 Normat **56**:3, 122–132 (2008)

# Tangerende sirkler og sirkelvektorer

***Morten Eide***

Matematisk Institutt , UIO
morteid@math.uio.no

I et tidligere nummer av tidsskriftet ser Bengt Ulin[1] på arbelosteoremer for tangerende sirkler. Han nevner flere slike, og konsentrerer seg om å vise Pappos teorem fra en historisk synsvinkel. Det andre teoremene Ulin peker på blir senere behandlet i tidskriftet av Karen Sofie Ronæss [2], og hun finner formler for relasjoner mellom radius til sirklene i ulike tilfeller.

Slike sammenhenger med tangerende sirkler er blitt behandlet av mange i tidens løp, både av amatører og yrkesmatematikere. Fenomenene er tiltalende på den måten at problemstillingene er enkle å overskue, men ofte viser det seg overraskende dypere strukturer når man går inn på disse. Det finnes rent geometriske problemstillinger, blant disse det berømte appoloniosproblemet. Her er oppgaven å konstruere de sirklene som tangerer tre gitte sirkler. Så har vi problemstillinger som innebærer tallforhold slik som i tilfellene nevnt ovenfor.

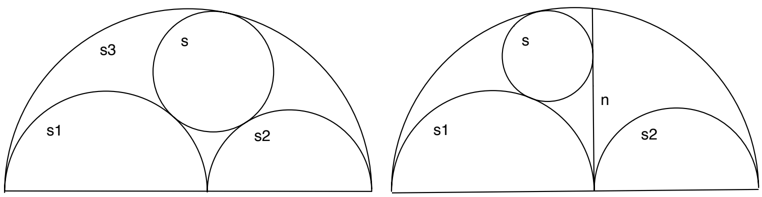
Vi vil her se hvordan fenomenene så og si danner et eget område ved at de slutter seg sammen på rent syntetisk vis. Vi vil så begrunne dette med en svært anvendelig algebra som kan knyttes til fenomenene. Denne algebraen går tilbake til Herman Grassman og William K. Clifford.

## *Noen sirkelteoremer*

Det viser seg at setninger knyttet til tangerende sirkler ofte blir svært enkle når de utrykkes ved de inverse radiene til sirklene. Arbelossetningen får da en enkel form.

**Setning 1** ***Arbelossetning***
*Gitt to sirkler $s_1$ og $s_2$ som tangerer hverandre utvendig, og en sirkel $s_3$ med senter på samme linje som omlutter dem og tangerer dem. En fjerde sirkel $t$ ligger mellom disse og tangerer alle tre. Da er den inverse radien til $t$ gitt ved den inverse radien til de andre sirklene ved*

$$\frac{1}{r_s} = \frac{1}{r_{s_1}} + \frac{1}{r_{s_2}} - \frac{1}{r_{s_3}} \tag{1}$$



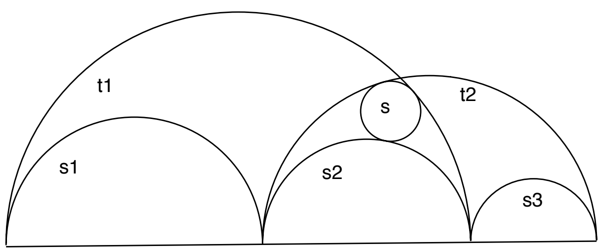

Arkimedes teorem har et enda enklere utrykk

**Setning 2** ***Arkimedes sirkel***
*Gitt to sirkler $s_1$ og $s_2$ som tangerer hverandre utvendig, og en sirkel med senter på samme linje som disse som omlutter dem og tangerer dem. Mellom $s_1$ og $s_2$ er en normal* ***n*** *til linjen mellom sentrene. En sirkel $s$ ligger mellom $s_1$, $s_3$ og $n$, og radien til denne er gitt ved radiene til $s_1$ og $s_2$ ved*

$$\frac{1}{r_s} = \frac{1}{r_{s_1}} + \frac{1}{r_{s_2}} \tag{2}$$

At vi den inverse radien utrykker noe vesentlig ser vi videre ved at teoremene lar seg generalisere på ulike vis. Vi finner en syntese av setningene over ved det vi vil kalle *Dobbel arbelos* setningen.

**Setning 3** ***Dobbel arbelos***
*Gitt tre sirkler $s_1$, $s_2$ og $s_3$ med senter på samme linje som ligger på rad slik at to tangerer den midterste utvendig. En sirkel $t_1$ omslutter $s_1$ og $s_2$, og en sirkel $t_2$ omslutter $s_1$ og $s_2$. Mellom $t_1$, $t_2$ og $s_2$ ligger en sirkel $s$ som tangerer de tre.*

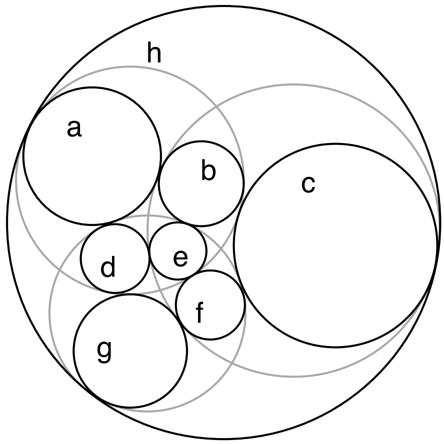



*Da er radien til $s$ gitt ved radiene til $s_1$, $s_2$ og $s_3$ ved*

$$\frac{1}{r_s} = \frac{1}{r_{s_1}} + \frac{1}{r_{s_2}} + \frac{1}{r_{s_3}} \tag{3}$$

Når $t_1$ blir en linje oppstår arkimedes setning , og når den faller sammen med $s_3$ får vi arbelossetningen.
Et annen setning av samme karakter har vi ved relasjonen mellom radiene til de fire innskrevne sirklene i en trekant. Her er summen av de inverse radiene til yttersirklene lik den inverse radien til innersirkelen. En generalisering av den geometriske strukturen her får vi om vi i stedet for linjer har gitt tre sirkler. Som nevnt over får vi her åtte appoloniussirkler som tangerer de tre sirklene, og det viser seg at vi også her har en slående enkel sammenheng mellom de inverse radiene.

**Setning 4** *Vi har gitt tre sirkler, og de åtte* Appolloniussirklene *som tangerer disse tre.*




*Da finnes en lineær relasjon mellom de inverse radiene til disse, gitt en regel for fortegnene. Vi sier da at to sirkler har negativ tangering om de berører hverandre utvendig, og positiv om de omslutter hverandre. Produktet av de tre tangeringene en appoloniussirkel har med de tre opprinnelige sirklene gir fortegnet til radien. Sammenhengen mellom radiene i bildet over er da gitt ved*

$$\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r_d} + \frac{1}{r_e} - \frac{1}{r_f} + \frac{1}{r_g} + \frac{1}{r_h} = 0 \tag{4}$$

Denne sammenhengen går over til setningen med de fire innskrevne sirklene når de tre utgangsirklene blir linjer. Nå de tre utgangsirklene har sentrene på samme linje får vi to grupper som er speilinger av hverandre over linjen. Dermed reduseres sammenhengen mellom radiene til et utrykk med fire ledd, og ved å variere plasseringen til utgangssirklene får vi arbelossetningene. Også flere andre setninger oppstår ved å legge utgangssirklene på bestemte vis.

Ved rene geometriske bevegelser slutter altså de ulike teoremene seg sammen til et helt område. Spørsmålet som reiser seg nå er hvorfra de inverse radier og de enkle sammenhengene kommer. Vel kan man bevise de ulike teoremene på mange vis, men for de mest generelle teorem er ikke dette likefrem, og det fornemmes at det må være en grunn til at utrykkene blir så enkle. Det viser seg at en slik grunn finnes i det som vi her vil kalle *sirkelvektorer*.

## Tetrasykliske koordinater

Sirkelvektorer fremkommer ved å se på sirkler ut fra *tetrasykliske koordinater*. De tetrasykliske koordinatene ble innført av Gaston Darboux i 1873, men en variant av disse kan imidlertid også føres tilbake til William Kingdom Clifford til oppsatsen *Power-koordiantes* fra 1866.

Grunnlaget for koordinatsystemet er en bestemt avstand mellom to sirkler, og denne er gitt ved cosinus til vinkelen mellom de to sirklene når de skjærer hverandre. Sirklene danner to vinkler ved skjæring så for at målet skal være entydig, og for å dekke tilfeller der sirklene ikke skjærer hverandre, utrykker vi denne avstanden ved cosinussetningen

$$v(s_1, s_2) = \frac{r_1^2 + r_2^2 - d^2}{2r_1r_2} \tag{5}$$

der d er ordinær avstand mellom sentrene, eller ved

$$v(s_1, s_2) == \frac{r_1^2 + r_2^2 - (x_1 - x_2)^2 - (y_1 - y_2)^2}{2r_1r_2} \tag{6}$$

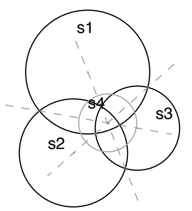
når sentrene er gitt ved koordinater. Vi kaller dette vinkelavstand mellom to sirkler, eller kort v-avstand. V-avstanden mellom to linjer i denne sammenheng blir også cosinus til vinkelen mellom disse. V-avstanden mellom en linje og en sirkel gies likedan, men her kan forholdet skrives enkelt som

$$v(s, l) = \frac{d}{r} \tag{7}$$

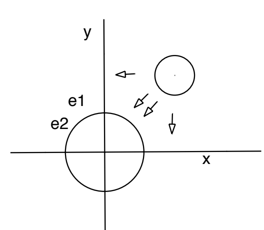
der $r$ er radien til sirkelen, og $d$ er avstanden fra sirkelens senter til linjen. Dette er cosinus til vinkelen mellom den i det tilfelle de skjærer hverandre. Ved kontinuerlige grensebetraktninger kan det vises at de spesielle v-avstandene fremkommer av v-avstanden mellom to sirkler.

Disse avstandsbestemmelsene ligger til grunn for det tetrasykliske koordinatsystemet. I alle koordinatsystem ligger en metrikk til grunn. I det kartesiske koordinatsystem blir et punkt bestemt av dens avstander til de to aksene, og ved homogene koordinater bestemmes hvert punkt av tre størrelser. En sirkel i det tetrasykliske koordinatsystem blir bestemt ved dens v-avstander til fire andre sirkler. Dette er grunnen til betegnelsen tetrasyklisk.[1]

De fire koordinatsirklene står ortogonalt på hverandre, noe som også vil si at v-avstandene mellom sirkelene er 0. Vi innser fort at tre sirkler alle kan være ortogonale til hverandre. Når vi har funnet tre slike finnes det enda en sirkel som er ortogoal til disse tre.



Fire ortogonale sirkler



Standard koordinater

[1]Ofte blir punkter bestemt først også i det tetrasykliske koordinatsystemet, slik som vi finner hos Felix Klein[5]. Sirklene blir så bestemt indirekte ved at konstantene i sirkelligninger sees på som koordinater. Vi bestemmer her sirklene direkte ut fra v-avstandene, og sirkler er dermed grunnobjekter i denne geometrien.

Denne har senter i potenssenteret til de tre sirklene. Sirkelen er imidlertid ikke reelt ortogonalt til de andre sirklene, radien er imaginær, og denne er gitt ut fra radien til de andre sirklene ved relasjonen

$$\frac{1}{r_1^2}+\frac{1}{r_2^2}+\frac{1}{r_3^2}+\frac{1}{r_4^2}=0 \tag{8}$$

Dette medfører at en av koordinatene i dette systemet blir imaginær.
Vi velger ikke fire vilkærlige sirkler som basis, men setter et standard koordinatsystem. Basiselementene her er x-aksen, y-aksen, enhetssirkelen $x^2+y^2-1=0$, og den imaginære enhetssirkelen $x^2+y^2+1=0$. Vi ser lett at linjene er ortogonale til hverandre fordi v-avstanden for en rett vinkel er 0. Linjene er også ortogonale til enhetsirkelen og den imaginære enhetsirkelen fordi linjene går gjennom sentrene til disse, og dermed blir v-avstanden lik 0. V-avstanden mellom den reelle og den imaginære enhetsirkelen er gitt ved $v=\frac{1^2+i^2-0^2}{2\cdot 1\cdot i}=0$.
Vi bestemmer nå en sirkel (x, y, r) ved denne sirkelens v-avstander til de fire basiselementene. V-avstanden til henholdsvis x- og y-aksen er gitt ved $\alpha=\frac{y}{r}$ og $\beta=\frac{x}{r}$. V-avstanden til enhetssirkelen er gitt fra definisjonen ved $\gamma=\frac{r^2+1-x^2-y^2}{2r}$, og v-avstanden til den imaginære enhetssirkelen blir $\delta=\frac{r^2-1-x^2-y^2}{2i\,r}$. Vektoren til en sirkel $s$ skriver vi med uthevet skrift $\mathbf{s}$, og denne er da gitt ved

$$\mathbf{s}=\mathbf{s}(x,y,r)=(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=(\frac{y}{r},\frac{x}{r},\frac{r^2+1-x^2-y^2}{2r},\frac{r^2-1-x^2-y^2}{2i\,r})$$

Vektoren til en linje som skjærer aksene i a og b finnes på lignende vis og er gitt ved

$$\mathbf{l}=\mathbf{l}(a,b)=(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{ab\,i}{\sqrt{a^2+b^2}})$$

Det eiendommelige er nå at skalarproduktet mellom to sirkelvektorer gir akkurat v-avstanden mellom de to elementene disse representerer.

**Setning 5** *Gitt to sirkler $s_1$ og $s_2$ ved sirkelvektorer $\boldsymbol{s}_1$ og $\boldsymbol{s}_2$. Da er v-avstanden $v(s_1,s_2)$ mellom dem gitt ved skalarproduktet mellom sirkelvektorene.*

$$v(s_1,s_2)=\boldsymbol{s}_1\cdot\boldsymbol{s}_2$$

*Bevis.* Sirkelvekorene er gitt ved

$$\mathbf{s}_1=(\frac{x_1}{r_1},\frac{y_1}{r_1},\frac{r_1^2+1-x_1^2-y_1^2}{2r_1},\frac{r_1^2-1-x_1^2-y_1^2}{2i\,r_1})$$

$$\mathbf{s}_2=(\frac{x_2}{r_2},\frac{y_2}{r_2},\frac{r_2^2+1-x_2^2-y_2^2}{2r_2},\frac{r_2^2-1-x_2^2-y_2^2}{2i\,r_2})$$

Dette gir

$$\begin{aligned}
\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 &= \frac{x_1}{r_1}\frac{x_2}{r_2} + \frac{y_1}{r_1}\frac{y_2}{r_2} + \frac{(r_1^2+1-x_1^2-y_1^2)}{2r_1}\frac{(r_2^2+1-x_2^2-y_2^2)}{2r_2} \\
&\quad + \frac{(r_1^2-1-x_1^2-y_1^2)}{2i\,r_1}\frac{(r_2^2-1-x_2^2-y_2^2)}{2i\,r_2} \\
&= \frac{r_1^2+r_2^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2}{2r_1r_2}
\end{aligned}$$

som er utrykket for v-avstanden mellom to sirkler. ◇

Skalarproduktet mellom en sirkel og en linje, eller mellom to linjer gir også v-standene mellom disse elementene.
Vi ser at dette koordinatsystemet for sirkler er enhetlig ved at avstandene mellom sirkler er av samme art som avstandene til koordinataksene, noe som for eksempel ikke gjelder det kartesiske system. Mange egenskaper til sirkler kan finnes ved å gå inn på det tetrasykliske koordinatsystemet, men vi vil i det følgende se på vektorene og deres anvendelser på sirkelteoremer.

## *Sirkelvektorer*

Før vi går inn på konkrete problemstillinger ser vi på de grunnleggende relasjonene mellom sirkelvektorer som svarer til de geometriske situasjonene som oppstår. Disse vil gi seg ut fra skalarproduktet mellom to vektorer, eller direkte ut fra v-avstanden mellom to sirkler.
Når to sirkler tangerer hverandre vil skalarproduktet mellom sirkelvektorene være $\pm 1$. Vi finner dette ut fra definisjonene når vi setter inn summen av radiene som avstand mellom sentrene.

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2 = v(s_1, s_2) = \frac{r_1^2+r_2^2-d^2}{2r_1r_2} = \frac{r_1^2+r_2^2-(r_1 \pm r_2)^2}{2r_1r_2} = \mp 1$$

Spesielt har vi av dette at en sirkel har skalarprodukt 1 til seg selv, som også vil si at vektorene er normerte. Når to sirkler er ortogonale til hverandre finner vi at v-avstanden blir 0.
Det spesielle som kommer i tillegg er at det finnes en vektor $\Omega = (0, 0, 1, -i)$. Denne representerer det såkalte konforme punktet i uendelig, eller grensen for en sirkel som vokser uendelig ut fra et gitt senter. En sirkel $s$ med senter i origo og radius r er representert ved vektoren $\mathbf{s} = (0, 0, \frac{r^2+1}{2r}, \frac{r^2-1}{2ri})$. Lar vi radien til denne direkte vokse mot uendelig vil koordinatene vokse mot uendelig. Deler vi derimot vektoren med $r/2$ først, og lar så radien vokse mot uendelig fremkommer vektoren $\Omega$. Vi skal siden se at vektoren kan oppfattes homogent slik at vi kan gjøre dette (s.129).
Det betydningsfulle i vår sammenheng er at skalarproduktet mellom $\Omega$ og en vilkårlig sirkelvektor gir den inverse radius til sirkelen.

$$\mathbf{s} \cdot \Omega = (\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{r^2+1-x^2-y^2}{2r}, \frac{r^2-1-x^2-y^2}{2i\,r}) \cdot (0, 0, 1, -i) = \frac{1}{r}$$

Dermed er den inverse radius som så ofte opptrer å oppfatte som et relativt mål på v-avstanden til sirkelen i uendelig. Forholdet mellom sirklers v-avstander til dette elementet er gitt ved forholdet mellom de inverse radiene. Dette blir på et vis polart til avstand ut fra senteret som er gitt ved ordinær radius. Skalarproduktet mellom en linje og $\Omega$ blir da som vi skulle forvente lik 0. $\Omega$ skalert med seg selv blir 0 ut fra definisjonen.
De vesentlige relasjonene kan vi sette opp oversiktlig.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$ | $=$ | $\cos v_{12}$ | *Cosinus vinkel* |
| $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$ | $=$ | $1$ | *Omsluttende tangering* |
| $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$ | $=$ | $-1$ | *Ytre tangering* |
| $\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_2$ | $=$ | $0$ | *Ortogonalitet* |
| $\mathbf{s}_1 \cdot \Omega$ | $=$ | $\frac{1}{r_1}$ | *Skalarprodukt med* $\Omega$ |
| $\mathbf{l}_1 \cdot \Omega$ | $=$ | $0$ | *Linje skalert med* $\Omega$ |
| $\Omega \cdot \Omega$ | $=$ | $0$ | $\Omega$ *skalert med* $\Omega$ |

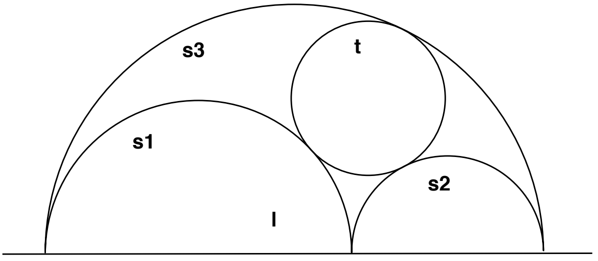
Det siste vi må gjøre oss bevisst før vi kan anvende denne algebraen er en fundamental egenskap fra lineæralgebraen. Denne sier at i et firdimensjonalt vektorrom kan fire lineært uavhengige vektorer danne basis. Det vil si at en femte vektor alltid kan bestemmes som en lineærkombinasjon av fire slike ved

$$\mathbf{t} = a\mathbf{s}_1 + b\mathbf{s}_2 + c\mathbf{s}_3 + d\mathbf{s}_4$$

I betraktningene videre vil denne fundamentale sammenhengen ligge til grunn, og ved å finne skalarproduktet mellom denne ligningen og bestemte sirkelvektorer, vil sirkelteoremene over kunne bestemmes av lineære ligningssystemer. Metoden finnes hos *Daniel Pedoe*[4] som behandler *Descartes teorem* på denne måten. Han viser videre hen på *Grassman*.

## Arbelosteoremet

Vi ser nå på arbelosteoremet (1) med denne metode. Vi har her to sirkler $s_1$ og $s_2$ som tangerer hverandre, og en omsluttedende sirkel $s_3$ som tangerer begge, og som har senter på samme linje som den andre. Linjen gjennom sentrene kaller vi $l$, og til slutt har vi sirkelen $t$ mellom som tangerer de tre sirklene.




Vi har dermed fem geometriske elementer, og kan danne relasjon mellom disse vektorene.

$$a\,\mathbf{s}_1 + b\,\mathbf{s}_2 + c\,\mathbf{s}_3 + d\,\mathbf{l} = \mathbf{t} \tag{9}$$

Vi skalerer med $\mathbf{s}_1$

$$\begin{aligned} a\,\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{s}_1 + b\,\mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{s}_1 + c\,\mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{s}_1 + d\,\mathbf{l} \cdot \mathbf{s}_1 &= \mathbf{t} \cdot \mathbf{s}_1 \\ a - b + c &= -1 \end{aligned}$$

som gir seg av de ulike relasjonene mellom elementene. Skalering med $s_2$ og $s_3$ gir ligningene $-a + b + c = -1$ og $a + b + c = 1$. Fra disse tre ligningene finner vi at $a = 1$, $b = 1$ og $c = -1$. Vi skalerer til slutt ligningen (9) med $\mathbf{l}$. Linjen er ortogonal til tre av sirklene, og har v-avstand $v = v(l, t) = \mathbf{l} \cdot \mathbf{t}$ med $t$. Dette gir $d = v$. Ligningen mellom vektorene blir.

$$\mathbf{s}_1 + \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_3 + v\mathbf{l} = \mathbf{t} \tag{10}$$

Skalerer vi denne vektorligningen med $\Omega$ vil hver av vektorene bli til den tilsvarende inverse radien til den enkelte sirkelen. Skalarproduktet med linjen blir 0, og vi får utrykket

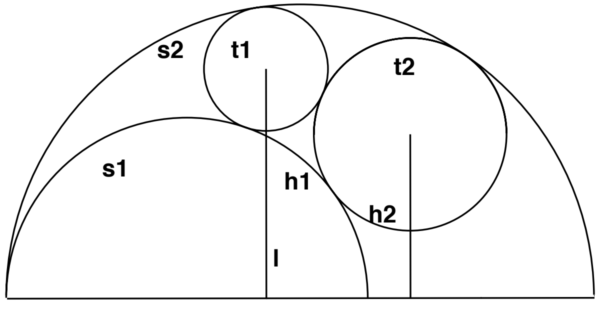
$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} = \frac{1}{r_t}$$

som er arbelosformelen (2). Her ser vi også grunnen til at $\Omega$ kan oppfattes homogent. Vektorlingningen vi er kommet frem til er homogen, og om hele ligningen multipliseres med en faktor endrer ikke det ligningsutrykket.

## Pappos teorem

Pappos teorem vises på en lignende måte, og her kommer variable v-avstander i betraktning. Vi går ikke i detalj når det gjelder hva som ligger i Pappos teorem, men henviser til Bengt Ulin[1] og viser bare setningen som ligger til grunn.

**Setning 6** *Gitt to sirkler $s_1$ og $s_2$ som tangerer hverandre, og linjen $l$ mellom deres sentre. I tillegg har vi to sirkler $t_1$ og $t_2$ som tangerer hverandre og begge sirklene.*




*Differansen mellom v-avstandene $v_1 = v(t_1, l)$ og $v_2 = v(t_2, l)$ mellom sirklene og linjen vil da være $v_1 - v_2 = \pm\ 2$. Dette kan også utrykkes*

$$\frac{h_1}{r_{t1}} - \frac{h_2}{r_{t2}} = \pm 2$$

Bevis: Vi danner en relasjon mellom de fem elementene i dette bildet.

$$a\mathbf{s}_1 + b\mathbf{s}_2 + c\mathbf{t}_1 + d\mathbf{t}_2 = \mathbf{l}$$

Vi skalerer med hver av sirklelvektorene og får en liste av ligninger.

$$\begin{array}{llcll} I & a+b-c-d & = & 0 & .\mathbf{s}_1 \\ II & a+b+c+d & = & 0 & .\mathbf{s}_2 \\ III & -a+b+c-d & = & v_1 & .\mathbf{t}_1 \\ IV & -a+b-c+d & = & v_2 & .\mathbf{t}_2 \\ V & c\,v_1+d\,v_2 & = & 1 & .\mathbf{l} \end{array}$$

Ligningene I og II gir $b = -a$ og $d = -c$. Av ligningene III og IV får vi videre $a = \frac{v_1+v_2}{4}$, $b = -\frac{v_1+v_2}{4}$, $c = \frac{v_1-v_2}{4}$ og $d = -\frac{v_1-v_2}{4}$. Vi har også fra ligning V $c = \frac{1}{v_1-v_2}$. Sammen med det andre utrykket for $c$ gir dette $v_1 - v_2 = \pm 2$ som var var det vi skulle vise. Fortegnene utrykker symmetrien mellom sirklene $t_1$ og $t_2$, og velger vi $v_1 - v_2 = 2$ er vektorligningen mellom sirklene gitt ved

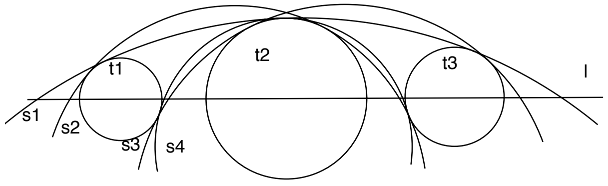
$$(v_1+v_2)\mathbf{s}_1 - (v_1+v_2)\mathbf{s}_2 + \mathbf{t}_1 - \mathbf{t}_2 = 2\mathbf{l}$$

Skalerer vi denne mot $\mathbf{l}$ finner vi nettopp at $v_1 - v_2 = 2$.

## Åttesirkel teoremet

Vi kan vise de andre teoremene på lignende måter. Vi vil imidlertid vise en noe mer generell form fordi da kommer symmetrien klarere frem. Å gi det en generell form gjør også at vi enkelt kan utvide til åttesirkelteoremet.

**Setning 7** *Gitt tre sirkler $t_1$, $t_2$ og $t_3$ hvor sentrene ligger på samme linje $l$. Vi lar i dette tilfellet den midterste sirkelen være størst. Vi finner fire sirkler $s_1$ til $s_4$ som tangerer de tre utgangssirklene hvorav ingen par er symmetriske, det vil si at de ikke speiler hverandre over linjen.*




*Relasjonen mellom vektorene er da gitt ved*

$$\boldsymbol{s}_1 - \boldsymbol{s}_2 - \boldsymbol{s}_3 + \boldsymbol{s}_4 = (v_1 - v_2 - v_3 + v_4)\boldsymbol{l} \tag{11}$$

*der $v_1$ til $v_4$ er cosinus til vinklene mellom sirklene og linjen.*
*Relasjonen mellom de inverse radiene til sirklene blir*

$$\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_4} = 0 \tag{12}$$

Bevis: I denne strukturen har vi å gjøre med åtte geometriske elementer, de tre utgangssirklene, fire appolloniussirkler og linjen. Det spesielle nå er at vi danner en vektorligning av fem av disse, men vi vil også skalere med de andre. Vi danner da en vektorligning med de fire appoloniussirklene og linjen

$$a\mathbf{s}_1 + b\mathbf{s}_2 + c\mathbf{s}_3 + d\mathbf{s}_4 = \mathbf{l}$$

Vi skalerer med de tre utgangsirklene som gir ligningene

$$\begin{aligned} a+b-c-d &= 0 \quad /.\mathbf{t}_1 \\ a+b+c+d &= 0 \quad /.\mathbf{t}_2 \\ a-b+c-d &= 0 \quad /.\mathbf{t}_3 \end{aligned}$$

Disse ligningene gir $d = -c = -b = a$ som fører til

$$\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_4 = \frac{1}{a}\mathbf{l}$$

Når denne skaleres med $\mathbf{l}$ finner vi utrykk for $\frac{1}{a}$

$$\mathbf{s}_1 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{s}_2 \cdot \mathbf{l} - \mathbf{s}_3 \cdot \mathbf{l} + \mathbf{s}_4 \cdot \mathbf{l} = \frac{1}{a}\mathbf{l} \cdot \mathbf{l}$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 - v_3 + v_4 = \frac{1}{a}$$

og vi får ligningen vi skulle vise. Spesielt får vi en sammenheng mellom de inverse radiene når vi skalerer med $\Omega$. ◇

Vi kan nå legge merke med at vi i stedet for linjen kunne hatt en sirkel ortogonal til de tre utgangssirklene, og vi ville fått akkurat samme resultat. Vi kan skrive

$$\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_4 = (v_1 - v_2 - v_3 + v_4)\mathbf{s}_o$$

der ortogonalsirkelen er gitt ved fire av appoloniussirklene. Tar vi utgangspunkt i de fire andre appoloniussirklene får vi samme utrykk, men da skifter de fire avstandene fortegn

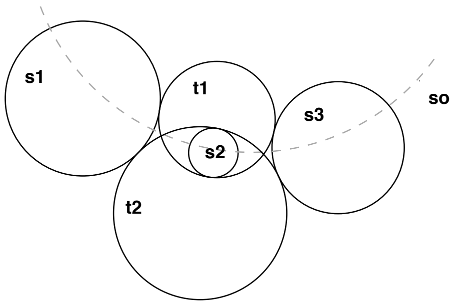
$$\mathbf{s}_5 - \mathbf{s}_6 - \mathbf{s}_7 + \mathbf{s}_8 = (-v_1 + v_2 + v_3 - v_4)\mathbf{s}_o$$

Sammenholder vi de to utrykkene får vi

$$\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 - \mathbf{s}_3 + \mathbf{s}_4 + \mathbf{s}_5 - \mathbf{s}_6 - \mathbf{s}_7 + \mathbf{s}_8 = 0$$

Summen av vektorene til de åtte appoloniussirklene blir dermed null når vi tar hensyn til fortegnene. Skalert med $\Omega$ får vi relasjonen mellom radiene.
For å komplettere sammenhengen må vi til slutt vise at symmetriske appoloniussirkler skjærer ortogonalsirkelen med samme vinkel med motsatt fortegn.

**Setning 8** *Gitt tre sirkler $s_1$, $s_2$ og $s_3$ ortogonalsirkelen $s_o$ til disse, og to symmetriske appoloniussirkler $t_1$ og $t_2$.*




*Da vil avstanden eller vinkelen mellom ortogonalsirkelen og appoloniussirklene være den samme, men med motsatt fortegn.*

Bevis: Gitt de tre utgangssirklene, og to appoloniussirkler. Vi danner vektorligningen

$$a\mathbf{s}_1 + b\mathbf{s}_2 + c\mathbf{s}_3 + d\mathbf{t}_1 = \mathbf{t}_2$$

Vi skalerer med de to appolonniussirklen og får vi ligningene $-a + b - c + d = v$ og $-a + b - c + dv = 1$. Disse ligningene gir $d = -1$ og vi kan sette

$$a\mathbf{s}_1 + b\mathbf{s}_2 + c\mathbf{s}_3 = \mathbf{t}_1 + \mathbf{t}_2$$

Vi skalerer så denne ligningen med ortogonalsirkelen $o$, som gir $0 = v_{os_1} + v_{os_2}$ og vi ser at vinklene mellom appoloniussirklene og ortogonalsirkelen er like store med motsatt fortegn. ◇

## Referanser

[1] Bengt Ulin, *Pappus - en proportionernas jonglör* , Normat No. 1 2006

[2] Karen Sofie Ronæss, *Arkimedes' arbelos* , Normat No. 4 2007

[3] Chris Doran, Antony Lasenby, Joan Lasenbye, *Conformal geometry, Euclidean space and geometric algebra*, Cambridge University, Mars 2002

[4] Daniel Pedoe, *On a Theorem in Geometry*,The Amer. Math. Monthly, Vol. 74, No. 6 (Jun. - Jul., 1967), s. 627-640

[5] Felix Klein, *Vorlesungen über höhere Geometrie*, Berlin, Verlag von Julius Springer 1926 (Første utgave 1893)

[6] William Kingdon Clifford, *On the power of spheres*, 1868

[7] R. Lachlan, *On Systems of Circles and Spheres*, Proceedings of the Royal Society of London, Vol. 40.(1886),s.242-245

[8] Morten Eide, *Sirklers metriske relasjoner*, Masteroppgave Uio 2007