'te konvergenten til denne kjedebrøken:

$$f_1(n) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n}, \qquad f_2(n) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n+}\,\frac{1^2}{n}, \qquad f_3(n) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{n+}\,\frac{1^2}{n+}\,\frac{2^2}{n}.$$

Kjedebrøken (12) finnes ikke i de kjente originale tekstene, og Rajagopal *et al.* [11] antyder at teksten i Y leder en til å tro at konvergentene ble funnet ved hjelp av en prøve-og-feile metode. Roy [14] på sin side skriver at Nilakantha brukte "some procedure". Vi ser nedenfor på et bevis for Whitesides teorem som inneholder en mulig slik prosedyre.

Vi nevner først at likheten mellom rekken (11) og kjedebrøken (12) er et spesialtilfelle av en likhet som ble bevist av Pigulla [10] (i 2004, se også Almkvist [1]). Pigullas bevis er rimeligvis mer analytisk krevende enn beviset for det spesialtilfelle som vi ovenfor har kalt "Whitesides teorem" behøver å være. Dette beviset (som er direkte inspirert av diskusjonene i [11] og [13]) utføres nå ved induksjon.

Formel (11) gir

$$f(n+1) + f(n-1) = \frac{1}{n}. \tag{13}$$

Vi ser nå på en løsning av denne likningen i form av en kjedebrøk som konvergerer raskt for store n-verdier.

For $n \gg 1$ viser likning (13) at $f(n) \approx 1/(2n) = f_1(n)$. Vi har altså fått Nilakanthas første korreksjon. Vi setter nå

$$f(n) = \frac{1}{2\phi_1(n)} \tag{14}$$

der $\phi_1(n) \approx n$ for $n \gg 1$. Likningene (13) og (14) fører til

$$2\phi_1(n+1)\phi_1(n-1) - n\phi_1(n+1) - n\phi_1(n-1) = 0. \tag{15}$$

Vi antar $n \gg 1$, søker ϕ_1 av formen

$$\phi_1(n) = n + a + b/n + O(1/n^2),$$

og bestemmer a og b ved innsetting i (15). Vi finner at

$$\phi_1(n) = n + \frac{1}{n} + \dots \ . \tag{16}$$

Antar vi nå at ϕ_1 er eksakt lik summen av de to første leddene, får vi fra (14)

$$f(n) \approx \frac{1}{2(n + \frac{1}{n})},$$

som er Nilakanthas f_2. Hans f_3 er neste ledd i rekursjonen, som finnes ved å sette $\phi_1(n) = n + 1/\phi_2(n)$. Vi utelater detaljene som leder til f_3 og avslutter induksjonsbeviset: Likning

$$2\phi_k(n+1)\phi_k(n-1) - (n+2k-2)\phi_k(n+1) - (n-2k+2)\phi_k(n-1) - 2(k-1)^2 = 0, \tag{17}$$

reduseres til likning (15) for $k = 1$, og det kan sjekkes at

$$\phi_k(n) = n + k^2/n + O(1/n^2),$$

som reduseres til formel (16) for $k = 1$, er løsningen til likning (17) for $n \gg 1$. Det kan også sjekkes at

$$\phi_k(n) = n + \frac{k^2}{\phi_{k+1}(n)}, \tag{18}$$

innsatt i likning (17), fører til den samme likningen, altså (17), men med k erstattet med $k+1$. Formlene (14) og (18) medfører da formel (12).

Som vi ser, er det ikke nødvendig å anta at Nilakantha kjente til formel (12), bare at han kunne løse likning (13) med suksessive approksimasjoner for store n-verdier.

3.2 Keralesisk konvergensakselerasjon

I verkene T, Y, og TV, er hver endelig rekke av typen (8) forbundet med en ekvivalent uendelig rekke for π som konvergerer raskere enn Leibnizrekken. Altså til f_1, f_2, f_3 korresponderer, henholdsvis

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} + \frac{1}{3^3 - 3} - \frac{1}{5^3 - 5} + \dots \tag{19}$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{4}{1^5 + 4 \cdot 1} - \frac{4}{3^5 + 4 \cdot 3} + \frac{4}{5^5 + 4 \cdot 5} + \dots \tag{20}$$

$$\frac{\pi}{4} = \frac{7}{9} + 36 \sum_{\substack{m=1 \\ (n=2m+1)}}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{1}{(n^3 - n)[(n-1)^2 + 5][(n+1)^2 + 5]}. \tag{21}$$

(De to første er i T, ikke den tredje.) Overgangen fra endelig rekke med korreksjon til uendelig akselerert rekke er presentert i [11] og beskrevet der som en generalisering av en utledning som finnes i Y. Det som følger er en mild generalisering av utledningen i [11]. La S være summen til en konvergent alternerende rekke

$$S = a_1 - a_3 + \ldots + (-1)^{k-1} a_{2k-1} + \ldots \tag{22}$$

(vi kaller den a-rekken) der a_n har samme fortegn for alle n. La $S(m)$ være en delsum med m ledd og et korreksjonsledd:

$$S(m) = a_1 - a_3 + \ldots + (-1)^{m-1} a_{2m-1} + (-1)^m F(2m). \tag{23}$$

Vi antar at det finnes en annen alternerende rekke med sum S

$$S = u_1 - u_3 + \ldots + (-1)^{k-1} u_{2k-1} + \ldots \tag{24}$$

(vi kaller den u-rekken), som konvergerer raskere enn a-rekken. Gitt m vilkårlig forlanger vi nå at en delsum med m ledd av u-rekken summerer til $S(m)$:

$$u_1 - u_3 + \ldots + (-1)^{m-1} u_{2m-1} = a_1 - a_3 + \ldots + (-1)^{m-1} a_{2m-1} + (-1)^m F(2m).$$

Ved å skrive denne likheten først for $m = 1$ og så for to suksessive m-verdier, får vi

$$u_1 = a_1 - F(2), \tag{25}$$

$$u_n = a_n - F(n+1) - F(n-1), \quad (n = 2m-1, m \geq 2). \tag{26}$$

Bruken av Nilakanthas f_1 i stedet for F i disse likningene gir

$$u_1 = \frac{3}{4}, \qquad u_{2m-1} = \frac{-1}{(2m-1)^3 - (2m-1)}, \tag{27}$$

som resulterer i formel (19). Det er lett å se at bruken av f_2 og f_3 i stedet for F resulterer i formlene (20) og (21).

Det er interessant å konstatere at det finnes en alternativ følge med korreksjoner, $\{g_r\}$, som er (sett med våre øyne) lettere å beregne enn følgen $\{f_r\}$. Formel (26) viser at, for at u-rekken skal konvergere fortere enn a-rekken, er det tilstrekkelig å velge $F(n) = a_n/2$, siden høyresiden er tilnærmet lik $a_n - 2F(n)$ for $n \gg 1$. Med $a_n = 1/n$ får vi $F = g_1 = 1/(2n) = f_1$. Vi skal snart se at $g_i \neq f_i$ for $i > 1$. Med $F = g_1$ får vi (19) som den første akselererte rekken. Denne kan skrives

$$\frac{\pi - 7}{4} = -1 + \sum_{\substack{m=1 \\ (n=2m+1)}}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{1}{n^3 - n} \tag{28}$$

som også er alternerende og kan akselereres med metoden ovenfor. Her får vi $F = -1/(2n^3)$ og likningene (25) og (26) fører nå til

$$\frac{\pi}{4} = \frac{13}{16} - \sum_{\substack{m=1 \\ (n=2m+1)}}^{\infty} (-1)^{m-1} \frac{5n^2 - 1}{n(n^2 - 1)^3}. \tag{29}$$

Denne rekken konvergerer som $1/n^5$, altså like raskt som Nilakanthas rekke (20), men har neppe den samme estetiske appellen. Vi kan utføre akselerasjonen direkte fra Leibnizrekken til rekken (29) ved å legge sammen de to F'ene og få

$$g_2 = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^3} \neq f_2.$$

Vi kan nå fortsette å akselerere suksessivt, og vi finner at neste korreksjon er

$$g_3 = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2n^3} + \frac{5}{2n^5} \neq f_3.$$

Som ellers i en historisk beretning er det ofte vanskelig å fastsette hva som faktisk skjedde, men det er atskillig vanskeligere å forstå hvorfor noe ikke skjedde.

4 Noen relaterte fakta av interesse

Det er verdt å minne om at Euler [5], etter å ha vist hvordan en kan gå fra en rekke til en kjedebrøk og omvendt, brukte rekken (11) som et eksempel, og utledet

$$f(n) = \frac{1}{n+1+}\,\frac{(n+1)^2}{2+}\,\frac{(n+3)^2}{2+}\,\frac{(n+5)^2}{2+}\cdots\,.$$

Det er lett å se at konvergent nummer r til denne kjedebrøken er delsummen med r ledd til rekken (11).

Definisjonen (11) fører til at $f(0) = \pi/4$ slik at Eulers kjedebrøk leder umiddelbart til Brounckers formel. Whitesides $f(n)$ er ikke definert for $n = 0$, men siden $\pi/4 = 1 - f(2)$ kan vi bruke (12) til å skrive en kjedebrøk som er en variant av Brounckers [12], nemlig

$$\frac{4-\pi}{2} = \frac{1}{2+}\,\frac{1^2}{2+}\,\frac{2^2}{2+}\cdots\,.$$

Både Sharps formel (6) og Eulers formel (7) oppgis i T.

La oss se nærmere på et bidrag som finnes i TV, nemlig Eulers formel med korreksjonsledd [13]. Analogt med formel (8), skriver vi om formel (7) som følger:

$$\frac{\pi_r(m) - 2}{4} = \sum_{\substack{k=1\\(\ell=2k)}}^{m} (-1)^{k-1}\frac{1}{\ell^2-1} + (-1)^m h_r(2m) \tag{30}$$

Forfatteren av TV har her bare oppgitt én korreksjon, nemlig $1/(2(n^2+2))$. Vi viser nedenfor at dette er lik h_2, ved å anvende den samme prosedyren som ledet til f_2.

Eulers formel (7) kan skrives

$$\frac{\pi - 2}{4} = \sum_{\substack{k=1\\(\ell=2k)}}^{m} (-1)^{k-1}\frac{1}{\ell^2-1} + (-1)^m h(2m)$$

der

$$h(n) = \frac{1}{(n+1)^2 - 1} - \frac{1}{(n+3)^2 - 1} + \dots$$

og vi ser at

$$h(n+1) + h(n-1) = \frac{1}{n^2 - 1}. \tag{31}$$

For $n \gg 1$ får vi $h(n) \approx 1/(2n^2) = h_1(n)$. Vi setter

$$h(n) = \frac{1}{2n\gamma_1(n)} \tag{32}$$

i likning (31) og får

$$2\gamma_1(n+1)\gamma_1(n-1) - (n+1)\gamma_1(n+1) - (n-1)\gamma_1(n-1) = 0.$$

Funksjonen som tilfredsstiller denne likningen for $n \gg 1$ er

$$\gamma_1(n) = n + \frac{2}{n} + \dots\ .$$

Vi antar nå at γ_1 er eksakt lik summen av de to første leddene, setter inn i formel (32), og får $h \approx h_2$ der

$$h_2 = \frac{1}{2(n^2 + 2)}.$$

Dette er uttrykket som forfatteren til TV oppgir som eneste korreksjon i (30). En uendelig kjedebrøk for h finnes også, se [13].

La oss nevne til slutt at Nilakantha var overbevist om at π er irrasjonal. I et verk der tittelen er forkortet ti *Aryabhatiya* [11, 14] skriver han at forholdet mellom omkretsen og diameteren aldri kan skrives som forholdet mellom to naturlige tall.

Referanser

[1] G. Almkvist: "Pigullas fantastiska formel för π", Elementa.

[2] L. Berggren, J. Borwein, and P. Borwein: *Pi: A Source Book*, Third edition, Springer, 2004.

[3] J. Dutka: "Wallis's Product, Brouncker's Continued Fraction, and Leibniz's Series", *Archive for History of Exact Sciences*, **26**, 115–126, 1982.

[4] L. Euler: "An Essay on continued fractions", eller "De Fractionibus Continuis Dissertatio (1737)" oversatt av M. F. Wyman and B. F. Wyman, *Math. Systems Theory*, **18**, 295–328, 1985.

[5] L. Euler: *Introduction to Analysis of the Infinite*, eller *Introductio in Analysin Infinitorum (1748)* oversatt av J. D. Blanton, Springer-Verlag, 1988.

[6] L. Euler: *Institutiones Calculi Differentialis*, 1755

[7] A. P. Jushkevich: *Geschichte der Matematik im Mittelalter*, Leipzig, 1964.

[8] G. R. Kaye: *Indian Mathematics*, Calcutta, 1915.

[9] V. J. Katz: *A History of Mathematics, An Introduction, Second Edition*, Addison Wesley Longman, 1998.

[10] W. Pigulla: "Konvergenzbeschleunigung mit Hilfe von Kettenbrüchen, *Elem. Math.*, **59**, 58–64, 2004.

[11] K. Mukunda Marar and C. T. Rajagopal: "On the hindu Quadrature of the Circle", *Journal of the Bombay Branch of the Royal Asiatic Society*, **20**, 65–82, 1944.

[12] C. T. Rajagopal and M. S. Rangachari: "On an Untapped Source of Medieval Keralese Mathematics", *Archive for History of Exact Sciences*, **18**, 89–102, 1977.

[13] C. T. Rajagopal and M. S. Rangachari: "On Medieval Kerala Mathematics", *Archive for History of Exact Sciences*, **35**, 91–99, 1986.

[14] R. Roy: "The Discovery of the Series Formula for π by Leibniz, Gregory and Nilakantha", *Mathematics Magazine*, **63**, 291–306, 1990. Se også [2, artikkel 14].

[15] T: Thrivikraman: "On the contribution of Kerala Mathematics in the late medieval and early modern periods", *The Mathematics Student*, **53**, 204–208, 1985.

[16] C. M. Whish: "On the Hindu Quadrature of the Circle, and the infinite series of the proportion of the circumference to the diameter exhibited in the four Sastras, the Tantrasangraham, Yucti-Bhasa, Carana Padhati and Sadratnamala", *Transactions of the Royal Asiatic Society of Great Britain and Ireland*, **3**, 509–523, 1835.