Böcker

Jöran Friberg
Amazing Traces of a Babylonian Origin in Greek Mathematics.
World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
New Jersey, London, Singapore, Beijing, Shanghai, Hong Kong, Taipei, Chennai
2007
ISBN-13 978-981-270-452-8
ISBN-10 981-270-452-3

Dette er en fortsettelse av forfatterens bok [1], som ble anmeldt av undertegnede i nr. 4 av NORMAT for 2006.

La det med en gang være sagt at også denne boken ligger på det høye kvalitetsnivå man forventer fra Jöran Friberg. Som han bemerker i forordet til *Unexpected Links*, representerer hans forskningsresultater om at det består klare forbindelser mellom egyptisk og babylonsk matematikk nye tanker innen forskningen i matematikkens historie. Ifølge Friberg selv finner en i tidligere publiserte arbeider om dette tema *«the prevailing opinion that practically no such link exists»*.

Formålet med denne boken er å påvise og dokumentere en annen, sterk og direkte, forbindelse mellom babylonsk og *gresk* matematikk.

Man anser at den eldste bevarte beretning om tidlig gresk matematikk er *Proklos' sammendrag,* kalt det *Eudemiske sammendrag.* Dette innleder Proklos kommentarer til Euklids elementer I, *El I.* Sammendraget sies å være fra en bok av Eudemos, en av Aristoteles elever. Men det er ingen tvil om at Proklos brukte nyere kilder, muligens er hele sammendraget Proklos' eget verk. Det er trykket i sin opprinnelige greske tekst, men en oversettelse av *Ivor Thomas*, som kapittel IV i [9]. Her står det følgende om geometriens opprinnelse i Hellas:

[...] Geometry was first discovered among the Egyptians, taking its origin from the measurement of areas. For they found it necessary by reason of the rising of the Nile, which wiped out everybody's property boundaries. Nor is there anything surprising in that the discovery both of this and of the other sciences should have its origin in a practical need, since everything which is in process of becoming progresses from the imperfect to the perfect. Thus the transition from perception to reasoning and from reasoning to understanding is natural. Just as exact knowledge of numbers received its origin among the Phoenicians by reason of trade and contracts, even so geometry was discovered among the Egyptians for the aforesaid reason.

Nå var Proklos en av etterfølgerne til Jamblikos, som blant mye annet har etterlatt seg en bok om Pytagoras' liv. Der beretter han, etter manges mening frem til idag meget fantasifullt, at Pytagoras mens han oppholdt seg i Egypt ble tatt til fange av perserkongen Kambyses og brakt til Babylon. Der kom han raskt i god kontakt med magikerne i templet, forteller Jamblikos. Og her lærte han all den tids viten om matematikk, musikk og mye annet.

Ettertiden har imidlertid sett på dette som det rene oppspinn, i hvert fall inntil de mesopotamiske matematiske leirtavlene etter hvert begynte å bli tydet. Men selv etter de nye innsikter gjennom arbeidene til *Otto Neugebauer* og hans medarbeidere som for eksempel i [6], ble Jamblikos og hans beretninger sett på med megen skepsis. Således omtaler *van der Waerden* ham i [10] på side 91, som *a fanciful and muddle-headed writer.* Men Jamblikos' beretning nyanserer egentlig Proklos' utsagn om at grekerne fikk geometrien fra egypterne. Dette er ikke stedet for å gå inn i hele debatten knyttet til hvor vår nåværende matematiske kunnskap oppsto. Det kan være nok å konstatere at mye har vært kontroversielt, debatten ofte forbausende spekulativ og opphetet, og gjerne preget av nasjonale agenda og motsetninger.

I boken under anmeldelse bringer Jöran Friberg et vell av ny og eksakt dokumentasjon og informasjon om opprinnelsen til gresk matematikk. Fribergs arbeide er et vesentlig skritt videre i de innsikter som er kommet i forholdsvis nyere tid gjennom slike arbeider som Elanor Robsons [7], [8] og Jens Høyrups [4]. Den siste referansen er beskrevet av Robson i en anmeldelse som *a major turning point in the study of ancient mathematics.* En slik karakteristikk må man med samme berettigelse kunne bruke om Fribergs bok under anmeldelse her.

Boken representerer en fortsettelse av [1], og er basert på forfatterens banebrytende forskning i babylonsk, eller *mesopotamisk*, matematikk. Matematikken i dette området hadde etter det en vet sin blomstringstid fra det fjerde til det første årtusen før vår tidsregning. Fribergs konklusjon er at mange av de store greske matematikerne må ha vært vel kjent med *babylonsk metrisk algebra,* som betegner et fint avstemt samspill mellom geometri, oppmåling og ligninger som en finner på de gamle matematiske leirtavlene fra Mesopotamia.

Friberg gjengir tallrike diagrammer, etter beskrivelser og figurer innrisset på babylonske leirtavler som dokumenteres, der lengder og arealer er angitt ved tall, i stedet for mer abstrakt ved bokstaver slik vi finner i gresk geometri, som hos Euklid. Slike *metrisk algebra diagrammer* er viktige for å forstå setninger og konstruksjoner i gresk matematikk, og nettopp disse diagrammene spiller en stor rolle for sammenligningen av gresk matematikk med den meget tidligere babylonske matematikken.

Kapittel 1 er, med forfatterens ord, *a continuation and more or less definite conclusion of the debate of what has been known as the "geometric algebra" of Euclid's Elements II.* Hans formål i dette kapitlet er å påvise at setningene i El II ikke er greske reformuleringer i geometriske termer av babylonsk (ikkegeometrisk) algebra, men at de er abstrakte, ikke-metriske reformuleringer av et vel definert system av ligninger fra babylonsk metrisk algebra, kvadratiske og lineære ligninger eller systemer av ligninger for lengder og arealer i geometriske figurer. I den omfattende dokumentasjonen finner vi blant mye annet utførlig behandling av de to babylonske versjonene av det såkalte *stigeproblemet*, som for en tid siden ble behandlet i sine nyere versjoner i NORMAT.

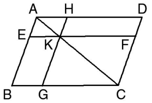
Kapittel 2 begynner med å drøfte Euklids bevis for det såkalte *Pytagoreiske teorem*, El I setning 47, som sier at i en rettvinklet trekant er summen av arealene til kvadratene på katetene lik arealet til kvadratet på hypotenusen. Friberg går så over til å behandle *Pappos'* meget vakre og forbløffende enkle generalisering av dette teoremet. Han knytter så forbindelsen til den gammelbabylonske *Diagonalregelen* for rektangler, og videre til kjeder av *triangler, trapeser* eller *rektangler.* At man her finner i det minste en forløper for det Pytagoreiske teorem, synes udiskutabelt. Man kunne fristes til sterkere ord.

Kapittel 3 begynner med et lemma fra Euklids elementer Bok X, Lemma 1 på side 63 i Vol 3 av Heaths oversettelse [3]: *To find two square numbers such that their sum is also a square.* Friberg argumenterer for at Euklids geometriske bevis for denne setningen implisitt representerer en genererende regel for et uendelig antall av tripler av positive hele tall a, b og d slik at $a^2 + b^2 = d^2$, som svarer til de tre sidene i korresponderende uendelig mange rettvinklede trekanter. I [2] bind I har Heath behandlet to genererende regler for slike tripler, som begge er spesialtilfeller av regelen fra Euklid. Heath tilskriver disse reglene til Pytagoras og Platon, henholdsvis. Friberg påviser at alle disse reglene kan avledes av visse geometriske diagrammer, som kan finnes på en meget interessant gammelbabylonsk leirtavle, MS 3971. Dette er de såkalte babylonske *"ìgi-igi.bi"*-problemer. Det er i denne teknikken Friberg søker forklaringen på tallene på den berømte leirtavlen *Plimpton 322*.

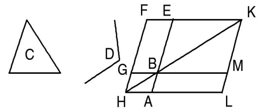
Kapittel 4 tar også utgangspunkt i et resultat fra El X, nemlig et sentralt lemma som i [3] står på side 74 i Vol. 3: Det er gitt $\triangle ABC$ der $\angle A$ er rett. Fotpunktet til normalen fra A til BC er D. Da her rektanglet med sider CB og BD samme areal som kvadratet på BA, det med sider BC og CD som kvadratet på CA og det med sider BD og DC som kvadratet på AD og det med sider BC og AD som rektanglet med sider BA og AC.

Kapittel 5 studerer en gruppe *«notoriously difficult»* setninger fra El X. Friberg viser her at disse setningene kan forklares ved babylonsk metrisk algebra, og dessuten har han en interessant drøftelse av to setninger fra El I, nemlig, i Heaths oversettelse fra [3]:

El I 43 In any parallellogram the complements of the parallellograms about the diameter are equal to one another.



El I 44 To a given straight line to apply, in a given rectilinear angle, a parallellogram equal to a given triangle.



Her har vi tatt med illustrasjonene, slik de er gjengitt i [3]. Friberg argumenterer for at formuleringen av disse to setningene på en måte tilslører de matematiske realitetene:

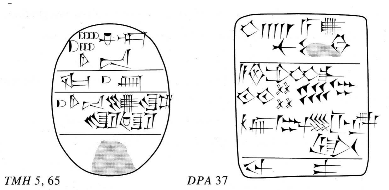
> *The two propositions are formulated in meaningless generality, mentioning parallellograms, instead of simply rectangles. At the same time I44 is uneccesarily restricted, mentioning (area of) a triangle, instead of an arbitrary area. Essentially, what is meant is*
>
> *I 43* *In any rectangle the complements of any rectangle about the diagopnal are equal.*
>
> *I 44* *To apply a rectangle of a given area to a straight line of given length.*

Men i [3] omtaler Heath El I. 44 på denne måten:

> *This proposition will always remain one of the most impressive in all geometry, when account is taken of the great importance of the result obtained, the transformation of a parallellogram of any shape into another with the same angle and of equal area but with one side of any given length [...] and the simplicity of the means employed, namely that the "parallellograms about the diameter" of a parallellogram are equal."*

Uansett bekrefter dette sitatet fra Heath at det å vise en Babylonsk opprinnelse til disse to setningene må tillegges helt vesentlig betydning.

Det er selvsagt vel kjent idag at babylonerne kunne regne ut arealer av figurer vesentlig mer kompliserte enn rektangler og parallellogrammer, og dermed sammenligne disse arealene. Det babylonske motstykke til *application of area* i El I 44, er den *metriske divisjon*: En har gitt et areal A, gitt som et tall, og en lengde ℓ, likeledes gitt som et tall. En skal så finne lengden d slik at et rektangel med sider ℓ og d har areal A. Friberg går nærmere inn på en gruppe mesopotamiske tekster fra 2340-2200 før vår tidsregning, der slike oppgaver løses. Tallene er, åpenbart med hensikt, valgt slik at beregningene blir kompliserte, og har som formål å trene elever. Han gir to eksempler, som i avskrift fra leirtavlene ser slik ut:



I kapittel 6 tar forfatteren opp stoffet i El IV, som hovedsakelig er konsentrert om temaet *figurer innen figurer*. Dette var også et populært tema i babylonsk matematikk, og forfatteren knytter overbevisende bånd mellom gresk og babylonsk matematikk også innen dette området.

Kapittel 7 tar opp *det gylne snitt*, og *metrisk analyse* av det regulære pentagon. Regulære polygoner av mange ulike typer ble studert av babylonerne, men Friberg peker på at de ikke kan ha kjent til at to nabodiagonaler i en regulær pentagon høydeler hverandre. Dette resultatet hos Euklid bruker vesentlig El VI 33, som sammen med det beslektede stoffet i El III ligger helt utenfor rekkevidden til babylonsk matematikk, ifølge Friberg.

Kapittel 8 behandler konstruksjoner av regulære polyedere innskrevet i en kule, ved metrisk algebra. Dette er temaet for El XIII 13 (tetraeder), 14 (oktaeder), 15 (kube), 16 (ikosaeder), 17 (dodekaeder) og 18, der sidene i de fem regulære polyederne finnes uttrykt ved den omskrevne kulens diameter, og disse sammenlignes med hverandre. I konstruksjonen av dodekaederet i setning 17 gjør Euklid bruk av en teknikk som er en tre-dimensjonal versjon av den babylonske *diagonalregelen, å finne den indre diagonalen i en port.* Dette kommer fra en leirtavle fra den gammelbabylonske epoken (kassittisk), behandlet hos Friberg på sidene 181-184. På sidene 184-188 behandler Friberg beregningen av et kolossal kobber-ikosaeder, som beskrives på en leirtavle fra samme epoke. Denne figuren blir kalt en *horn-figur* på leirtavlen. Den settes sammen av 20 likesidede trekanter, der de tre sidene er 3 kubit lange, omtrent 1.5 meter, og utført av kobberplater som er omtrent 2.5 cm tykke.

Friberg har en fascinerende tankerekke i en kommentar på side 172:

In El. XIII 13-15, the diameters of the spheres ciecumscribed around a regular tetrahedron, octahedron, or cube (hexahedron) are shown to be expressible in terms of the edges *of the figures. In El. XIII 16-17, on the other hand, the edges of a regular icosahedron and dodecahedron are shown to be inexpressible* in terms of the diameters *of the circumscribed spheres. A possible explanation for this lack of consistency may be that in a now lost precursor to Euclid's Elements the diameters of the circumscribed spheres for all the five regular polyhedrons had been expressed in terms of the edges of the figures,* following the babylonian tradition!

Den siste henvisningen til *den babylonske tradisjon for beregninger av de regulære polyederne*, gjelder dette kobber-ikosaederet. For å forstå omtalen av hva som kan og hva som ikke kan uttrykkes, må vi ta i bruk moderne symboler, og lar d betegne diameteren til den omskrevne kulen, og lar s_T, s_O, s_K, s_I og s_D betegne lengdene til sidekantene i tetraederet, oktaederet, kuben, ikosaederet og dodekaederet. Vi får da følgende uttrykk, som essensielt bevises i El XIII:

$$s_T = \frac{d}{3}\sqrt{6}, s_O = \frac{d}{2}\sqrt{2}, s_K = \frac{d}{3}\sqrt{3},$$

og

$$s_I = \frac{d}{10}\sqrt{10(5-\sqrt{5})}, s_D = \frac{d}{6}(\sqrt{15}-\sqrt{3}).$$

Ordet «expressible» ovenfor uttrykker at to størrelser a og b er kommensurable, altså at med moderne sprog er $a = rb$ der $r \in \mathbb{Q}$. Der vi bare har at $a^2 = rb^2$ for et passende rasjonalt tall r ville man si at a og b er *«expressible in square»*. Vi ser da at ingen av de fem sidekantene er «expressible» ved d, men at de tre første er «expressible in square» ved d. De to siste er ikke «expressible in square» heller.

I kapittel 9 drøftes først stoffet i El XII, der ulike former for pyramider og prismer kuttes opp i enklere deler. Også dette påviser Friberg at har et babylonske motstykke. Disse babylonske tekstene viser at de gammelbabylonske matematikerne kunne regne ut volumene til en lang rekke hele og trunkerte pyramider og kjegler, samt beslektede figurer. En slik figur som lenge virket gåtefull, ble beskrevet som en «kornbinge », *a granary*. Fasongen er imidlertid nær opp til et *valmetak*, hos Friberg kalles den *a ridge pyramid*. Også trunkerte versjoner studeres og beregnes. Friberg konkluderer slik:

Consequently, it is likely that Old Babylonian mathematicians did indeed find and prove, according to their own standards, and without any kind of infinitesimal calculus, *correct expresions for the volumes of a large variety of pyramids, cones, and related solids! Thus, of the various figures appearing in Elements XII, only the sphere seems to have been totally outside the scope of Babylonian mathematics.*

Euklids Elementer har hatt en enorm innflytelse fra antikken og opp til vår egen tid. Det er blitt sagt at nest etter Bibelen er Elementene historiens mest oversatte, publiserte og studerte bok i den vestlige verden. Det er derfor naturlig at setningene i Elementene får en så sentral plass i Fribergs behandling av den babylonske opprinnelsen til den greske matematikken. Det er anmelderens motivasjon for å gi en såvidt detaljert gjennomgang av denne første halvparten av boken, altså de første ni kapitlene. For de siste ni kapitlene vil det bli gitt en mer kortfattet behandling.

Euklid skrev også andre bøker om matematikk som har overlevd i en eller annen form.Av disse tar nå Friberg opp to, nemlig *Data*, som med sine 94 setninger studerer hvilke egenskaper ved figurer som kan utledes når andre egenskaper er gitt. Dette behandles i kapittel 10. Den andre boken er *Om oppdeling av figurer*, «On Divisions of Figures», som har overlevd gjennom bevarte deler i arabisk oversettelse, her knytter Friberg forbindelsene til babylonsk matematikk i det 75 sider lange kapittel 11. Hos Euklid dreier det seg om oppdeling av triangler, trapeser, parallellogrammer, en sirkel og et sirkelsegment. De babylonske problemene er om oppdeling av triangler og trapeser ved ulike familier av linjer. Her står dette stoffet i nær sammenheng med ubestemte kvadratiske ligninger. I kapittel 12 sammenlignes Hippokrates' *månekvadraturer* med babylonske beregninger av arealer og diametere av visse figurer avgrenset av rette linjestykker og krumme linjer i form av sirkelsegmenter. Navnene egger fantasien: Okseøye, hjerte, byggåker, lyrevindu (et konkavt triangel av sirkelsegmenter).

Kapittel 13 utforsker spor av babylonsk metrisk algebra i Diofantos' Arithmetica, I-VI. Her finnes det et stort antall eksempler, og Friberg peker på at Arithmetica (*Ar*) I er organisert på samme måte som en gammelbabylonsk *tema-tekst* med ligninger eller systemer av ligninger i en eller to ukjente. Et ord som opptrer her er *plasmatikón*, betydningen har vært omdiskutert men Friberg mener at det betegner et problem som er *representerbart*, nemlig ved et metrisk algebra diagram. I Ar II behandles problemet å skrive et kvadrattall som en sum av to andre kvadrattall, i denne formen: *La det være krevet å dele 16 i to kvadrater.* Friberg minner her om at Diofantos, som sine babylonske forgjengere, ofte angir tilfeldige numeriske verdier i den matematiske drøftelse av et problem, på samme måte som vi idag ville benytte bokstaver k, l, m. Derfor er ofte det som ser ut som ett spesialtilfelle, i virkeligheten ment å bevise det generelle tilfellet. Tallene som Diofantos så angav kan forklares ved følgende moderne fremgangsmåte: I et kartesisk koordinatsystem gir man en rasjonal parametrisering av sirkelen med radius r om origo ved å la en linje gjennom punktet $P = (0, -r)$ med vinkelkoeffisient t skjære sirkelen i punktet (br, ar) der man etter litt regning finner $b = \frac{2t}{t^2+1}$ og $a = \frac{t^2-1}{t^2+1}$. Med $r = 4$ og $t = 2$ får man da $b = \frac{4}{5}$ og $a = \frac{3}{5}$ slik at $br = \frac{16}{5}$, $ar = \frac{12}{5}$ og altså

$$16 = (\frac{16}{5})^2 + (\frac{12}{5})^2$$

eller

$$16 = \frac{256}{25} + \frac{144}{525}$$

En slik forklaring var tidligere ofte gitt for de pytagoreiske triplene man finner på leirtavlen Plimpton 322, og som anmelderen selv gjenga nokså ukritisk i sin egen bok [5].

Friberg refererer først den eldre tolkningen av Diofantos, men går så videre til å diskutere nyere alternativer, som støtter seg helt avgjørende på *babylonsk metrisk algebra.* Videre drøftes noen andre, beslektede, problemer fra Ar II i samme ånd.

Behandlingen av Ar III starter med: «To find four numbers such that the square of their sum plus or minus any one of them gives a square.» Konstruksjonen involvert i dette karakteriserer Friberg som *«extremely interesting but obscure».* Geometrien den leder til fører tilbake til tidlige indiske matematiske tekster fra Bhâskara, Brahmagupta og Mâhavîra, og til forsøk på å forklare en babylonsk bakgrunn for disse. Det er spennende og fascinerende lesning, der firkanter innskrevet i en sirkel står sentralt.

I kapittel 14 drøftes hvorledes babylonsk metrisk algebra kan lede til Herons, Ptolemaios' og Brahmaguptas resultater om firkanter innskrevet i en sirkel, og i kapittel 15 blir Theon fra Smyrnas side- og diagonaltall, samt uendelig oppstigende kjede av birektangler studert. I kapittel 8 forklares de babylonske røtter blant annet for for Heron fra Alexandrias metode til å regne ut kvadratrøtter, for Ptolemaios' kordeberegninger og for Arkimedes' estimat for $\sqrt{3}$. I kapittel 17 får vi så en babylonsk bakgrunn for Teodoros fra Kyrenes irrasjonalitetsbevis, og hans uendelig nedstigende kjede av birektangler. Dette med utgangspunkt i Platons dialog *Teaitetos.* I siste kapittel, 18 i rekken, behandles Herons *Metrica*, og den *pseudo-Heroniske Geometrica.* Appendiks 1, som er skrevet sammen med *Joachim Marzahn*, behandler en ny babylonsk oppgavetekst, med en kjede av trapeser. Appendiks 2 er en oversikt over samtlige kjente babylonske geometriske figurer.

Boken har en fyldig litteraturliste, to omfattende indekser og et instruktivt tidsdiagram bakerst i boken.

Det er en glede å kunne gi denne boken min varmeste anbefaling. Anmelderen kan ikke forstå det annerledes enn at den vil representere et tidsskille i vår forståelse av oldtidens matematikk, og at den må anspore til nye fremstøt fra kommende generasjoner av matematikkhistorikere.

Referanser

[1] J. Friberg. *Unexpected Links between Egyptian and Babylonian Mathematics.* World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. 2005.

[2] T.L. Heath. *A History of Greek Mathematics.* New York: Dover 1981, 2 vols., paperback version of 1921.

[3] T.L. Heath. *Euclid: The thirteen books of the Elements.* Translated from the text of Heiberg. 3 vols. Dover Publications, New York 1956.

[4] Jens Høyrup. *Lengths, Widths, Surfaces: A Portrait of Old Babylonian Algebra and its Kin.* Sources and Studies in the History of Mathematics and Physical Sciences, Springer-Verlag, 2002.

[5] A. Holme. *Geometry. Our Cultural Heritage.* Springer Verlag. Berlin, Heidelberg, New York 2002.

[6] O. Neugebauer and A. Sachs. *Mathematical Cuneiform Texts.* Yale University Press, New Haven, Conn. USA, 1945.

[7] E. Robson. Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A reasessment of Plimpton 322. *Historia Mathematica* 28 (2001) 167-206.

[8] E. Robson. Words and Pictures: A reasessment of Plimpton 322. *Amer.Math. Monthly.* 109 (2002), pp. 105-120.

[9] I. Thomas. *Greek Mathematical Works.* Bind I. *From Thales to Euclid.* og Bind II. *From Aristarchus to Pappus.* William Heinemann Ltd., London. 1939 og 1951.

[10] B.-L. van der Waerden. *Science Awakening.* Translation by Arnold Dresden, P. Nordhoof Ltd. 1954.

Audun Holme