Normat **56**:1, 34–40 (2008)

Uppgifter

502. Visa för $n \geq 2$ identiteten

$$\prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \cos \frac{2k\pi}{n}\right) = \frac{n^2}{2^{n-1}}.$$

503. I en schackklubb har man inlett årets klubbmästerskap, där n spelare deltar. Under den första dagen har man hunnit spela m matcher (alla ska spela mot alla, men ingen möter någon annan spelare mer än en gång). Om man väljer ut tre spelare, vilka som helst, är det åtminstone två av dem som ännu inte har mötts. För varje spelare A betecknar vi gruppen av kommande motståndare med M_A, som alltså består av alla de spelare som A ännu inte har mött. Låt r_A vara antalet matcher som har spelats inbördes i gruppen M_A. Visa att det måste finnas en spelare A, för vilken $r_A \leq m\left(1 - \frac{4m}{n^2}\right)$. Vad kan därmed sägas om möjliga värden på m?

504. Låt x, y, z vara positiva reella tal. Visa att

$$\frac{x}{\sqrt{x+y}} + \frac{y}{\sqrt{y+z}} + \frac{z}{\sqrt{z+x}} \geq \frac{5}{4}\sqrt{x+y+z}.$$

505. Låt M vara en konvex månghörning med n sidor. Om a_k betecknar längden av den k :e sidan och d_k längden av den vinkelräta projektionen av M på linjen som innehåller den k :e sidan, visa att

$$2 < \frac{a_1}{d_1} + \frac{a_2}{d_2} + \cdots + \frac{a_n}{d_n} \leq 4.$$

506. *(Kent Holing, Trondheim)* La $Q(x)$ være et redusibel monisk femtegradspolynom med heltallskoeffisienter, uten heltallige nullpunkter, og med $p(x)$ og $q(x)$ som to forskjellige ekte og moniske faktorer av $Q(x)$ over $\mathbf{Z}[x]$.

Med x_1 og x_2 røttene til (si) andregradsligningen $p(x) = 0$, og x_3, x_4 og x_5 røttene til (derfor) tredjegradsligningen $q(x) = 0$, definerer vi $y_1 = x_1 + x_3$, $y_2 = x_1 + x_4$, $y_3 = x_1 + x_5$, $y_4 = x_2 + x3$, $y_5 = x_2 + x_4$ og $y_6 = x_2 + x_5$.

Vis at polynomet $R(y) = (y-y_1)(y-y_2)(y-y_3)(y-y_4)(y-y_5)(y-y_6)$ faktoriserer fullstendig over $Q[r]$ for r vilkårlig rot til ligningen $R(y) = 0$ hvis og bare hvis diskriminanten til $Q(x)$ eller $q(x)$ er et kvadrattall.

Lösningar skickas senast 15 augusti 2008 till:
Dag Jonsson, dag@math.uu.se
Box 480
Matematiska institutionen
SE-75106 Uppsala

Insända lösningar till uppgifterna 474-490, 494 – 496

474. *(Johan Fellman, Helsingfors)* Grundidén för denna uppgift är att serien $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + ...$ har summan $\ln(2)$. Uppgiften beskriver hur delseriernas summor konvergerar mot den oändliga seriens summa.
Betrakta den ändliga serien

$$S_n(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + ... + (-1)^{n-1}x^{n-1} = \frac{1 + (-1)^{n-1}x^n}{1+x}.$$

Genom integrering får man

$$\int_0^x S_n(t)dt = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + ... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n = \int_0^x \frac{1 + (-1)^{n-1}t^n}{1+t}dt.$$

För alla ändliga n är

$$\begin{aligned} a_n &= \int_0^1 S_n(t)dt - \ln(2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + -... + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} - \ln(2) \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+t}dt + (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt - \ln(2) = (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt. \end{aligned}$$

Tecknen hos termerna a_n är alternerande och $|a_{n+1}| = \int_0^1 \frac{t^{n+1}}{1+t}dt \leq \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt = |a_n|$. Dessutom är $|a_n| = \int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt \leq \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1} \to 0$ då $n \to \infty$. Följaktligen är termernas absoluta belopp monotont avtagande mot noll och serien $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ konvergerar. För ändliga n är summan

$$\begin{aligned} T_n &= \sum_{i=1}^n a_i = \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\int_0^1 \frac{t^i}{1+t}dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}\frac{t^i}{1+t}dt \\ &= \int_0^1 \Big(\frac{1}{1+t}\sum_{i=1}^n (-1)^{i-1}t^i\Big)dt = \int_0^1 \frac{t + (-1)^{n-1}t^{n+1}}{(1+t)^2}dt \\ &= \int_0^1 \frac{tdt}{(1+t)^2} + (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}dt \\ &= \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)} - \int_0^1 \frac{dt}{(1+t)^2} + (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}dt \\ &= \ln(2) - \frac{1}{2} + (-1)^{n-1}\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}dt. \end{aligned}$$

Integralen $\int_0^1 \frac{t^{n+1}}{(1+t)^2}dt \leq \int_0^1 t^{n+1}dt = \frac{1}{n+2} \to 0$ då $n \to \infty$ och vi får $\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n\to\infty} T_n = \ln(2) - \frac{1}{2}$.

490. *(Ebbe Thue Poulsen, Mårslet)* Lad os sætte

$$q_{nk} = \frac{\ln^2 n}{\ln k \ln(n-k)}\,, \quad s_n = \sum_{k=2}^{n-2} q_{nk}\,, \quad \text{og} \quad a_n = \frac{1}{n}s_n\,.$$

Jeg vil vise, at

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 1\,. \tag{1}$$

(i) Der gælder $q_{nk} > 1$ for $2 \le k \le n-2$, og altså er

$$a_n > \frac{n-3}{n} \quad \text{for alle} \ \ n\,. \tag{2}$$

(ii) Da $q_{nn-k} = q_{nk}$ for alle n, k, er

$$s_n \le 2\sum_{k=2}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} q_{nk}\,,$$

hvor $\lfloor \frac{n}{2}\rfloor$ betegner heltalsdelen af $\frac{n}{2}$. For $k \le \lfloor \frac{n}{2}\rfloor$ er $n-k \ge \frac{n}{2}$, og altså er

$$s_n \le 2\sum_{k=2}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \frac{\ln^2 n}{\ln k \ln \frac{n}{2}} = 2\frac{\ln^2 n}{\ln \frac{n}{2}} \sum_{k=2}^{\lfloor \frac{n}{2}\rfloor} \frac{1}{\ln k} \tag{3}$$

Da funktionen $f(x) = \dfrac{1}{\ln x}$ er aftagende for $x > 1$, får vi for $2 < M \le m$

$$\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{\ln k} \le \sum_{k=2}^{M-1} \frac{1}{\ln k} + \int_{M-1}^{m} \frac{1}{\ln x}\,dx \tag{4}$$

Integralet i (4) kan ikke udtrykkes ved hjælp af elementære funktioner, men ved delvis integration får vi

$$\int 1\,\frac{1}{\ln x}\,dx = x\frac{1}{\ln x} - \int x\left(-\frac{1}{\ln^2 x}\frac{1}{x}\right)dx = \frac{x}{\ln x} + \int \frac{1}{\ln^2 x}\,dx\,.$$

Lad nu $\varepsilon \in (0,1)$ være givet, og lad M være bestemt, så $\ln(M-1) \ge 1/\varepsilon$ (så gælder specielt $M-1 > e$). Vi får da

$$\begin{aligned}\int_{M-1}^{m} \frac{1}{\ln x}\,dx &= \frac{m}{\ln m} - \frac{M-1}{\ln(M-1)} + \int_{M-1}^{m} \frac{1}{\ln^2 x}\,dx\\ &\le \frac{m}{\ln m} - \frac{M-1}{\ln(M-1)} + \int_{M-1}^{m} \frac{\varepsilon}{\ln x}\,dx\,,\end{aligned}$$

og altså

$$\int_{M-1}^{m} \frac{1}{\ln x}\,dx \le \frac{1}{1-\varepsilon}\left(\frac{m}{\ln m} - \frac{M-1}{\ln(M-1)}\right) \tag{5}$$

Højre side af (5) er en voksende funktion af m for $m > e$, og da $M-1 > e$ og $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \le \frac{n}{2}$, får vi af (3), (4) og (5) for $n \ge 2(M-1)$:

$$\begin{aligned} a_n &\le \frac{2}{n}\frac{\ln^2 n}{\ln \frac{n}{2}}\left(\sum_{k=2}^{M-1}\frac{1}{\ln k} + \frac{n}{2(1-\varepsilon)\ln\frac{n}{2}} - \frac{M-1}{(1-\varepsilon)\ln(M-1)}\right) \\ &= \frac{1}{(1-\varepsilon)(1-\ln 2/\ln n)^2} + \epsilon_n\,, \end{aligned} \tag{6}$$

hvor

$$\epsilon_n = \frac{2}{n}\frac{\ln^2 n}{\ln\frac{n}{2}}\left(\sum_{k=2}^{M-1}\frac{1}{\ln k} - \frac{M-1}{(1-\varepsilon)\ln(M-1)}\right) \to 0 \quad \text{for} \quad n \to \infty\,.$$

Af (2) og (6) følger, at $a_n \to 1$ for $n \to \infty$. (Även löst av *Peter Kirkegaard, Gentofte.*)

494. (*Con Amore Problemgruppe, Aarhus*) Vi antager modsætningsvis, at $a \ge b$, og dermed at $c = a - b \ge 0$. Af den første ligning følger så at $3^b \cdot 3^c + 13^b = 17^b \cdot 17^c$, og dermed at

$$3^b\left(\tfrac{3}{17}\right)^c + 13^b \cdot \left(\tfrac{1}{17}\right)^c = 17^b. \tag{1}$$

Idet funktionen h^x med $0 < h < 1$ er positiv og aftagende for alle reelle tal x, og $h^0 = 1$, slutter vi af (1) at $3^b + 13^b \ge 17^b$. Da funktionen $\left(\frac{3}{17}\right)^x + \left(\frac{13}{17}\right)^x$ er aftagende for alle relle tal x, og $\left(\frac{3}{17}\right)^1 + \left(\frac{13}{17}\right)^1 = \frac{16}{17} < 1$, fremgår heraf at $b < 1$, (i).
Af den anden ligning følger at $5^b \cdot 5^c + 7^b = 11^b$, og dermed (idet $5^c \ge 1$) at $5^b + 7^b \le 11^b$. Da funktionen $\left(\frac{5}{11}\right)^x + \left(\frac{7}{11}\right)^x$ er aftagende for alle relle tal x, og $\left(\frac{5}{11}\right)^1 + \left(\frac{7}{11}\right)^1 = \frac{12}{11} > 1$, fremgår heraf at $b > 1$, (ii).
Da (i) og (ii) strider mod hinanden, er vor antagelske falsk; med andre ord gælder som påstået at $a < b$. (Även löst av *Peter Kirkegaard.*)

495. *(Ebbe Thue Poulsen)* Hjørnerne i den givne n-kant betegnes P_i, $i = 1, 2, \ldots, n$. Hjørnet P_i siges at være *lige* hhv *ulige* for en given farvelægning F af kanterne, hvis der fra P_i udgår et lige hhv ulige antal blå kanter.
Lad m_i betegne den om-maling af kanterne, der skifter farve på de kanter, der udgår fra P_i. Ved denne ændring skifter alle punkter P_j med $j \ne i$ paritet, idet antallet af blå kanter udgående fra P_j enten forøges eller formindskes med 1. Da der fra P_i udgår et lige antal kanter, er antallene af røde og blå blandt dem enten begge lige eller begge ulige, og derfor ændrer m_i ikke pariteten af P_i.
Betragt nu en vilkårlig farvelægning F. Hvis vi for hvert hjørne tæller antallet af blå kanter, der udgår fra det, bliver hver blå kant talt med to gange, og følgelig er antallet af ulige hjørner lige. Lad os sige, at $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}$ er de ulige hjørner, og betragt om-malingen $m_{i_1} m_{i_2} \cdots m_{i_k}$.
Hvis P_i er et af hjørnerne $P_{i_1}, P_{i_2}, \ldots, P_{i_k}$, ændrer denne om-maling pariteten af P_i $k-1$ gange, dvs et ulige antal gange, medens alle andre hjørners paritet ændres k gange. Efter om-malingen har samtlige hjørner altså lige paritet, som

ønsket. Vi skal vise, at uanset hvordan farvelægningen F ændres til en farvelægning, hvor alle hjørner har lige paritet, så bliver slutresultatet det samme. Betragt derfor to forskellige om-malinger $m_{i_1}m_{i_2}\cdots m_{i_k}$ og $m_{j_1}m_{j_2}\cdots m_{j_l}$, og antag, at $m_{i_1}m_{i_2}\cdots m_{i_k}$ hhv $m_{j_1}m_{j_2}\cdots m_{j_l}$ ændrer F til F' hhv F'', hvor samtlige hjørner har lige paritet både ved farvelægningen F' og ved F''. Vi skal bevise, at $F' = F''$. Da om-malingen $m_{i_k}\cdots m_{i_2}m_{i_1}$ ændrer F' tilbage til F, ses det, at ommalingen $M = m_{j_1}m_{j_2}\cdots m_{j_l}m_{i_k}\cdots m_{i_2}m_{i_1}$ ændrer F' til F''. Da $m_im_j = m_jm_i$ for $i \neq j$, kan vi bytte om på m'erne i M indtil vi får et udtryk af formen $M = m_{p_1}m_{p_2}\cdots m_{p_q}$, hvor $p_1 \le p_2 \le \cdots \le p_q$. Da om-malingerne m_i^2 lader alle farvelægninger uændrede, kan vi i M slette par af gentagne m_i'er, indtil p'erne alle er forskellige. Vi kan derfor antage, at $p_1 < p_2 < \cdots < p_q$. Lad os nu se på, hvordan M ændrer pariteten af et hjørne P_i. Hvis i ikke er et af tallene $p_1, p_2, \ldots, p_q$, ændres pariteten af P_i q gange, og ellers ændres den $q-1$ gange. Hvis alle hjørner har lige paritet både før og efter anvendelsen af M, må der enten gælde, at talsættet $p_1, p_2, \ldots, p_q$ er tomt, eller at det indeholder alle tallene $1, 2, \ldots, n$. I første tilfælde lader M alle farvelægninger uændrede, og en enkel overvejelse viser, at det samme gælder i det andet tilfælde: $m_1m_2\cdots m_n$ ændrer alle kanters farver præcis to gange. Hermed er det bevist, at $F' = F''$. (Även löst av *Con Amore Problemgruppe* och *Peter Kirkegaard.*)

496. (*Bent Fuglede, København*) Idet x, y, z indgår symmetrisk indfører vi de elementarsymmetriske funktioner

$$a = x + y + z, \quad b = xy + yz + zx, \quad c = xyz,$$

hvorved x, y, z bliver rødderne i polynomiet

$$f(t) = t^3 - at^2 + bt - c.$$

Til at begynde med udnytter vi ikke de to givne ligninger, men kun at f skal have lutter reelle rødder. Lad α og β betegne rødderne i $f'(t) = 3t^2 - 2at + b$. Hvis x, y, z er indbyrdes forskellige, adskilles de ifølge Rolles sætning af α og β, som således bliver reelle og forskellige; og endvidere har $f(\alpha)$ og $f(\beta)$ forskelligt fortegn. Hvis dernæst for eksempel $x = y \neq z$, bliver $\alpha = x$, medens β adskiller y og z, og nu bliver $f(\alpha)f(\beta) = 0$. Er endelig $x = y = z$, bliver $\alpha = \beta = x$ og $f(\alpha) = f(\beta) = f(x) = 0$. I alle tilfælde er således α og β reelle og $f(\alpha)f(\beta) \le 0$. Ved division med rest fås identiteten

$$f(t) = \big(\frac{t}{3} - \frac{a}{9}\big)f'(t) + \frac{2}{9}\big(3b - a^2\big)t + \big(\frac{ab}{9} - c\big).$$

Indsættes $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$ samt $\alpha + \beta = 2a/3$ og $\alpha\beta = b/3$, fås

$$\begin{aligned} 243f(\alpha)f(\beta) &= 4b(3b - a^2)^2 + 4a(3b - a^2)(ab - 9c) + 3(ab - 9c)^2 \\ &= -9a^2b^2 + 36b^3 + 36a^3c - 162abc + 243c^2 \le 0. \end{aligned}$$

Her er for øvrigt venstre side (bortset fra en positiv konstant faktor) netop diskriminanten D for trediegradspolynomiet f; og f har jo som bekendt tre reelle rødder

(talt med multiplicitet) hvis og kun hvis $D \leq 0$.
Ved hjælp af det givne ligningspar udtrykker vi nu b of c ved a:

$$\begin{aligned}
2b &= 2xy + 2yz + 2zx = (x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2) = a^2 - \tfrac{1}{3}, \\
a^3c &= (x+y+z)^3xyz = x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \\
&= (xy+yz+zx)^2 - 2(x+y+z)xyz = b^2 - 2ac.
\end{aligned}$$

Udtrykkene for $2b$ og a^3c er uforenelige hvis $a = 0$, og der findes således ingen løsning (x, y, z) med $x + y + z = 0$. For $a \neq 0$ fås

$$c = \frac{b^2}{(a(a^2+2)} = \frac{(3a^2-1)^2}{36a(a^2+2)}.$$

Indsættes disse udtryk for b og c i den ovenfor fundne ulighed, bliver denne (efter en længere reduktion samt multiplikation med $48a^2(a^2+2)^2 > 0$) til

$$\begin{aligned}
&108a^{12} - 252a^{10} + 249a^8 - 224a^6 + 178a^4 - 68a^2 + 9 \\
&\qquad = 3(a^2-1)^2\bigl(a^2 - \tfrac{1}{3}\bigr)^2\bigl((6a^2+1)^2 + 26\bigr) \leq 0,
\end{aligned}$$

som er ensbetydende med, at enten $a = \pm 1$ eller $a = \pm\sqrt{1/3}$. I det første tilfælde bliver $b = 1/3$ og $c = \pm 1/27$, og dermed

$$f(t) = t \mp t^2 + \tfrac{1}{3}t \mp \tfrac{1}{27} = \bigl(t \mp \tfrac{1}{3}\bigr)^3$$

med den tredobbelte rod $1/3$, henholdsvis $-1/3$. I det andet tilfælde bliver $b = c = 0$ og $f(t) = t^2\bigl(t \mp \sqrt{1/3}\bigr)$ med rodsættet $\{\sqrt{1/3}, 0, 0\}$. Opgaven har således ialt otte løsninger, nemlig

$$(x,y,z) = \pm\bigl(\tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}, \tfrac{1}{3}\bigr), \quad \bigl(\pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}, 0, 0\bigr), \quad \bigl(0, \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}, 0\bigr), \quad \bigl(0, 0, \pm\sqrt{\tfrac{1}{3}}\bigr).$$

(Även löst av *Peter Kirkegaard.*)

Korrekta lösningar till uppgifter, till vilka lösningar tidigare har presenterats här, har insänts av *Peter Kirkegaard* (nr 487) och *Ebbe Thue Poulsen* (nr 492).

Med anledning av intervjun med Atle Selberg som i fyra delar publiceras i Normat under 2008 så publicerar vi här hans första bidrag till Normat, då Norsk matematisk tidsskift, 1933.

Løste opgaver

Nedenstående opgave med løsning er forfattet av en 15-åring.

Vis at:

$$\int_0^1 y^{-y}dy = \frac{1}{1} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} + \cdots + \frac{1}{n^n} + \ldots$$

Vi går ut fra formelen

$$\int_0^\infty z^{n-1}e^{-nz}dz = \frac{(n-1)!}{n^n}.$$

Dividerer vi denne formel på begge sider med $(n-1)!$, får vi at

$$\int_0^\infty \frac{z^{n-1}e^{-nz}}{(n-1)!}dz = \frac{1}{n^n},$$

og gir vi nu n efterhånden verdiene $1, 2, 3, 4, \ldots$ og summerer på begge sider, så får vi videre

$$\int_0^\infty e^{-z}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{z^{n-1}e^{-(n-1)z}}{(n-1)!}dz = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^n}.$$

Nu er

$$\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{z^{n-1}e^{-(n-1)z}}{(n-1)!} = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{(ze^{-z})^{n-1}}{(n-1)!} = e^{ze^{-z}}.$$

Setter vi dette inn i formelen ovenfor, får vi

$$\int_0^\infty e^{-z}.e^{ze^{-z}}dz = \sum_{n=1}^{n=\infty} n^{-n}.$$

Her kan vi substituere $e^{-z} = y; z = -lny; dz = -\frac{dy}{y}$ og får da

$$\int^\infty e^{-z}.e^{ze^{-z}}dz = -\int_1^0 y.e^{-ylny}\frac{dy}{y} = \int_0^1 e^{-ylny}dy = \int_0^1 y^{-y}dy.$$

Altså er $\int_0^1 y^{-y}dy = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{1}{n^n}$ hv. sk. bev.

Atle Selberg