Selbergintervjuet del 2 – Såldmetoden, Primtallsatsen og Erdös

Nils A. Baas og Christian F. Skau

Matematiske Institutt
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
baas@math.ntnu.no, csk@math.ntnu.no

Såldmetoder det er jo også noe som har stått ditt hjerte nær i lang tid.
Jo, det er så. Det kom først ut som et biprodukt av mitt arbeid med zetafunksjonen.

Etter doktorgraden?
Etter doktorgraden, ja. Jeg innså at jeg kunne bruke noe av det som jeg hadde brukt der, og det kunne jeg bruke til å finne øvre grenser, og at det virket i en mer generell sammenheng enn hva jeg hadde tidligere. Det var da jeg først begrep i grunnen hva såldmetoden egentlig handlet om. Jeg så på Viggo Bruns arbeider, men jeg kunne aldri forstå dem riktig. Han brukte mye en slags geometrisk fremstilling. Han var avhengig av å se tingene geometrisk med visse figurer og diagrammer og sånn. Jeg så på dem, men de hadde aldri noen mening for meg, så jeg fikk ingenting ut av det. Det fantes jo andre fremstillinger som unngikk dette. Det var Rademacher, som egentlig hadde oversatt Bruns arbeide til et annet språk, så å si, som var mer tilgjengelig for andre matematikere. Så det ble mer sånn som Rademacher hadde fremstilt såldmetoden som ble brukt og gjort tilgjengelig for en større gruppe av matematikere. Jeg så også litt på Landaus trebinds forelesningsserie om tallteori, som hadde et avsnitt om Bruns arbeider, men han fulgte jo mye Rademachers fremstilling. Jeg syntes det heller ikke var så bra. For å finne øvre grenser så fant jeg ut at jeg kunne bruke kvadrater av $\sum_{d|n,d<z} \lambda_d$, og det virket veldig bra. Faktisk på alle problemer som kunne angripes med Bruns såld-metode, kunne jeg finne øvre oppskatninger med min egen metode, og de ble konsekvent bedre. Ikke bare det, men også mye enklere å finne. Konstantene ble mer naturlige og enkle for jeg endte alltid opp med noe som var et heltallig multiplum av det som var den antagelige korrekte verdi. For eksempel hvis jeg hadde et irredusibelt polynom uten noen fast primfaktor, så ville jeg ende opp med noe som var ganske mye bedre enn de resultater som kunne oppnås med Bruns resultat. Hvis det var noe som dreide seg om flere irredusible polynomer så ble konstanten øket en del. Jeg mener, hvis man betraktet antall primtall, for å ta noe enkelt, hvis man da tok og betraktet antall primtall i et intervall så endte jeg opp med en konstant som var to ganger så stort som det vi mente var det korrekte resultat. Hvis jeg betraktet et binært problem, så endte jeg derimot opp med noe som hadde en faktor som var

4 ganger så stor. Og tilsvarende for flere. Altså Goldbachs problem, eller primtall tvilling problemet, førte til konstanter som var 4 ganger for store. Jeg prøvde så å adoptere dette så jeg også kunne finne nedre grenser. For det er alltid et vanskeligere problem, fordi at en nedre grense har ingen verdi unntagen når den kommer ut positivt. Øvre grenser kommer alltid ut positive. Nedre grense sier bare noe når den kommer ut positivt. Og jeg fant jo selvfølgelig at avhengig av hva problemet var, så kunne jeg få positive resultat bare så lenge jeg gjorde min såldning opp til en viss potens. Jeg kunne for mer kompliserte problemer bare bruke såld-metoden min over en seksjon av primtallene som var opp til en potens med lavere eksponent enn den jeg kunne gjøre for et enklere problem.

La oss snakke om såldmetoder. Den såkalte Selbergs såldmetode, det var det første hovedresultatet ditt?
Jeg publiserte en note sommeren 1946, og jeg begynte å arbeide en del med det. Da jeg kom til Princeton i 1947 gjorde jeg en oppdagelse som satte meg på sporet av det som jeg kaller paritet, og som er ganske viktig for hva man kan gjøre og ikke gjøre med såldmetoder. Jeg prøvde å vise eksistensen av primtall i intervaller, forholdsvis små intervaller, ved å betrakte et forhold mellom to kvadratiske former.

Jeg prøvde å betrakte

$$\frac{\displaystyle\sum_{x<n<x(1+\epsilon)} d(n)\left(\sum_{d|n}\lambda_d\right)^2}{\displaystyle\sum_{x<n<x(1+\epsilon)}\left(\sum_{d|n}\lambda_d\right)^2} \quad ; d \leq z, \lambda_1 = 1 \tag{1}$$

der $d(n)$ er antall divisorer til n, og vanligvis velges $z \leq \sqrt{x}$. Jeg betraktet forholdet i (1). Det er åpenbart at hvis du kan gjøre dette forholdet − man kan godt utstrekke dette bare over kvadratfrie tall, det blir det samme − hvis du kan gjøre dette forholdet mindre enn 4 så vil det i det vesentlige vise at det finnes primtall i intervallet fra x til $x(1+\epsilon)$, hvor ϵ er en liten konstant. Man har forholdet mellom to kvadratiske former i λ-ene, og det gjelder å minimalisere dette forholdet, selvfølgelig. Du kan ikke riktig diagonalisere hele den kvadratiske formen ved å innføre nye variable. Jeg fant at hvis jeg bare prøvde å gjøre den dominerende delen i telleren så liten som den kan være, hvis λ-ene er frie og $\lambda_1 = 1$, så kan jeg gjøre forholdet så nær til 4 som jeg vil, nemlig som $4 + 0(\frac{1}{\log x})$. Det syntes meg som det ikke var noen grunn til å tro at jeg hadde funnet det riktige minimum ved å bare ta minimum av den dominerende delen av dette, og sette inn disse verdiene av det som jeg fant. For den andre delen av det som jeg fant ovenfor er av samme orden i virkeligheten, og det syntes meg klart at siden jeg ikke var ved det riktige minimum, så skulle jeg kunne gjøre det litt mindre enn 4 hvis jeg jenket på det. Men det viste seg at det ikke var tilfelle. Jeg prøvde også med andre uttrykk, og etter hvert ble det klart for meg at de tall som har like antall primfaktorer og de som har et ulike antall primfaktorer vil bidra omtrent det samme, så at forholdet ikke kan bli gjort mindre enn 4, faktisk. At det kan bli gjort så nært til 4 som man vil viser at man i virkeligheten da har at de med bare to primfaktorer vil komme til å bidra ulike mye mer enn alle de andre som har et like antall primfaktorer. De som har et like antall primfaktorer, men flere enn to, vil altså gi bidrag av mindre størrelsesorden. Dette viste seg i en del andre sammenhenger også, så jeg innså at øyensynlig hva jeg så gjorde med disse metoder så fikk jeg asymptotisk samme bidrag av de med like antall primtall og de med ulike primtall. Det kom da for meg at det skulle være mulig å konstruere uttrykk hvor jeg fikk omtrent samme bidrag av primtallene og produkter av to primtall, og det var det som ledet meg til denne formelen som ligger til grunn for det elementære beviset for primtallsatsen. Jeg refererer til dette problemet som paritet, og som såldmetoden ikke kan skille mellom. Jeg nevnte det allerede i Trondheim i 1949, hvor jeg holdt et foredrag, og noe mer detaljert i mitt foredrag på verdenskongressen til IMU i Cambridge, Massachusetts, ved Harvard i 1950, at man har denne begrensning. Begrensningen gir også en idé om hva man kan gjøre, og faktum er at man kan finne en uendelig rekke av formler hvor det er bare bidrag fra primtall og produkter av to primtall. De har samme vekt disse to deler, og det er noen forskjellige funksjoner av de to som inngår i disse formlene. Den formelen som jeg ga i min avhandling om det elementære beviset for primtallsatsen er i grunnen den enkleste. Denne formelen fremkommer om man først betrakter formelen

$$\sum_{n<x}\sum_{d|n}\mu(d)\log^2\frac{x}{d} = x\sum_{d<x}\frac{\mu(d)}{d}\log^2\frac{x}{d} + 0\left(\sum_{d<x}\log^2\frac{x}{d}\right) \tag{2}$$

(μ er Möbius-funksjonen.)
Her sees lett at den indre sum på venstre side alltid er null om n har mer enn to forskjellige primfaktorer. Ved å se på verdien for $n = 1$ og $n = p^a$, med $a > 0$, og $n = p^a q^b$, med $p \neq q$ og $a > 0,\ b > 0$, blir venstre side av (2).

$$\left\{\begin{aligned} &\log^2 x + \sum_{p^a<x}\left(\log^2 p + 2\log p\log\frac{x}{p}\right) + \sum_{\substack{p^a q^b<x\\ p\neq q}} 2\log p\log q \\ &= \sum_{p<x}\log^2 p + \sum_{pq<x}\log p\log q + 0(x)\end{aligned}\right. \tag{3}$$

På høyre side av (2) kan man oppskatte summene som inngår, og man får at høyre side er

$$2x\log x + 0(x)$$

Tilsammen gir dette

$$\sum_{p<x}\log^2 p + \sum_{pq<x}\log p\log q = 2x\log x + 0(x) \tag{4}$$

Det er formelen (4) som er nøkkelen til å bevise primtallsatsen?
Ja, det er så.

Det er veldig viktig for oss å få etablert dette. Det var altså faktisk såldmetoden, og i en viss forstand den enkleste applikasjon av såldmetoden, som ledet til denne fundamentale asymptotiske formelen (4)?

Vel, ja. Det er også en slags såldmetode. Dette er en lokal såldmetode. Dere skjønner, at når man generelt bruker disse metodene så finner en alltid at de λ-ene som man ender opp med, avhengig av hva slags koeffisienter som forekommer, alltid er av formen

$$\lambda_d = \mu(d)\frac{\log^k \frac{z}{d}}{\log^k z} \tag{5}$$

hvor z er en skranke for hvor langt d kan gå, og eksponenten k avhenger av det problem man betrakter.

Er det en form for Lagrange multiplikatormetode du bruker for å minimalisere disse tingene?

Vel, jeg har en måte å innføre nye variable som diagonaliserer, så at det er veldig lett etter at du har innført de nye variable å finne minimum i en sånn formel, i hvertfall av den dominerende del av formelen. Det er faktisk litt mer komplisert. De optimale λ_d, når vi kan bestemme dem eksakt, kommer ut som $\mu(d)$ multiplisert med en kvotient av to summer. Hvis man oppskatter disse summene får man asymptotisk formen (5). Vanligvis må man nøye seg med en approksimasjon.

Så dette er en stor oppdagelse, faktisk?

Vel, det tar en tid før du kan trekke noen mere slutninger ut fra det, men jeg syntes jo at det var en ganske interessant relasjon, slik at det skulle være mulig å trekke mere ut av dette. Det tok meg en tid å få det slik som jeg ville ha det, og det gikk gjennom flere faser. Den ene av dem hadde jeg egentlig ikke planlagt: for å si det slik, så kom det en 'interloper in the way'. Saken er nemlig den, jeg brukte noe lignende i forbindelse med noe jeg hadde gjort ferdig for publikasjon. Det var et bevis for Dirichlets setning om primtallene i aritmetiske rekker, og jeg benyttet ikke (4), men noe som kan utledes av analogien for (4) for en aritmetrisk progresjon $kn + l$, hvor $(k, l) = 1$, nemlig

$$\sum_{\substack{p<x \\ p\equiv l (mod k)}} \frac{\log^2 p}{p} + \sum_{\substack{pq<x \\ pq\equiv l (mod k)}} \frac{\log p \log q}{pq} = \frac{1}{\varphi(k)} \log^2 x + 0(\log x) \tag{6}$$

hvor $\varphi(k)$ er Eulers tallteoretiske funksjon.

Det er da ikke så vanskelig å få en selvmotsigelse hvis du antar at det ikke er uendelig mange primtall i progresjoner. Jeg gikk gjennom dette beviset med Turán som var her i Princeton da, sommeren 1948. Han hadde kommet med noen spørsmål i den forbindelse, og jeg hadde kommet til å nevne formelen (4) – i selve beviset inngikk bare (6). Jeg tror foranledningen til at jeg nevnte formelen (4) var at han hadde spurt om hvor skarp man kunne gjøre noen oppskatninger. Han hadde vært her for vår-terminen og han skulle reise tilbake til Ungarn. Jeg skulle reise opp til Canada for å få et permanent visum, for jeg ville ta en jobb i Syracuse for ett år. Jeg hadde blitt tilbudt et annet år ved instituttet her, men jeg syntes det kunne være interessant å prøve ut hvordan det var ved et annet amerikansk universitet. Jeg må si at jeg angret ikke på det. Så jeg var oppe i Canada nære på to uker før jeg endelig fikk overtalt konsulatet til å gi meg visum.

Måtte du dra til Canada for å få visum?

Du kunne ikke gjøre det innenfra landet, du måtte reise ut et sted, og Canada var det nærmeste stedet. Jeg reiste da opp til Montreal og returnerte til Princeton først ni dager senere. Jeg hadde vært der før og holdt noen foredrag ved McGill University etter at jeg kom til Amerika. Det var om vinteren. Det var veldig kaldt der kan jeg huske, men hotellværelset var så varmt at vi måtte ha vinduene åpne hele tiden, ellers kunne vi ikke leve der. Det var umulig å regulere radiatoren. Oljeprisen var noe lavere den gangen åpenbart! Men tilbake til visumsaken: jeg snakket ikke med selve konsulen, men med visekonsulen. Jeg hadde fått idéen å reise opp der av Hua, en kineser som hadde vært her og som jeg ble kjent med. Han hadde dradd til Canada for å endre sitt visum for å ta en stilling i Urbana, Illinois. Så jeg nevnte hans tilfelle for å oppmuntre denne visekonsulen å gjøre det samme for meg. Han sa til meg etter at han hadde sett 'the files' til Hua at det syntes ham åpenbart at Hua ikke burde fått visum. Men så en dag jeg var inne på konsulatet så gjorde han ferdig visum for oss, men før vi fikk visumene våre så fikk han 'second thoughts' og trakk dem tilbake. Så det tok en del dager mer, og vi måtte ha en del dokumenter oversatt. Det var særlig komplisert med dokumenter som min kone Hedi hadde på rumensk, men vi fant en oversetter som var i stand til å gi offisiell bevitnelse om at disse dokumenter var korrekt oversatt. Hedi fortalte meg senere at denne oversetteren i grunnen ikke kunne så mye rumensk. Vi fikk da endelig våre visum, og vi reiste så ned med toget og fikk innreise til USA ved St. Albans i Vermont. Da jeg kom til instituttet neste dag viste det seg at Turán fremdeles var der. Han hadde gått igjennom mitt bevis for aritmetiske progresjoner, som jeg hadde fortalt ham om, og han hadde også nevnt formelen (4). I mellomtiden mens jeg var i Montreal var også Erdös kommet til Princeton, og han sa at han var interessert i denne formelen (4), som han kalte en ulikhet. Jeg kalte den alltid en likhet, det var en asymptotisk formel. Vel, man kan si at det er en ulikhet ved at det er større enn et utrykk hvis du setter minus en konstant ganger dette, eller mindre hvis du setter pluss. Men jeg har alltid kalt en slik formel en asymptotisk ligning, ikke en ulikhet. Men han kalte den en ulikhet. Han ville prøve om han kunne vise at det fantes primtall mellom x og $x(1+\epsilon)$, der ϵ er vilkårlig liten, dersom x var tilstrekkelig stor. Vel, jeg sa at jeg hadde ingenting imot det. Jeg holdt ikke på med å arbeide med noe sånt den gangen. Jeg hadde i grunnen forlatt det problemet da jeg hadde funnet ut om dette med paritet, og innsett at dette forsøket som jeg gjorde med det forholdet (1), som jeg skrev opp først, ikke ville føre frem, altså at jeg ikke kunne gjøre det mindre enn 4.

Så du hadde ikke primtallsetningen i tankene akkurat da?

Jo, jeg hadde primtallsetningen i tankene, det var mitt mål ut fra denne formelen (4) jeg hadde. Jeg sa at jeg ikke hadde noe imot at han prøvde å gjøre dette, og jeg gjorde noen bemerkninger som ville 'discourage' ham. Jeg sa at han skulle ikke være så alt for optimistisk at det var så mye annet som kunne sluttes ut fra dette. Men så etter et par dager så nevnte Erdös at han hadde et bevis for at mellom x og $x(1+\epsilon)$ var det primtall, og han ga meg noen av detaljene hvordan beviset gikk. Jeg hadde tidligere oppnådd en del resultater. For eksempel, hvis man tar funksjonen $\psi(x)$, som er summen av logaritmene til primtallene mindre enn x, altså

$$\psi(x) = \sum_{p<x} \log p \tag{7}$$

og betrakter lim sup og lim inf av $\frac{\psi(x)}{x}$, og kaller det henholdsvis A og a, så hadde jeg sluttet at $A + a = 2$. Det passer jo veldig bra at begge av dem skulle være 1, selvfølgelig, og det ville gi et bevis for primtallsatsen. Man finner lett at det er veldig usannsynlig at de er forkjellige fra hverandre, siden det vil føre til en veldig merkverdig fordeling av tallene med like antall primtallfaktorer og tallene med et ulike antall primtallfaktorer, og også en veldig merkverdig fordeling av primtallene. Vel, jeg oppdaget at jeg kunne inkorporere hans resultat, som faktisk sa mer enn at det fantes primtall mellom x og $x(a + \epsilon)$ − det resultatet i seg selv ville ikke ha vært tilstrekkelig for meg − i det som jeg hadde holdt på med, og at det kunne lede meg til et bevis for at A og a er like, slik at de må være 1, selvfølgelig, og det er jo ekvivalent med primtallsatsen at $\frac{\psi(x)}{x}$ går mot 1 når x går mot uendelig. Så jeg nevnte til Erdös neste dag at jeg kunne bruke hans resultat for å fullføre et bevis for primtallsatsen − et elementært bevis. Vi snakket noe mer om dette, og det viste seg at man kunne på en måte unngå å bruke hans resultat, men å bruke noen av de idéene han hadde brukt, for å få et noe mer direkte og kortere bevis. Jeg hadde egentlig ikke tenkt å innlede noe samarbeid med han . Han spurte meg om vi skulle gå gjennom dette beviset, og jeg tenkte at han da mente at vi skulle gjennom det med et par folk her ved instituttet som var interessert i tallteori. Det var Chowla fra India, og en som het Ernst Straus, som var Einsteins assistent. Straus var noe interessert i tallteori. Turán var reist på fredagen. Jeg sa ok, og kom over om kvelden for å gå gjennom disse tingene. Men det viste seg at Erdös hadde annonsert dette på universitetet, og istedenfor en liten uformell gruppe som jeg trodde det skulle være, så var det et fullt auditorium. Jeg gikk igjennom de første delene som jeg hadde hatt tidligere, og så gikk Erdös gjennom sin del, og til slutt så fullførte jeg beviset ved å kombinere hans resultat med mitt. Etter noen dager så reiste jeg opp til Syracuse for å se etter en leilighet, og dessuten jeg hadde lovet dem at jeg ville komme opp å undervise på sommerskolen og ta meg av ingeniører i hva de kalte 'advanced calculus'. Dette var i 1948. Jeg kom til instituttet i 1947, og jeg var altså ferdig med mitt første år her i Princeton. Jeg var tilbudt å være i Princeton ett år til, men jeg syntes det kunne være interessant å prøve en jobb i Syracuse. De ville betale noe mer, og dessuten kunne det være interessant å undervise ved et amerikansk universitet. De lovet at de skulle skaffe Hedi en jobb der også, noe som hun ville sette pris på. Så vi dro opp dit. Det tok en tid før jeg fikk skaffet en leilighet, så jeg bodde hos en kollega i mellomtiden. Jeg begynte å høre fra forskjellige kanter at de jo bare nevnte Erdös sitt navn i forbindelse med det elementære beviset for primtallsetningen, så jeg skrev et brev til Erdös og fortalte ham hvordan jeg ville gå fram. Han hadde i mellomtiden holdt noen foredrag om dette her i USA, men selv må jeg si at jeg ikke snakket mer om dette siden i Princeton. Jeg hadde undervisningen, og så var det dette med å skaffe leilighet som tok mye tid. Etter en tid så begynte jeg å maskinskrive mitt bevis om den aritmetiske progresjonen, og jeg forsøkte å forenkle beviset for primtallsetningen. Jeg fant jo snart et bevis som jeg foretrakk som ikke brukte øvre og nedre limes, og som var mer direkte. Det var konstruktivt, og det var dette beviset jeg da begynte å skrive opp, samtidig som jeg også skrev opp dette med den aritmetiske progresjonen.[1] Jeg skrev til Erdös at vi kunne publisere hver for

[1]Atle Selberg skrev et åtte-siders brev fra Syracuse, datert 26 september, 1948, til sin bror Sigmund i Norge, der han skisserer det elementære beviset for primtallsetningen. Brevet bifogas denna artikel.

oss, slik at jeg kunne la hans arbeide komme først, hvis han ville publisere det resultatet som jeg hadde brukt opprinnelig. Så ville jeg publisere et arbeide hvor jeg først skisserte det bevis som brukte hans resultat, og etterpå gi det bevis som jeg var mer fornøyd med og som ikke brukte noen av hans ting. Men han insisterte på å bli involvert mer direkte i dette.

Hva svarte Erdös ellers på det brevet du sendte han?
Han svarte bare at han anså at vi skulle gjøre som Hardy og Littlewood. Men vi hadde jo aldri inngått noen avtale. Vi hadde egentlig ikke hatt noe samarbeid. Det var helt tilfeldig at han kom inn i dette her, det var ikke min mening at han skulle hatt tilgang til dette.

Det er øyensynlig så at Hardy og Littlewood hadde en avtale om at når de arbeidet sammen om noen ting så skulle de begge ha lik anerkjennelse for resultatet. Det er vel og bra de hadde en avtale, og de arbeidet sammen. Erdös og jeg hadde aldri samarbeidet om noe egentlig. Det var den diskusjonen vi hadde holdt etter at jeg hadde funnet det første bevis på primtallssetningen ved å bruke hans resultat. Det var i grunnen kanskje det eneste som kunne kalles litt samarbeid, men vi hadde aldri noen avtale om at vi ville 'share alike everything'. Jeg må si jeg hadde aldri noen tanke om å samarbeide med noen. Jeg har et felles arbeide, og det var med Chowla, men jeg må si det at det var Chowla som først kom til meg med et spørsmål. Han var interessert i å beregne L-funksjonen som hører til den største diskriminant av en imaginær kvadratisk tallkropp − den største diskriminant som har klassetall 1. Diskriminanten er 163, og han ville gjerne finne en måte å evaluere den L-funksjonen som hører til den kvadratiske karakteren for denne modul i punktet 1/2, og se om det var en positiv eller negativ verdi. Hvis det kom ut negativt så ville det være et nullpunkt som ikke var på linjen 1/2, men mellom 1/2 og 1 noe sted. Det var så at jeg tilfeldigvis hadde en formel som skulle gjøre det ganske enkelt å gjøre en numerisk beregning, der kunne brukes til hvilken som helst zetafunksjon av en positiv definit kvadratisk form i to variable. Jeg ga den formelen til Chowla, og han kom tilbake etter ikke så lang tid og hadde funnet at det ga negativ verdi i punktet 1/2, så det måtte være nullpunkt som ikke var på linjen 1/2. Jeg funderte litt på dette og så gjennom detaljene.

Saken er den at det fra gammelt av eksisterer to teorier for kvadratiske former, altså binære former. Det er en hvor du har midtkoeffisienten med 2 foran seg, altså $Ax^2+2Bxy+Cy^2$, og det er en annen hvor du betrakter formen $Ax^2+Bxy+Cy^2$, og hva du kaller diskriminanten er noe forskjellig avhengende av hvilken av disse to du bruker. I det ene tilfellet er det $AC-B^2$, og i det andre tilfellet er det $4AC-B^2$. Min formel hadde vært utviklet egentlig med den mindre diskriminanten, men Chowla hadde satt inn en diskriminant som egentlig var for stor i formelen, og det viste seg da han skiftet til den andre så kom det ut en svært liten, men positiv verdi. Så det var ikke noe nullpunkt. Ved å se på disse tingene så kom vi på en del annet. Jeg mener, ved ikke å betrakte punktet 1/2, men punktet 1, og se på residuet der når man tar vekk denne zeta-funksjonen som inngår i den Epsteinske. Epsteins zeta-funksjon er i virkeligheten zeta-funksjonen av den kvadratiske kroppen når klassetallet er 1, så den har et Euler-produkt som har zeta-funksjonen og en L-funksjon med kvadratisk karakter. Hvis du tar ut zeta-funksjonen så sitter du igjen med verdien av L-funksjonen i punktet 1. Vi hadde da et uttrykk for det ut fra denne formelen, og det viste seg at det var i virkeligheten tilgangen til

et ganske interessant resultat om periodene av elliptiske funksjoner med kompleks multiplikasjon, i den klassiske formen, altså.
Man betrakter periodene. Hvis du bruker den gamle Jacobi-formen – som også ble brukt av Abel – så får du at periodene alltid kan uttrykkes ved et algebraisk tall multiplisert med et produkt av gammafunksjoner. Dette var bare kjent i to spesialtilfeller før, nemlig hvis du tar elliptiske integraler av formen $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}}$, det svarer til lemniskatebuer, og det forefinnes her kompleks multiplikasjon. Det andre tilfellet, der det også er kompleks multiplikasjon, er hvis du har integralet $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$. Begge disse var klassisk kjent. Integralene fra 0 til 1, for eksempel, kunne uttrykkes ved gammafunksjonen for visse rasjonale verdier. Men dette var altså et mer generelt resultat. Dersom klassetallet var 1 fikk vi et ganske enkelt uttrykk. Men jeg generaliserte resultatet noe så at det gjaldt også hvis klassetallet var større enn 1. Da ble formelen litt mer komplisert, men fremdeles hadde formelen et algebraisk tall ganger et produkt av gammafunksjoner med et rasjonalt argument i seg. Det var et ganske interessant resultat. Jeg ville at Chowla skulle sette sitt navn på det først, men det ville han absolutt ikke, så det ble publisert med navnerekkefølge Selberg og Chowla. Det er jo helt ulogisk, istedenfor å ha det i alfabetisk orden. Jeg fikk ham til å skrive det opp, dvs. jeg skrev opp den delen som behandlet tilfellet hvor klassetallet var større enn 1, han var ikke riktig vant med en del av det som inngikk der. Men han regnet ut noen eksempler hvor klassetallet var 1 i eksplisitt form, hvor han også bestemte den algebraiske faktoren eksplisitt. Generelt vet man at det er et algebraisk tall. Det lar seg uttrykke ved rottegn, men det kan være ganske komplisert.

Det er det eneste arbeidet du har publisert felles sammen med noen?
Ja, men den første impuls kom fra Chowla. Hvis ikke han hadde kommet og sagt hva han forsøkte å gjøre, og jeg hadde husket på denne formelen som jeg hadde funnet i noen annen forbindelse, så ville det egentlig ikke kommet noe ut av det. Det kan vel også være at hvis det viste seg at vi virkelig hadde fått en negativ verdi først, så hadde vi kanskje nøyd oss med det og ikke gjort noe mer med det, bare konstatert at vi hadde motbevist Riemanns hypotese for denne L-funksjonen.

Tilbake til Erdös. Er det riktig å si at det var et arbeidsuhell at han så din fundamentale formel?
Vel, ja. Dere skjønner, Turán var blitt en god venn av meg mens han var i USA, og jeg visste at han skulle reise tilbake til Ungarn. Jeg trodde at han ville ha vært reist når jeg kom tilbake fra Montreal, men det viste seg at han fremdeles var her. Erdös var også kommet her i mellomtiden, og han var kommet inn i dette via Turán. Jeg hadde gått gjennom mitt bevis for den aritmetiske progresjon for Turán, og han hadde stilt et spørsmål, og jeg hadde nevnt denne formelen (4) jeg hadde.

Du sa ikke til Turán at han ikke skulle fortelle om denne formelen videre?
Nei, jeg sa ikke det. For det første, Erdös var ikke der når jeg snakket med Turán, og dessuten trodde jeg Turán ville være reist tilbake til Ungarn innen jeg returnerte fra Montreal. Jeg visste heller ikke at Erdös ville komme til Princeton da på et besøk av flere ukers varighet. Men disse to var jo kjent fra Ungarn, mest fra før krigen. Erdös var ikke i Ungarn under krigen, men Turán var der under krigen.

Beklaget Turán i ettertid det som hendte siden?
Nei, dere skjønner Erdös var hans venn så han ville nødig støte ham. Jeg holdt gode relasjoner med Turán etterpå, men vi unngikk å snakke om dette punkt senere. Erdös svarte som sagt på mitt brev og henviste til Hardy og Littlewood, noe jeg syntes var irrelevant i dette tilfellet - vi var ikke Hardy og Littlewood. Jeg vet ikke hvem han tenkte av oss som var Hardy og hvem som var Littlewood?

Du sa tidligere at da Erdös snakket med deg, så prøvde du å 'discourage' ham littegrann, kan du spesifisere det litt mer?
Jeg sa den gang at man kunne gi et moteksempel, nemlig at en analog formel skulle implisere ett eller annet. La oss se på den kontinuerlige analogi. La oss si at man har en formel som

$$\int_0^x \log t df(t) + \int_0^x f(\frac{x}{t}) df(t) = 2x \log x + 0(x) \tag{8}$$

Om man har noe sånt som dette, så er det ikke nødvendigvis så at $f(x)$ er asymptotisk til x. Jeg kan konstruere moteksempler til det, men funksjonene $f(x)$ jeg da benytter er ikke helt monotone. Derimot er funksjonen $\psi(x) = \sum_{p\leq x} \log p$ en monoton funksjon, og det er monotone funksjoner som er relevante for tallteoretiske anvendelser. Jeg prøvde liksom å skremme ham litt vekk fra selve primtallsatsen. Det var jo, kan man si, litt uhederlig at jeg ikke sa at mitt moteksempel ikke var riktig monotont.

Vi skjønner psykologien særledes godt. Du vet at du er nær et bevis for primtallsetningen, og vil ikke ha noe innblanding.
Jeg ville ikke ha noen innblanding der. Jeg foreslo for Erdös at vi kunne hver for oss publisere hva vi hadde gjort. Han kunne ha førsteretten på å publisere sitt resultat, så det kunne kommet ut før mitt resultat, som egentlig ikke trengte hans, men jeg ville gi en full skissering av hvordan jeg først hadde brukt hans resultat. Det var også det jeg gjorde. Hermann Weyl ble en slags mellommann. Da Hermann Weyl tok avskjed her i Princeron ga han meg noen relevante dokumenter.[2] Det er bare to andre personer, tror jeg,som har fått se dem [dokumentene til Weyl]. Jeg har ikke snakket noe større om dette her til folk, fordi jeg synes det er en ubehagelig affære å snakke om. Weyl hadde hørt hvordan saken hang sammen, og han tok stort sett mitt parti, men han mente at jeg kunne være generøs og la Erdös publisere sitt arbeide. Det hadde jeg heller ingenting imot at han kunne gjøre. Men saken er den at Erdös hadde på den tiden på en måte allerede publisert. Han hadde først holdt noen foredrag i Boston, ved MIT tror jeg, og senere hadde han reist til Europa og holdt noen foredrag i Holland hvor van der Corput var. Og van der Corput skrev opp et referat av hans foredrag. Det var i grunnen den første publikasjonen. Det kom allerede høsten 1948, og mitt arbeide kom først om våren 1949. Jeg sendte mitt til Annals of Mathematics. Min opprinnelige idé var at begge kunne publisere i Annals of Mathematics, men det ble til at Erdös ville publisere i Bulletin of the

[2]Selberg tillot oss å ta kopier av to av Weyl's brev til Nathan Jacobson, redaktør av Bulletin of the AMS − et av disse var referee-rapporten av Erdös arbeide. Vi fikk Selberg's tillatelse til å gjøre med disse brevene som vi ønsket. Siden disse har stor historisk interesse, og siden deler av disse er allerede lekket ut og finnes i bøker som omtaler denne kontroversen, så gjengir vi brevene her.

American Mathematical Society, som var redigert av Nathan Jacobson ved Yale University på den tiden. Jacobson sendte Erdös avhandling til Hermann Weyl for at han skulle se på den. Weyl skrev en uttalelse til Jacobson hvor han uttalte at han syntes at Erdös nok ikke riktig var helt ærlig. Han ga krav på litt for mye ifølge Weyl. Det er sannsynlig at dette har noe å gjøre med det jeg senere hørte av Siegel. Han hadde snakket med Erdös før Erdös hadde reist tilbake til Europa. Siegel hadde kommet til Princeton – dette var mens jeg var i Syracuse. Siegel hadde snakket med Erdös og sagt at det måtte være en mulighet å komme til en enighet om dette her på noen måte. Men Erdös hadde sagt: 'What I want is immortality'. Det er jo en helt idiotisk ting, det finnes ingen egentlig udødelighet, ikke engang i matematikken. Jeg mener, hvis navnene bevares så skriver man dem etterhvert ikke med stor bokstav, men med liten, slik som i 'abelian'. Vel, det er ikke mange som vet noe mer om navnene.

Hvorfor ville ikke Erdös sende denne artikkelen til Annals, han også?
Vel, det passet jo ikke lenger med den idé som jeg hadde fremsatt. Jeg mente vi skulle presentere det vi hadde gjort, men han ville ha en del mer involvering enn det. Hermann Weyl skrev senere til Nathan Jacobson at det var uriktig av Erdös å presentere så mye av det som egentlig var gjort av meg. Så Jacobson sa han ville ikke ha dette inkludert i denne publikasjonen til Erdös. Så han avslo å publisere det i Bulletin. Erdös henvendte seg da til en han kjente ved Colombia University som var medlem av National Accademy of Science i Washington, og som hadde rett til å fremlegge det der. Så det kom i deres Proceedings. Dette er ikke et særlig bra sted å publisere matematikk, siden det er et sted som inneholder alle slags artikler innen vitenskap. Det er ikke ofte matematikere leser dette tidsskriftet. Men det ble jo publisert da, og forholdsvis fort. Jeg vet ikke hva som kom ut først, mitt eller hans. Men den aller første publikasjonen var den som van der Corput fikk i stand og som kom om høsten 1948. Jeg har en kopi av det. Jeg har liggende en filenoe sted som har mye av dette her i seg, men jeg tror at papirene er noe blandet opp. Ja, det er denne her. Jeg tror van der Corput har omgjort stoffet en del, at det ikke var slik Erdös presenterte det. Han har gitt det sin egen form, men det var i alle fall den første publikasjonen. Det er kanskje ikke så mange som vet om denne publikasjonen?

Den ble bare sirkulert slik?
Ja, han sendte meg en kopi av den. Han nevner mitt navn først, han tar det ikke i alfabetisk orden. Jeg har forøvrig aldri truffet van der Corput.

Selberg-Erdös, Selberg-Erdös. Han, dvs. van der Corput, nevner deg konsekvent først!
Han forsto, og han har øyensynlig endret noe på den fremstillingsformen som Erdös gir. Jeg må si, jeg har aldri lest detaljene – det er besværlig å lese andres arbeider.

Hardy trodde jo ikke det var mulig å gi et elementært bevis for primtallsetningen.
Ja, det var ikke så merkverdig i grunnen. Men det ble vel en hel det folk som skapte stort oppstuss om dette. Erdös skapte jo en hel del propaganda for seg selv. Jeg var i Syracuse, og jeg foreleste ikke om dette på noe sted. Faktum er at jeg har egentlig aldri holdt et foredrag om det elementære beviset for primtallsatsen. Jeg

har holdt et foredrag et par ganger om et elementært bevis for det vesentlige av det Beurling oppnådde av resultater om såkalte generaliserte primtall. Det elementære beviset gir et noe svakere resultat enn Beurlings. Jeg er ikke klar over om det er mulig å gi – men man skulle tro at det er mulig – et elementært bevis som skulle gi en skarpere form lik den Beurling hadde.

Kan du foreklare hva et generalisert primtall er?
Beurling foreleste om dette på den Skandinaviske Kongress i Helsingfors i 1938, og jeg så senere på hans arbeid. Så du har et sett av reelle tall $1 < p_1 < p_2 < p_3 < \cdots$ osv., og du danner alle mulige produkter $\{n_k\}_k$ av disse, og ordner dem etter størrelsen, så du får $1 \leq n_1 \leq n_2 \leq n_3 \leq \cdots$. Du kaller antallet av p'ene opp til x for $\pi(x)$, og antallet av n'ene som du kan danne opp til x kaller du $N(x)$. Spørsmålet er så, hvis du antar at $N(x)$ forholder seg asymptotisk som en konstant ganger x, pluss et restledd av formen $0(\frac{x}{\log^\alpha x})$, altså

$$N(x) = Ax + 0(\frac{x}{\log^\alpha}) \tag{9}$$

hva kan du slutte om $\pi(x)$? Beurling viste at for $\alpha > 3/2$, så var $\pi(x)$ asymptotisk lik $\frac{x}{\log x}$, altså svarende til primtallsatsen. Han viste også mer. Hvis dette, det vil si (9), holder for alle α, så kan du gjøre tilsvarende skarpere ting. Da har du at $\pi(x)$ er lik integrallogaritmen av x pluss $o(\frac{x}{\log^\beta x})$ for alle β, altså

$$\pi(x) = li(x) + o(\frac{x}{\log^\beta x}) \tag{10}$$

Integrallogaritmen kan defineres på mange måter, men la oss si at $li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$.

Men er det slik at Beurlings bevis bruker primtallsatsen?
Nei, det bruker ikke primtallsatsen. Beurlings bevis er et analytisk bevis. Jeg kunne lage et elementært bevis, men jeg må anta at restleddet her er $o(\frac{x}{\log^2 x})$, da kan jeg få det til.
Jeg har ofte fundert på om det var mulig å forbedre mitt bevis så at det gjaldt for $\alpha > 3/2$, men jeg har ikke hatt tålmodigheten til å utarbeide det. Jeg kan ikke innse hvorfor det ikke skulle være mulig.

Intervjun fortsätter i Normat 3/2008. (Red).

1 Syracuse 26/9 – 48

Kjære Sigmund,

Sender dig hermed en skisse av beviset, eller rettere et av bevisene eftersom den siste del kan varieres svært meget.

Definisjoner: (1) $\vartheta(x) = \sum_{p\le x} \log p$

(2) $\vartheta(x) = x + R(x)$, p, q og r betyr alltid primtall. Ellers bruker jeg at

(3) $\sum_{p\le x} \frac{\log p}{p} = \log x + O(1)$, samt (3') $\vartheta(x) = O(x)$

1. Bevis av grunnleggende formler: La x positiv og d pos. helt tall og sett

$$\lambda_d = \lambda_{d,x} = \mu(d)\log^2\frac{x}{d},$$

og hvis n er hel, positiv

$$\theta_n = \theta_{n,x} = \sum_{d|n}\lambda_d$$

Da er

$$(4)\quad \theta_n = \begin{cases} \log^2 x, & \text{for } n=1 \\ \log p \log\frac{x^2}{p}, & \text{for } n \text{ potens av primtall } p. \\ 2\log p\log q, & \text{for } n = p^\alpha q^\beta, \\ 0, & \text{for alle andre } n. \end{cases}$$

De 3 første deler av (4) følger umiddelbart av definisjonen, den siste del følger ved induksjon, idet vi for enhelhets skyld antar n kvadrat-fri, har vi for $n = n'p$

$$\theta_{n,x} = \theta_{\frac{n}{p},x} - \theta_{\frac{n}{p},\frac{x}{p}}$$

Av dette følger siste del av (4) enkelt.

2

Nu behøvet ulighet

$$(5)\quad \sum_{n\le x}\theta_n = \sum_{n\le x}\sum_{d|n}\lambda_d = \sum_{d\le x}\lambda_d\left[\frac{x}{d}\right] =$$

$$= x\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d}\log^2\frac{x}{d} + O\left(\sum_{d\le x}\log^2\frac{x}{d}\right) =$$

$$= x\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d}\log^2\frac{x}{d} + O(x).$$

På den annen side fra (4)

$$\sum_{n\le x}\theta_n = \log^2 x + \sum_{p^\alpha\le x}\log p\log\frac{x^2}{p} + \sum_{\substack{p^\alpha q^\beta\le x\\ p\ne q}}\log p\log q^{(x)} = \sum_{p\le x}\log^2 p +$$

$$+ \sum_{pq\le x}\log p\log q + O(x),$$

hev er rest leddet funnet vesentlig ved hjelp av (3) og (3'). Følgelig fra (5)

$$(6)\quad \sum_{p\le x}\log^2 p + \sum_{pq\le x}\log p\log q =$$

$$= x\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d}\log^2\frac{x}{d} + O(x).$$

Det gjenstår nu å opskatte summen på høire side. Dette kan gjøres ved å innføre formelen: ($\tau(\nu)$ antall divisorer i ν)

$$\log^2\frac{x}{d} = 2\sum_{\nu\le\frac{x}{d}}\frac{\tau(\nu)}{\nu} + c_1\sum_{\nu<\frac{x}{d}}\frac{1}{\nu} + c_2 + O\left(\left(\frac{x}{d}\right)^{-\frac{1}{4}}\right)$$

x) Jeg sløifer faktoren 2 foran dette ledd, idet jeg regner $p^\alpha q^\beta$ og $q^\beta p^\alpha$ for to forskjellige

3

som lett vises (c'ene er konstanter). Innføres dette i summen, får man efter en del omforminger (idet man bruker $\sum_{d/n}\mu(d)=0$ for $n\neq 1$, og $\sum_{d/n}\mu(d)\,\tau(\frac{n}{d})=1$ for alle n) at

$$\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d}\log^2\frac{x}{d} = 2\sum_{n\le x}\frac{1}{n} + c_1 + c_2\sum_{d\le x}\frac{\mu(d)}{d} + O\Big(x^{-\frac{1}{4}}\sum_{d\le x} d^{-\frac{3}{4}}\Big) = 2\log x + O(1).$$

(6) gir nu formelen

(7) $\sum_{p\le x}\log^2 p + \sum_{pq\le x}\log p\log q = 2x\log x + O(x)$.

Dette er den vesentlige nye ting, fra denne formel fører flere veier til primtall-satsen. Den mest elementære (idet de andre bruker setningen om at en begrenset tall~~rekke~~følge har en limes sup. og lim inf) er følgende: Ved partiell summasjon får vi fra (7)

(8) $\sum_{p\le x}\log p + \sum_{pq\le x}\frac{\log p\log q}{\log pq} = 2x + O\Big(\frac{x}{\log x}\Big)$

og fra dette fåes

(9) $\sum_{pq\le x}\log p\log q = \sum_{p\le x}\log p\cdot\sum_{q\le \frac{x}{p}}\log q = 2x\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p}$

$-\sum_{p\le x}\log p\sum_{qr\le\frac{x}{p}}\frac{\log q\log r}{\log qr} + O\Big(x\sum_{p\le x}\frac{\log p}{p(1+\log\frac{x}{p})}\Big)$

$= 2x\log x - \sum_{pqr\le x}\frac{\log p\log q\log r}{\log qr} + O(x\log\log x)$

$= 2x\log x - \sum_{qr\le x}\frac{\log q\log r}{\log qr}\,\vartheta\Big(\frac{x}{qr}\Big) + O(x\log\log x)$

(7) kan også skrives ved enkel omforma

4

(10) $\vartheta(x)\log x = 2x\log x - \sum_{p\le x}\log p\,\vartheta\Big(\frac{x}{p}\Big) + O(x)$

og hvis 2net ledd i (7) erstattes av (9):

(11) $\vartheta(x)\log x = \sum_{pq\le x}\frac{\log p\log q}{\log pq}\,\vartheta\Big(\frac{x}{pq}\Big) + O(x\log\log x)$

Nu innføres i (10) og (11) R istedet for ϑ ved (2). Dette gir efter enkle oppskrivninger

(10') $R(x)\log x = -\sum_{p\le x}\log p\,R\Big(\frac{x}{p}\Big) + O(x)$

og

(11') $R(x)\log x = \sum_{pq\le x}\frac{\log p\log q}{\log pq}R\Big(\frac{x}{pq}\Big) + O(x\log\log x)$

Herav

(12) $2|R(x)|\log x \le \sum_{p\le x}\log p\Big|R\Big(\frac{x}{p}\Big)\Big| +$

$+\sum_{pq\le x}\frac{\log p\log q}{\log pq}\Big|R\Big(\frac{x}{pq}\Big)\Big| + O(x\log\log x)$.

Hvorav ved partiell summasjon,

$2|R(x)|\log x \le \sum_{n\le x}\Big\{\sum_{p\le n}\log p +$

$\sum_{pq\le n}\frac{\log p\log q}{\log pq}\Big\}\cdot\Big\{\Big|R\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big| - \Big|R\Big(\frac{x}{n+1}\Big)\Big|\Big\}$

$+ O(x\log\log x) \underbrace{=}_{\text{bruker her (8)}} 2\sum_{n\le x} n\Big\{\Big|R\Big(\frac{x}{n}\Big)\Big| - \Big|R\Big(\frac{x}{n+1}\Big)\Big|\Big\}$

$+ O\Big(\sum_{n\le x}\frac{n}{1+\log n}\Big|R\Big(\frac{x}{n}\Big) - R\Big(\frac{x}{n+1}\Big)\Big|\Big)$

$+ O(x\log\log x) =$

5.

$$= 2\sum_{n\le x} \left|R\left(\frac{x}{n}\right)\right| + O\left(\sum_{n\le x}\frac{n}{1+\log n}\left(\vartheta\left(\frac{x}{n}\right)-\vartheta\left(\frac{x}{n+1}\right)\right)\right)$$

$$+ O\left(x\sum_{n\le x}\frac{1}{(n+1)(1+\log n)}\right) + O(x\log\log x) =$$

$$= 2\sum_{n\le x} \left|R\left(\frac{x}{n}\right)\right| + O\left(\sum_{n\le x}\frac{1}{1+\log n}\,\vartheta\left(\frac{x}{n}\right)\right)$$

$$+ O(x\log\log x) = 2\sum_{n\le x} \left|R\left(\frac{x}{n}\right)\right| + O(x\log\log x)$$

Slik at:

$$(13)\quad |R(x)| \le \frac{1}{\log x}\sum_{n\le x}\left|R\left(\frac{x}{n}\right)\right| + O\left(x\,\frac{\log\log x}{\log x}\right).$$

---

2. Vi henger nu nogen egenskaper ved $R(x)$. Av (3) fåes ved partiell summasjon at

$$\sum_{n\le x}\frac{\vartheta(n)}{n^2} = \log x + O(1)$$

hvorav

$$\sum_{n\le x}\frac{R(n)}{n^2} = O(1) \text{ eller for vilkårlige}$$

$a_1, a_2 > 4$,

$$\left|\sum_{a_1\le n\le a_2}\frac{R(n)}{n^2}\right| < K$$

hvor K er absolut positiv konstant.

Av dette fåes, at hvis $R(n)$ ikke skifter tegn i intervallet, må der være et a' med $a_1\le a'\le a_2$, og

$$(14)\quad \left|\frac{R(a')}{a'}\right| < \frac{K'}{\log\frac{a_2}{a_1}}$$

hvor K' er abs. pos. konst. Siden $R(n)$

6.

er praktisk talt kontinuerlig (endrer sig høist om $\log n$ når n vokser med 1) ser man lett at (14) holder altid også om $R(n)$ skifter fortegn, altså altid.

La $\delta>0$ være et vilkårlig ~~fast~~ tall <1

Da vil ifølge (14) ethvert interval av formen $(x, e^{\frac{K'}{\delta}}x)$ med $x>4$ inneholde et y, med

$$(15)\quad |R(y)| < \delta y$$

Av (8) fåes for $y<y'$

$$0 \le \sum_{y<p\le y'}\log p \le 2(y'-y) + O\left(\frac{y'}{\log y'}\right).$$

hvorav enkelt fåes

$$|R(y')-R(y)| \le |y'-y| + O\left(\frac{y'}{\log y'}\right)$$

Herav sees at om $\frac{y}{2}\le y'\le 2y$ vil

$$|R(y')-R(y)| \le |y'-y| + O\left(\frac{y'}{\log x}\right)$$

og fra (15)

$$\left|\frac{R(y')}{y'}\right| \le \delta\frac{y}{y'} + \left|1-\frac{y}{y'}\right| + \frac{K''}{\log x}$$

hvor K'' er abs. pos. konst. Herav for $x > e^{\frac{K''}{\delta}}$, og $e^{-\frac{\delta}{2}} \le \frac{y}{y'} \le e^{\frac{\delta}{2}}$

$$\left|\frac{R(y')}{y'}\right| < 4\delta \quad\text{eller}\quad |R(y')| < 4\delta y'$$

Av dette sees at for $x > e^{\frac{K''}{\delta}}$ inneholder ethvert interval $(x, e^{\frac{K'}{\delta}}x)$ et del-interval $(y_1, e^{\frac{\delta}{2}}y_1)$ slik at for $y_1 \le z \le e^{\frac{\delta}{2}}y_1$ har vi $|R(z)| < 4\delta z$.

3. Bevis av primtallsats. Vi vil bevise at

$$\lim_{x\to\infty}\frac{|R(x)|}{x} = 0$$

hvilket er ekvivalent med primtallsatsen.

Vi har at

(16) $|R(x)| < Bx$ for $x \ge 1$

hvor B er en abs. pos. konst.

Anta nu at for et positivt $\alpha < 8$ har vi

(17) $|R(x)| < \alpha x$ for $x > x_0$

Vi velger nu $\delta = \frac{\alpha}{8}$ og kaller $e^{\frac{K'}{\delta}}$ for ρ, videre kan vi anta at $x_0 > e^{\frac{K''}{\delta}}$. ~~Vi kaller~~ Da har vi ifølge forrige avsnitt at ethvert interval $(x, \rho x)$ med $x > x_0$ inneholder et del interval $(y, e^{\frac{\delta}{2}}y)$ ~~hvor~~ slik at $|R(z)| < \frac{\alpha}{2}z$ hvis z tilhører dette del-intervallet.

Nu gir (13) med (16), (17) og det sistnevnte resultat at.

$$|R(x)| \le B\frac{x}{\lg x}\sum_{\frac{x}{x_0}< n\le x}\frac{1}{n} + \frac{1}{\lg x}\sum_{n\le\frac{x}{x_0}}\left|R\left(\frac{x}{n}\right)\right|$$

$$+ O\left(\frac{x}{\sqrt{\lg x}}\right) < O\left(\frac{x}{\lg x}\lg x_0\right) + \frac{x}{\lg x}\sum_{n\le\frac{x}{x_0}}\frac{1}{n}\left|\frac{n}{x}R\left(\frac{x}{n}\right)\right|$$

$$+ O\left(\frac{x}{\sqrt{\lg x}}\right) < \frac{\alpha x}{\lg x}\sum_{n\le\frac{x}{x_0}}\frac{1}{n} -$$

$$- \frac{\alpha x}{2\lg x}\sum_{\rho^\nu\le\frac{x}{x_0}}\ \sum_{e^{-\frac{\delta}{2}}\rho^\nu\le n\le\rho^\nu}\frac{1}{n} + O\left(\frac{x}{\sqrt{\lg x}}\right) =$$

$$= \alpha x - \frac{\alpha\delta x}{4\lg x}\,\frac{\lg\frac{x}{x_0}}{\lg\rho} + O\left(\frac{x}{\sqrt{\lg x}}\right)$$

$$= \alpha\left(1 - \frac{\delta}{4\lg\rho}\right)x + O\left(\frac{x}{\sqrt{\lg x}}\right)$$

$$= \alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{256K'}\right)x + O\left(\frac{x}{\sqrt{\lg x}}\right) <$$

$$< \alpha\left(1 - \frac{\alpha^2}{300K'}\right)x \quad \text{for } x > x_1$$

Sammenlignes dette med (17) ser man da iterasjonen $\alpha_{n+1} = \alpha_n\left(1 - \frac{\alpha_n^2}{300K'}\right)$ konvergerer mot null, at $\frac{|R(x)|}{x} \to 0$ hv. sk. bev.

Atle.

February 15, 1949

Dear Jake:

It is very unfortunate that Erdős insists on having his paper published in the present form. I had hoped that when he carried out his plan he would see for himself that it doesn't work and that what he wrote down sounds somewhat ridiculous. I had questioned whether he has the right to publish things which are admittedly Selberg's, but which the latter considers as intermediary and therefore not fit for publication. He argues that if that principle were upheld in all circumstances, one of two collaborators in a mathematical enterprise could prevent publication if he so wants. I would answer: So what of it? If you enter into collaboration with another, you ought to have enough respect for him to run that risk. But in the present case it is not Selberg's stubbornness that would prevent publication of those intermediate results, but his good sense for what is mature and what is not. I really think that Erdős's behavior is quite unreasonable, and if I were the responsible editor I think I would not be afraid of rejecting his paper in this form.

But there is another aspect of the matter. It is probably not as easy as Erdős imagines to have his paper published in time in this country if the Bulletin rejects it. And we should avoid even the appearance of trying to suppress the opinion of one side in the present issue. So it may be better to let Erdős have his way. No great harm can be done by that. Selberg may feel offended and may protest (and that would be his right), but I am quite sure that the two papers — Selberg's and Erdős's together — will speak in unmistakable language, and that the one who has really done harm to himself will be Erdős.

But even if you accept the paper you should insist on some changes, especially on a change of the title. I made some suggestions to that effect in my previous letter. The title in its present form is really unfair to Selberg. Moreover, the paper has been drawn up so carelessly that it needs a certain amount of editing.

I return Erdős's letter of February 6 herewith.

Sincerely,

Hermann Weyl

Professor Nathan Jacobson
Amer.Math.Soc.Bulletin
Yale University
New Haven, Conn.
HW:CB

Confidential. 1

P. Erdös, On a new method in elementary number theory which leads to an elementary proof of the prime number theorem.

Erdös's paper is based on a fundamental asymptotic formula F due to A. Selberg, and it leads up to an elementary proof of the prime number theorem P also first obtained by Selberg. Neither the formula F nor the proof of the prime number theorem based on it have as yet been published by Selberg. In the time between the establishment of F and the attainment of P a development took place during which Erdös and Selberg worked in what may be called close competition or collaboration. There is no doubt that, before Selberg reached P, Erdös proved the lemma L described in §2 of this paper. How much help Selberg derived from the ideas involved in this proof and Erdös' communications is not easy to make out, while Erdös depended admittedly very much on Selberg's contributions. I have corresponded with both, have seen copies of the notes which they exchanged and listened to their accounts; and, although I first was inclined to ascribe to Erdös a considerable share in the development, I have finally come to the conclusion that Selberg from beginning to finish followed his own head and was influenced by Erdös only to the extent that he was forced to work at a pace altogether unnatural to him. The two men are of such very different temperament as to make the ensuing misunderstandings almost inevitable. Selberg would have liked the whole matter to reach a certain stage of finality before making it public, and he was not inviting help or collaboration when, half reluctantly, he mentioned his asymptotic formula to his friend Turan. I have seen Selberg's MS of his elementary proof of P which he

2

recently submitted to the Annals of Mathematics for publication. From this it is evident that he considered the stage described in Erdös' paper as preliminary only; his proof has now taken on a much more direct and, to my taste, more satisfactory form.

Under these circumstances it would heve been reasonable for Erdös to accept Selberg's offer to have his lemma L and its proof published Before Selberg. E. thought that this did not do full justice to his contribution. In the present paper §3 deals with "Selberg's deduction of the prime number theorem from (2)" and §4 with a "Sketch of Selberg's simplification of the proof of (2)". Erdös is scrupulously fair in giving Selberg his due credit. But has he a right to publish things which are admittedly Selberg's, but which the latter considers as intermediary and therefore not fit for publication? I am sure that everything in Erdös' paper will have "historical" interest only once Selberg's paper is out.

I honestly think, one would do a disservice to Erdös by printing his paper in its present form. After he rejected Selberg-s offer, I see two possibilities only. (1) He publishes his lemma L and its proof and mentions but briefly that it has played an essential role in the development of an elementary proof of the prime number theorem (for which he refers to Selberg's forthcoming paper). Or (2)Erdös writes the story as the participant and eye-witness of an important event would tell it, post festum, as it were, to an audience that already knows the net result (as given in Selberg's paper) and is interested in learning how it all came about. But then Erdös' paper should follow that of Selberg in time and should clearly point out that it describes stages of development that are now definitely superseded.

3

Before coming to such radical conclusions I tried to remedy the situation by alterations of the MS on a smaller scale. The title is certainly misleading and unfair to Selberg. "Report on the development of a new elementary method in ~~n~~umber theory" seems to me a more appropriate title, as it would indicate that the paper reports on something which the author can only partially claim as his own product. For the entire paragraph after formula (3) to the end of page 1 I should substitute something like this: "Such simplifications of the proof of (2) and of the prime number theorem as resulted from discussions during the next days between Selberg and the author are included in this chronological report. Another paper will deal with the application of the method to prime numbers in an arithmetic progression."

I offer these suggestions in case the editors, out of consideration for Erdös and his undeniable merits in this matter, should decide to print his paper essentially in the form in which he has submitted it. In that case some editing seems desirable also on the following pages; the outward appearance of the MS is indicative of the carelessness of its composition. §6 seems to have no heading.

Hermann Weyl