Periodiska decimalbråksutvecklingar

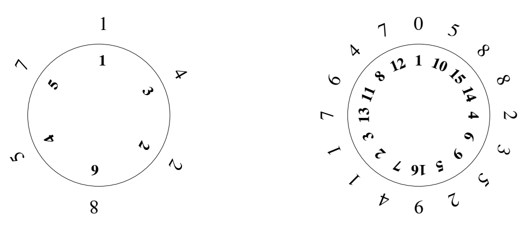
Ulf Persson

Matematiska vetenskaper
Chalmers
ulfp@math.chalmers.se

Betrakta decimalbråksutvecklingen av ett rationellt tal p/q. Som alla vet är denna utveckling periodisk, ty i divisionen med q kan endast ett ändligt antal rester $1, 2, 3 \ldots q-1$ förekomma, och så fort en rest återkommer, börjar processen om igen. Av detta sluter vi att periodens längd är högst $q-1$. Bråk med maximal periodlängd förekommer, det enklaste fallet är $1/7 = 0.142857.....$ med perioden sex. Huruvida det finns oändligt många sådana bråk är en subtil fråga. Vi noterar att den periodiska decimalbråksutvecklingen kan antingen vara 'ren' som exemplet ovan eller ännu elementärare $1/3 = 0.333...$ eller 'sammansatt' som $1/6 = 0.16666$. Det är lätt att inse att rena utvecklingar endast förekommer om $(q, 10) = 1$ och $0 < p < q$ (vi begränsar oss till positiva tal), vilket vi från och med nu kommer att underförstå. För de rena utvecklingarna är det naturligt att skriva utvecklingen i cykelform, d.v.s. utan specific början. Notera att

1/7=0,142857..		2/7=0,285714..		3/7=0,428571..
4/7=0,571428..		5/7=0,714285..		6/7=0,857142..

ur vilket vi ser att utvecklingarna utgör cykliska permutationer av varandra. Känner vi det för ett bråk, sluter vi det för alla de andra med samma nämnare, förutsatt att perioden är maximal[1]. Detta blir något tydligare med följande bild som illustrerar fallen $q = 7, 17$



Figur 1: De yttre siffrorna skall läsas medsols, och för p/q skall vi börja vid den angivna inre (feta) siffran p. T.ex. $13/17$ ger således $0,7647058823526411...$

[1] I det allmänna fallet partitioneras resterna i disjunkta delmängder var och en hörande till en period vars längd är lika med antalet rester i delmängden.

Hur får vi fram de feta siffrorna? Dessa är helt enkelt potenserna $1, 10, 10^2, \ldots$ av 10 modulo q, d.v.s. element av den multiplikativa gruppen[2] Z_q^* av inverterbara element i Z_q. Denna grupp har högst $q - 1$ element, och likhet om och endast om q är ett primtal. Maximal period kan således endast förekomma för q primtal, och i detta fall är gruppen cyklisk. Vi kan omformulera maximaliteten i termer av ordningen av 10 i gruppen, nämligen denna inträffar om och endast om 10 har maximal ordning, d.v.s. genererar gruppen. Sådana element brukar benämnas primitiva. Det är lätt att göra en tabell över primtal för vilka 10 är ett primitivt element, och man förväntar sig att dessa skall utgöra en positiv bråkdel av alla primtal. Vi har redan träffat på $p = 7, 17$ andra exempel är $19, 23, 29, \ldots 61, \ldots 257, \ldots 65537$. Det finns 467 sådana primtal under $10'000$. Vi skall återkomma till dessa.

Följden av siffror i decimalutvecklingarna synes helt slumpartad fastän processen är helt deterministisk, och även om utvecklingen av $1/65537$ har $65536 = 2^{16}$ siffror i sin period, är informationsmängden inte större än i talet 65537 självt. Dock det visar sig att decimalutvecklingen har dolda strukturer. Skriver vi upp följden av sekvensen av potenser kommer den mittersta att vara -1 (Under förutsättningen att ordningen av 10 är jämn) motsvarande talet $q - 1$ som således kommer att befinna sig antipodalt och dess utveckling $(q - 1)/q$ kommer att vara förskjuten precis en halv periodlängd m.a.p. utvecklingen av $1/q$. Summan av de bägge talen $1/q$ och $(q - 1)q$ är givetvis $1 = 0.99999\ldots$, d.v.s. om periodlängden är $2P$ och s_n betecknar den $n : te$ siffran i utvecklingen gäller $s_n + s_{P+n} = 9$. Känner man en sammanhängande halva av perioden, kan vi således beräkna den andra halvan. Uppenbara generaliseringar av detta kan formuleras och bevisas analogt och överlåtes åt läsaren.

Om vi nu återgår till primtalen med maximal period observerar man alla tal förekommer lika många gånger. Detta är en sanning med modifikation, ty om $q \neq 1(10)$ är detta uppenbarligen omöjligt. Det precisa påståendet är att varje tal förekommer åtminstone $\lfloor \frac{q-1}{10} \rfloor$ gånger och högst $\lceil \frac{q-1}{10} \rceil$ (där $\lfloor x \rfloor$ är det största heltal n sådant att $n \leq x$ och analogt för $\lceil x \rceil (= -\lfloor -x \rfloor)$). Läsaren kan lätt verifiera detta antingen för hand eller med dator för större tal. Eller göra ett mer eller mindre kort uppehåll i läsandet nu, och bevisa det.

Hur får vi dessa siffror s_n och hur är de relaterade till de konsekutiva resterna r_n? Relationen är helt enkelt $s_n = \lfloor (10 \times r_n)/q \rfloor$ vilket följer direkt ur divisionsalgoritmen. Om nu perioden är av maximal längd, kommer alla möjliga rester förekomma en och endast en gång, och i det öppna intervallet $(0, 1)$ kommer de att vara likformigt placerade via $r \mapsto r/q$, speciellt kommer de att hamna i tio olika boxar motsvarande de tio olika siffrorna $0, 1, 2 \ldots 9$, där siffran s korresponderar mot det öppna intervallet $(s/10, s/10 + 0.1)$. Antalet rester i en viss box motsvarar precis antalet gånger siffran s dyker upp i utvecklingen. Hur räknar vi antalet rester i en box? Om boxen motsvarar s vill vi finna antalet heltal r sådana att $sq < 10r < (s + 1)q$ eller ekvivalent $sq + 1 \leq 10r \leq (s + 1)q - 1$ or $s(q/10) + 0.1 \leq r \leq (s + 1)(q/10) - 0.1$. Intervallets längd x är ett icke-heltal $\frac{q-2}{10}$ och antalet heltal i det är följaktligen begränsat nedåt och uppåt av $\lfloor x \rfloor$ och $\lceil x \rceil$ respektive. (Eftersom $\lceil \frac{q-2}{10} \rceil \geq \lceil \frac{q-1}{10} \rceil$ och ifall $q \neq 1(10)$ $\lfloor \frac{q-2}{10} \rfloor \geq \lfloor \frac{q-1}{1} 0 \rfloor$ följer det hela.)

[2]Vi antar ju $(q, 1) = 1$

Vi kan illustrera detta med $q = 7$, de relevanta intervallen är således

0	1	2	3	4
(0,0.7)	(0.7,1.4)	(1.4,2.1)	(2.1,2.8)	(2.8,3.5)
5	6	7	8	9
(3.5,4.2)	(4.2,4.9)	(4.9,5.6)	(5.6,6.3)	(6.3,7)

Vi ser att de enda intervallen som innehåller heltal är $1, 2, 4, 5, 7, 8$ precis de sex tal som förekommer i decimalutvecklingen. Vi kan kalla dessa intervall för de 'abundanta'. Ett ögonblicks eftertanke bör övertyga läsaren om att vi skulle få exakt samma abundanta intervall för varje primtal med maximalperiod och som slutar på 7. Således bör varje siffra i utvecklingen av $1/17$ uppkomma minst en gång, och siffrorna $1, 2, 4, 5, 7, 8$ är precis de siffror som förekommer två gånger. Och inte nog med detta, i utvecklingen av $1/65537$ förekommer 65536 siffror i utvecklingen, varje siffra förekommer åtminstone 6553 gånger, och sex siffror (de ovan nämnda) förekommer 6554 gånger.

Men argumenten ovan är tillämpbara inte bara till enstaka siffror utan godtyckliga sifferkombinationer. Speciellt bör varje kombination av två siffror förekomma antingen 655 gånger eller 656 gånger, av de hundra möjligheterna tillhör 64 den första och 36 den andra. Hur kan vi finna de abundanta siffrorna? Betrakta de hundra öppna intervallen

$$(0, 0.37), (0.37, 0.74), (0.74, 1.11) \dots (36.63, 37)$$

vilka (36) av dessa innehåller heltal? Vi ser att kombinationen 02 korresponderar till en sådan, och förekommer således 656 gånger. Vad kan vi säga om kombinationen 27? Den korresponderar till intervallet som begränsas underifrån av $27 \times 0.37 = 9.99$ således kommer det att innehålla ett heltal och vara abundant. Vi inser också att två konsekutiva kombinationer kan inte båda vara abundanta, ty $2 \times 0.37 < 1$ medan av tre konsekutiva kombinationer är åtminstone en abundant, och det kan förekomma att både den första och sista kan vara abundanta. Läsaren kan leka vidare. Med andra ord dessa tillsynes slumpartade följder av siffror är underställda ett otal regler som vi knappast skulle kunna vara förmögna att tillfredställa finge vi uppgiften att skriva ner en räcka med siffror och pröva oss fram.

Nu är det givetvis ingenting heligt med basen tio, varje bas kan utnyttjas, med de erforderliga modifikationerna. Speciellt basen två är intressant. Följden av ettor och nollor kan liknas med en slantsingling, dock med den ovan anförda symmetrin vilket gör andra halvan av perioden en negativbild av den första. Men är sekvensen riktigt slumpartad, förekommer långa följder av ettor och nollor? Tag exemplet $q = 491 = 111101011$, dess binära utveckling har 9 siffror, detta motsvarar $2^9 = 512$ kombinationer, av vilka vi förväntar oss en majoritet (491) att förekomma, dock ej av uppenbara skäl den första 000000000 och sista 111111111. Däremot bör det finnas exakt en 00000000 och en 11111111 med åtta siffror. Detta kan givetvis generaliseras om 2 är en primitiv rot till q kommer vi att förvänta oss precis en följd av k ettor (och nollor) där $k = \lfloor \log_2 q \rfloor$. Detta är även storleksordningen vi kan förvänta oss rent statistiskt för en slumpvis följd av ettor och nollor.