Normat **56**:3, 136–143 (2008)

# Uppgifter

**507.** (Föreslaget av *Kent Holing, Trondheim.*) Kalle hadde i fjor irritert seg over at Kristi himmelfartsdag hadde falt sammen med 17. mai. Sannelig skjer noe tilsvarende i år også: Kristi himmelfartsdag faller sammen med 1. mai. Noen vil kalle dette en trivialitet (høyst en kuriositet) mens andre - som nordmannen Kalle - vil si uflaks med tanke på antall fridager i mai. (Ekstra ille er det jo at 17. mai faller på en lørdag i tillegg i år!) Uansett, vis at Kristi himmelfartsdag faller sammen på 17. mai og 1. mai to år på rad ikke har skjedd tidligere, og at Kalle trenger neppe å irritere seg over dette mer.

**508.** (Föreslaget av *Lars Ungernäs, Johanneshov.*) Antalet sätt att fördela $r$ äpplen över $n$ lådor, så att en eller flera lådor tillåts vara tomma kan visas vara $\binom{r+n-1}{r}$. Detta resultat kan användas för att (enkelt) härleda fördelningsformeln, $F$, för det fall då *ingen låda får vara tom.* Hur kan detta göras? Hur kan formeln $F$ härledas mera direkt, dvs utan att använda resultatet ovan, och hur ser den erhållna formeln ut?

**509.** Låt mängden $M$ bestå av 33 positiva heltal som är sådana att var och en av deras primfaktorer finns i mängden $\{2, 3, 5, 7, 11\}$. Visa att det måste finnas två element i mängden $M$ för vilka produkten är en jämn kvadrat.

**510.** Bestäm alla funktioner $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ som uppfyller

$$f(x-y) = f(x) + xy + f(y) \quad \text{för varje } x \in \mathbb{R} \quad \text{och varje } y \in \{f(x) | x \in \mathbb{R}\}\,.$$

**511.** (Föreslaget av *Lars Höglund, Uppsala.*) Visa att det för varje heltal $n \geq 1$ är möjligt att täcka en kvadrat med sidan 1 genom att använda $n$ stycken kvadrater om vilka man endast vet att deras sammanlagda area är 4.

*Anm.* Olikheten i uppgift 504 (Normat 2008:1) skall vara

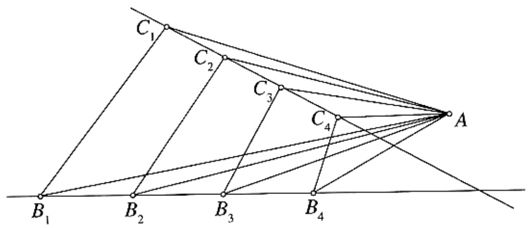
$$\frac{x}{\sqrt{x+y}} + \frac{y}{\sqrt{y+z}} + \frac{z}{\sqrt{z+x}} \leq \frac{5}{4}\sqrt{x+y+z}.$$

och inget annat.

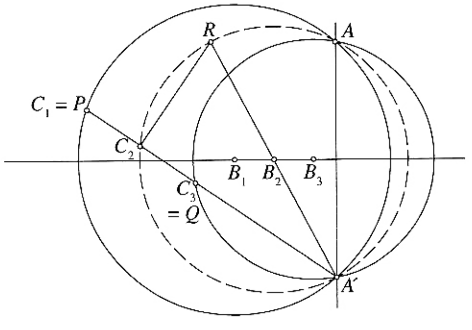
**Lösningar skickas senast 31 januari 2009 till:**
Dag Jonsson, dag@math.uu.se
Box 480
Matematiska institutionen
SE-75106 Uppsala

## *Lösningar till tidigare uppgifter i Normat*

**467.** (Lösning av *Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik.*) Følgende hjelpesetning anvendes: Når et sett av (minst tre) formlike og likt omløpsorienterte trekanter $A_iB_iC_i$ har et sett samsvarende hjørner $A_i$ i et felles punkt $A$ og et sett samsvarende hjørner $B_i$ i ekvidistante punkter langs en rett linje, ligger også hjørnene $C_i$ i ekvidistante punkter langs en rett linje. Dette følger intuitivt av at alle de tre sidene i én trekant er dreid like mye rundt $A$ i forhold til de tilsvarende sidene i en annen. Dermed er trekant $AC_iC_j$ og trekant $AB_iB_j$ formlike i forholdet $|AC_i|/|AB_i|$, altså i samme forhold både for alle $i$-ene og for de to ekvidistansene.

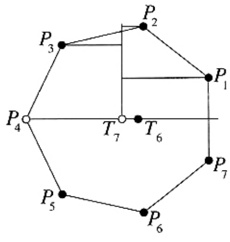



Oppgavefiguren nedenfor har en hjelpesirkel gjennom $A$ med sentrum i midtpunktet $B_2$ mellom sentrene $B_1$ og $B_3$ for de to gitte sirklene. Da svarer oppgavens $P$ og $Q$ til $C_1$ og $C_3$, og $C_2$ er midtpunktet mellom dem. Sirkelbuene $AP$ og $AQ$ skulle ha like store sentralvinkler, så også periferivinklene $AA'P$ og $AA'Q$ er like, der $A'$ er sirklenes annet skjæringspunkt. La $R$ være hjelpesirkelens diametrale motpunkt til $A'$. Periferivinkelen $RC_2A'$ er da 90°, så $RC_2$ er midtnormalen på $[PQ]$, og det bekrefter påstanden.




**471.** (Lösning av *Hans Georg Killingbergtrø,Leksvik.*) Figuren viser en regulær 7-kant med hjørner i avstand 1 fra sentrum $T_7$. Hvis alle hjørnepunktene tillegges samme tyngde, vil deres felles tyngdepunkt ligge i $T_7$, og da må de 6 hjørnepunktene utenom $P_4$ ha *sitt* felles tyngdepunkt $T_6$ i avstand 1/6 fra $T_7$ for å oppveie $P_4$. Summen av deres horisontalavstander fra $T_7$ er dermed 1 når de regnes negativt for $P_3$ og $P_5$. Men $P_1$, $P_2$ og $P_3$ gir samme sum (det vil si $\cos\frac{\pi}{7}+\cos\frac{3\pi}{7}-\cos\frac{2\pi}{7}$) som $P_7$, $P_6$ og $P_5$, , så den må være 1/2.

På samme måte kan 7-tallet erstattes med et vilkårlig *oddetall* fra og med 3. For eksempel vil en regulær 25-kant vise at $\cos 7,2° - \cos 14,4° + \cos 21,6° - \cos 28,8° + \cdots + \cos 79,2° - \cos 86,4° = 1/2$.




**473.** (Lösning av *Con Amore Problemgruppe, København*) Ved substitutionen

$$x = \tan u, \quad \text{hvor} \quad -\tfrac{\pi}{2} < u < \tfrac{\pi}{2},$$

får den givne funktionalligning formen:

$$f(\tan u) + f(\tan v) = f\big(\tan(u+v)\big). \tag{1}$$

Da $f$ er differentiabel, er også $f \circ \tan$ differentiabel, og ifølge (1) så også lineær. Der findes derfor et fra 0 forskelligt reelt tal $k$, sådan at

$$(f \circ \tan)(t) = k \cdot t,$$

og dermed er funktionerne

$$f = \arctan(k \cdot t),$$

hvor $k$ er et vilkårligt fra 0 forskelligt reelt tal, samtlige løsninger til den givne funktionalligning.

*Anm.* Vi vill tillägga att uppgift 474, till vilken lösning tidigare har presenterats, även har lösts av *Con Amore Problemgruppe, København.*

## Lösningar till uppgifter i Normat 2007:4

**499.** (Lösning av *Ebbe Thue Poulsen, Mårslet*) Det er klart, at

$$x \geq 0 \Rightarrow f_n(x) \geq 1\,, \tag{1}$$

samt at

$$f_n(-1) = 1\,. \tag{2}$$

For $-1 < x < 0$ er

$$f_n(x) = \frac{1 + (-x)^{2n+1}}{1 + (-x)}\,, \tag{3}$$

hvoraf det følger, at

$$x < -1 \Rightarrow f_n(x) > 1\,, \tag{4}$$

samt at

$$-1 < x < 0 \Rightarrow f_n(x) > \frac{1}{2}\,. \tag{5}$$

Af (1), (2), (4) og (5) følger, at

$$m_n \geq \frac{1}{2} \quad \text{for alle} \quad n\,.$$

Det er følgelig nok at bevise, at for ethvert $\varepsilon > 0$ findes der et helt tal $N$ således, at

$$n \geq N \Rightarrow m_n < \frac{1}{2} + \varepsilon\,.$$

Lad altså $\varepsilon > 0$ være givet. Lad os antage, at $\varepsilon < 1$, og vælg $x_\varepsilon$ således, at

$$\frac{1}{1 - x_\varepsilon} = \frac{1}{2} + \frac{\varepsilon}{2}\,. \tag{6}$$

Så er $-1 < x_\varepsilon < 0$, hvoraf følger, at der findes et $N$ således, at

$$n \geq N \Rightarrow (-x_\varepsilon)^{2n+1} < \frac{\varepsilon}{2}\,,$$

og altså

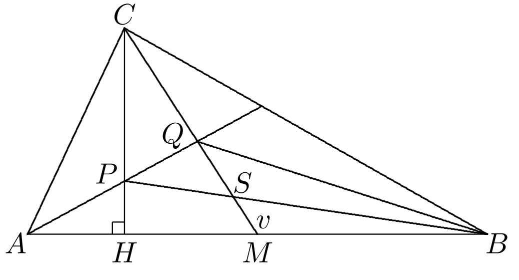
$$n \geq N \Rightarrow f_n(x_\varepsilon) < \frac{1}{2} + \varepsilon\,. \tag{7}$$

Indsættelse af (6) og (7) i (3) giver

$$n \geq N \Rightarrow m_n < \frac{1}{2} + \varepsilon\,, \qquad \text{Q.E.D.}$$

(Även löst av *Hans Kaas Benner, Randers, Con Amore Problemgruppe, København* och *Peter Kierkegaard, Gentofte*)

**500.** (Lösning av *Hans Kaas Benner, Randers*)



a) Det er klart, at vinkel $A$ er større end vinkel $B$ ud fra de givne oplysninger. Der gælder:

$$\frac{PH}{PC} = \frac{AH}{AC} = \cos A, \tag{1}$$

$$\sin \frac{B}{3} = \frac{PH}{PB}\,. \tag{2}$$

Trekant $PCB$ giver

$$\frac{\sin \frac{2B}{3}}{PC} = \frac{\sin(90^\circ - B)}{PB}\,. \tag{3}$$

(2) indsættes i (3):

$$\frac{PH}{PC} = \frac{\cos B \cdot \sin \frac{B}{3}}{\sin \frac{2B}{3}} = \frac{\cos B \cdot \sin \frac{B}{3}}{2\sin \frac{B}{3} \cdot \cos \frac{B}{3}} = \frac{\cos B}{2\cos \frac{B}{3}}\,. \tag{4}$$

(1) og (4) giver

$$\cos B = 2\cos A \cdot \cos \tfrac{B}{3}\,. \tag{5}$$

BS er vinkelhalveringslinie i $\triangle QBM$ og $BQ$ er vinkelhalveringslinie i $\triangle SBC$. Det giver:

$$\frac{MS}{SQ} = \frac{AB}{2QB}, \quad \frac{SQ}{QC} = \frac{BS}{BC},$$

og dermed at

$$\frac{\sin C}{\sin A} = \frac{2QB \cdot MS}{BS \cdot QC}, \tag{6}$$

da

$$\frac{AB}{BC} = \frac{\sin C}{\sin A}\,.$$

Sæt $\angle CMB = v$. Sinusrelationerna på $\triangle BMS$ og $\triangle BMQ$ giver:

$$\frac{BS}{\sin v} = \frac{MS}{\sin \frac{B}{3}}, \quad \frac{BQ}{\sin v} = \frac{MQ}{\sin \frac{2B}{3}} \quad \text{og dermed at} \quad \frac{QB \cdot MS}{BS} = \frac{QM \cdot \sin \frac{B}{3}}{\sin \frac{2B}{3}},$$

som indsættes i (6) til

$$\frac{\sin C}{\sin A} = \frac{2\sin \frac{B}{3}}{\sin \frac{2B}{3}} \cdot \frac{QM}{QC} = \frac{1}{\cos \frac{B}{3}} \cdot \frac{QM}{QC}\,.$$

Da $\frac{QM}{QC} = \frac{AB}{2AC}$ og $\frac{AB}{AC} = \frac{\sin C}{\sin B}$ får man

$$\text{(7)} \qquad \sin A = 2\cos\tfrac{B}{3}\cdot\sin B$$

(5) + (7) giver $\cos B\cdot\sin B = \sin A\cdot\cos A$ eller $\sin 2B = \sin 2A$. Da vinkel $A$ er større end vinkel $B$ fås $2A = 180° - 2B$ eller $A + B = 90°$.

b) Der gælder, at $BH\cdot AH = HC^2$, $\quad BH = BP\cos\frac{B}{3}$, $\quad AH = AC\cdot\cos A$. Altså er $BP\cos\frac{B}{3}\cdot AC\cdot\cos A = HC^2$ eller

$$\begin{aligned} BP &= \frac{1}{\cos\frac{B}{3}\cdot\cos A}\cdot\frac{HC}{AC}\cdot HC \\ &= \frac{\cos B}{\cos\frac{B}{3}\cdot\cos A}\cdot HC = 2HC \end{aligned}$$

ifoelge (5).
(Även löst av *Peter Kierkegaard, Gentofte*.)

**501.** (Lösning av *Ebbe Thue Poulsen, Mårslet*) Erstatter vi $x$ i ligningen

$$\text{(1)} \qquad f(x+a+b) + f(x) = f(x+a) + f(x+b)$$

med $x - a$, ser vi, at hvis (1) er opfyldt for alle reelle $x$, så er den også opfyldt med $a$ erstattet af $-a$. Vi kan derfor antage, at $a$ og $b$ begge er positive. Ifølge det givne eksisterer der positive hele tal $m$ og $n$ således, at $a/b = m/n$.
Af (1) følger, at funktionen

$$g(x) = f(x+a) - f(x)$$

er periodisk med perioden $b$, og derfor også med perioden $p = mb = na$.
Vi har

$$\text{(2)} \qquad f(x+p) - f(x) = h(x)$$

med

$$h(x) = \sum_{j=0}^{n-1} g(x+ja)\,,$$

som er periodisk med perioden $p$.
Vi får videre

$$f(x+kp) - f(x) = kh(x)$$

for alle positive hele tal $k$, og da $f$ er begrænset, må der gælde $h(x) = 0$, hvorefter (2) viser, at $f$ er periodisk med perioden $p$.
(Det bemærkes, at resultatet ikke gælder, hvis forholdet $a/b$ er irrationalt. Et modeksempel: Funktionen $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi}{a}x\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{b}x\right)$ opfylder (1), men denne funktion er ikke periodisk, hvis $a/b$ er irrationalt, idet $f(0) = 2$, men $f(x) < 2$ for alle andre værdier af $x$.)

## *Lösningar till uppgifter i Normat 2008:1*

**502.** (Lösning av *Hans Kaas Benner, Randers.*) Ligningen $x^n - 1 = (x-1)(x^{n-1} + \cdots + x + 1) = 0$ har rødderna $1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}$, hvor $\omega = e^{2\pi i/n}$. Altså er

$$x^{n-1} + \cdots + x + 1 = (x - \omega) \ldots (x - \omega^{n-1}) .$$

Hvis $x = 1$ er

$$n = (1 - \omega) \ldots (1 - \omega^{n-1})$$

eller

$$|1 - \omega|^2 \ldots |1 - \omega^{n-1}|^2 = n^2 .$$

Da $|1 - \omega^k|^2 = (1 - \cos \frac{2\pi k}{n})^2 + \sin^2 \frac{2\pi k}{n} = 2(1 - \cos \frac{2\pi k}{n})$, fås

$$\prod_{k=1}^{n-1} 2\big(1 - \cos \frac{2\pi k}{n}\big) = n^2$$

eller

$$\prod_{k=1}^{n-1} 2\big(1 - \cos \frac{2\pi k}{n}\big) = \frac{n^2}{2^{n-1}} .$$

(Också löst av *Erik Hansen, Kalundborg* och *Jakob I. Try, Sögne*)

**503.** (*Con Amore Problemgruppe, København.*) Idet vi benytter grafteoretisk terminologi, opfatter vi de $n$ spillere $A_1, A_2, \ldots, A_n$ som punkter og de $m$ spillede partier som linjer. Lad $a_i$ være antallet af partier, som $A_i$ allerede har spillet ($a_i$ er altså graden av punktet $A_i$); det gælder da at

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 2m. \tag{1}$$

Idet vi lader $A_j, A_k, \ldots, A_l$ betegne de $a_i$ spillere, som $A_i$ allerede har mødt, sætter vi nu

$$s_{A_i} = a_j + a_k + \cdots + a_l .$$

Det indses let, at for ethvert $i$ tilhørende $\{1, 2, \ldots, n\}$ gælder $r_{A_i} + s_{A_i} = m$. At der findes et $i$, for hvilket $r_{A_i} \leq m - \big(\frac{2m}{n}\big)^2$, er derfor ensbetydende med, at der findes et $i$, for hvilket

$$s_{A_i} \geq \big(\frac{2m}{n}\big)^2 . \tag{2}$$

Vi bemærker nu, at i summen av de $n$ summer $s_{A_1}, s_{A_2}, \ldots, s_{A_n}$ optræder $a_i$ i netop $a_i$ led (nemlig én gang i hver av de $a_i$ summer $s_{A_j}, s_{A_k}, \ldots, s_{A_l}$. Det samlede bidrag fra $a_i$ til summen av $s_{A_1}, s_{A_2}, \ldots, s_{A_n}$ er altså $a_i^2$, dvs summen er alt i alt

$$\sum_{i=1}^{n} s_{a_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i^2 ; \tag{3}$$

og i fortsættelse av (3) finder vi ved benyttelse af (1) samt en velkendt ulighet, at

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} s_{a_i}}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n} = \Big(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i^2}{n}}\Big)^2 \geq \Big(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\Big)^2 = \Big(\frac{2m}{n}\Big)^2 .$$

Heraf fremgår straks, at det for mindst ét $i$ tilhørende $\{1, 2, \ldots, n\}$ gælder $s_{A_i} \geq \left(\frac{2m}{n}\right)^2$; og med (2) er påstanden som indset ovenfor bevist.
Af den hermed godtgjorde ulighed $r_{A_i} \leq m\left(1 - \frac{4m}{n^2}\right)$ fremgår, at $4m \leq n^2$, altså at $m \leq \left(\frac{n}{2}\right)^2$.