Selbergintervjuet del 3 – Riemannhypotesen og Sporformelen

Nils A. Baas og Christian F. Skau.

Institutt for matematiske fag
Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
baas@math.ntnu.no, csk@math.ntnu.no

Du sa at du allerede tidlig hadde en ganske god forståelse av hva de reelle tall var, du syntes ikke Dedekind snitt var nødvendig, og vi husker at du kalte desimaltall for proletariatet av reelle tall. Men ligger det i det at primtallene, det er liksom overklassen, adelen blant tallene?
Selvfølgelig. Jeg mener, for det første heltallene danner jo en overklasse får man si, blant de rasjonale tall, og såklart enda mer i forhold til de generelle reelle tall. Men jo, primtallene er de mest interessante av heltallene, synes jeg.

Primtallene, de har jo stått ditt hjerte nær i lang tid, eller i hele din karriere. Kunne du fortelle oss litt om hva du betrakter som de viktigste strukturresultatene om primtallene? Finnes det noe hierarki? Primtallet 2 er ytterst spesielt, men er det andre som har en spesiell stjerne, eller hva?
Når man snakker om ting i kongruensteorien så har 2 en spesiell stilling. Derimot viser det seg når man senere utvikler teorien for algebraiske tall, algebraisk tallteori på en algebraisk tallkropp, så er 2 i grunnen ikke så eksepsjonell. Det viser seg at de primidealer som er divisorer av diskriminanten til kroppen spiller samme rolle i en algebraisk tallkropp som 2 i det klassiske tilfellet. Så det er alltid et endelig antall primidealer som inntar en spesiell stilling. Så, på denne måten er, kan man si, det noe unaturlige ved 2 blant heltallene forklart. Men, som jeg tror jeg nevnte forrige gang, Siegel brukte å si, når han snakket om Kroeneckers uttalelse om at de hele tall var skapt av Gud og alt annet var menneskeverk, så la han alltid til: "Nur die zwei ist von der Teufel gemacht". Tallet 2 var laget av djevelen, og ikke av Gud. Ja, men det var hans spesielle type humor, selvfølgelig. Primtallene har jo en struktur i det store, og det finnes i deres fordeling både regulariteter og irregulariteter som kan undersøkes. Når det gjelder regularitet så kan man si at det er primtallsetningen som gir den generelle fordelingen, og gir den med ganske stor presisjon hvis Riemanns hypotese er riktig. Men bortsett fra dette, så finnes det også irregulariteter med primtallene. Hvis man ser på finfordelingen så finnes det jo, for eksempel, primtalltvillinger så langt ut som man har tabulert primtallene. Det vil si, det er to primtall med differanse to mellom seg. Det samme gjelder om man tar et annet like tall, så vil det utvilsomt finnes uendelig mange par som har den differansen, hvor langt ut man går. Det er enda ikke bevist, men det er høyst

sannsynlig at det er riktig. Man har til og med ganske gode argumenter, men ikke riktig beviser, for hva som er den generelle fordelingen av for eksempel primtalltvillingene. På den annen side finnes det også store gap mellom primtallene. Ingen vet i dag hvor store disse gapene kan bli mellom primtallene. Gjennomsnittsdifferansen mellom to suksessive primtall er, hvis du har et tall av størrelsesorden n, så er det omtrent $\log n$, det følger av primtallsatsen. Man har vist at de er av noe større størrelsesorden disse gap som kan forekomme. Men vi vet ennå ikke om det kan forekomme gap som er så store som en potens av n. Det er forholdsvis lite sannsynlig at det kan gjøre det, men vi kan ikke motbevise det. De beste resultater om maksimaldifferansen mellom primtallene gir en eksponent som er utvilsomt helt gal, og sannsynligvis kan ikke disse intervallene mellom suksessive primtall nå så høyt som noen potens av tallet, hvor liten eksponenten måtte så være. Et åpent spørsmål som er mer fundert over, får jeg si - vi har ingen resultater der - er om det kan være som en potens av $\log n$. Det har vært gjort en formodning først fremsatt av Cramér på grunnlag av en sannsynlighetsteoretisk modell som han laget, at de maksimale gap er av størrelsesorden $\log^2 n$. Men det finnes i grunnen ingen resultater i denne retningen. Man har bare kunnet vise at det finnes gap som er av litt større størrelsesorden enn $\log n$ ganger noen faktorer som har itererte logaritmer, som jo er uhyre langsomt voksende funksjoner.

Jeg lurer på, ville det være en ide om du skrev opp zeta-funksjonen på tavlen?

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Rekken konvergerer så lenge realdelen av s er større enn 1.

Kan du si noe om hvorfor denne sier så mye om primtallene?
Vel, den kan også skrives på en annen måte, som et produkt utstrakt over primtallene. Det er den såkalte Eulers formel.

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s} = \prod_p \frac{1}{1-p^{-s}} \tag{$*$}$$

Det merkverdige er at den ikke tidligere ble brukt til å finne ut noe om primtallene. Det er merkverdig at verken Legendre eller Gauss, som begge var interesserte i approksimasjoner til antallet av primtall mindre enn, la oss si x, som vi gjerne betegner ved $\pi(x)$, og approksimasjoner til dens asymptotiske utrykk, at de aldri prøvde å se på Eulers formel. Den første som faktisk brukte dette i sine arbeider var Chebyshev og deretter Riemann. En del ting ville vært mye annerledes da. For eksempel, Legendre ville ha innsett at i den asymptotiske formel som han gir, så er hans konstant gal. Det skulle være en 1 og ikke en 1.0 og så noen andre siffere. Det er lett å se. Man behøver bare å betrakte dette som en reell funksjon av en reell variabel og se hvordan den oppfører seg når s nærmer seg 1 ovenfra. Og det er veldig lett å se hvordan den oppfører seg ved å sammenligne den med et integral av samme slag. Så er det klart at den oppfører seg som $1/(s-1)$ pluss noe som er begrenset. Av dette følger allerede at hvis man ser nøyere på det, at hvis det finnes en god elementærfunksjon som approksimerer, så er det i virkeligheten den såkalte integrallogaritme. Dette ble senere vist av Chebyshev, som sagt. Men det kunne ha vært gjort veldig lett av Legendre eller Gauss om de hadde brukt Eulers formel. Og det er merkverdig at de ikke gjorde det, for selvfølgelig, de kjente jo formelen til Euler begge to.

Var det så at Abel kommenterte noe om dette da han var i København?
Han kommenterte Legendre, som i sin store bok om tallteori, så nevner han denne, og han gir et slags argument som han kaller et bevis for den. Og Abel skriver hjem til Holmboe at denne formelen som Legendre gir synes han må være den merkverdigste i hele matematikken. Men så sier han: "Beviset kan du agitere deg på til jeg kommer hjem". Men Abel kan ikke ha vært så veldig kritisk på den tid, som han ble senere, må jeg si. For et egentlig bevis er det ikke. Legendres argument gjør den meget plausibel, men det er ikke noe virkelig bevis.

Denne formelen $(*)$*, den gir jo oss sammenhengen mellom zeta-funksjonen og primtallene. Kunne du da si noe videre om for eksempel hvorfor nullpunktene til zeta-funksjonen sier så mye om primtallenes fordeling? Kan du si noe enkelt om det?*
Det kommer først frem gjennom det Riemann gjorde. Riemann var den første som begynte å se på denne funksjonen som en kompleks funsjon. Chebyshev betraktet den bare for reelle variable, faktisk. Man kan fortsette den analytisk også, men Chebyshev bruker ikke å se på den som en kompleksvariabel-funksjon i sitt arbeide. Og det er nok for hans formål å se på den som en funksjon av en reell variabel. Og egentlig bare for s større enn 1, hvordan den oppfører seg når s en nærmer seg 1 ovenfra. Men Riemann så på den som en funksjon av en kompleks variabel og viste den generelle analytiske fortsettelse. Det er egentlig ikke vanskelig å vise, men han viste det i en form som også gav ham funksjonalligningen. Nu må det sies at funksjonalligningen var egentlig ikke ny heller. Den finnes også noe i tidligere litteratur. Faktum er at allerede Euler hadde en form av funksjonalligningen. Og det var en del andre som jeg husker jeg fant i min fars bibliotek. Det var en del bøker jeg så på. Blant annet en bok av en tysk forfatter som het Schlömlich som hadde skrevet noe som het Kompendium der Höheren Mathematik, egentlig om analyse, som hadde en hel del forskjellige ting. Blant annet om hva han kaller "synectische Funktionen", det er i virkeligheten hva vi idag kaller analytiske funksjoner. Denne boken kom ut ganske mange år før Riemanns avhandling, og han betrakter en del Dirichletrekker og beviser funksjonalligninger, for eksempel, og analytiske fortsettelser. Men han gjør ikke noe med det, hverken tallteoretisk eller noe som helst. Jeg vet ikke hvor mye av dette Riemann kan ha sett. Hva som er sikkert er at Riemann har sett Chebyshevs arbeider, men han unngår å nevne det i sitt arbeide. Jeg har hørt av en person som har vært i Göttingens bibliotek og sett på Riemanns opprinnelige manuskript til denne avhandlingen, og liksom i papirer omkring det, at Riemann nevner i sin avhandling bare to matematikere som har beskjeftiget seg med primtallene, og det er begge matematikere fra Göttingen. Den ene er Gauss og den andre er Lejeune Dirichlet. Men Riemann hadde lest Legendres tallteori mens han gikk i gymnasiet, det vet vi fordi hans matematikklærer på den tid, som jeg tror hadde navnet Schmalfuss, såvidt jeg husker, nevner at han lånte denne boken til Riemann og at Riemann gav den tilbake efter en uke, jeg tror det var en uke.

Det er et ganske solid verk dette her, og Riemann sa at det var en vidunderlig bok, og at han kan den faktisk utenat allerede. Så han må ha lest den gjennom ganske grundig, men han nevner ikke Legendre heller. Hva jeg blev fortalt var at i hans manuskript, så finnes navnet Chebyshev men han har strøket det ut, og nøyd seg med å nevne bare disse som kom fra Göttingen.

Kan du illustrere hva Riemann hypotesen egentlig sier - kanskje du kunne skrive det på tavlen?
Den sier rett og slett at i den analytiske fortsettelse, ved hjelp av funksjonalligningen, så finnes det noen nullpunkter som er de såkalte trivielle nullpunkter. De kommer inn på grunn av disse gamma-funksjonene som inngår i funksjonalligningen. Og de kommer på like negative heltall, men så finnes det også en del komplekse nullpunkter som må ligge med realdelen mellom 0 og 1, og symmetrisk. Deres realdeler må ligge symmetrisk om linjen 1/2 fordi at hvis man har ett nullpunkt så er også 1 minus dette også et nullpunkt. Og disse kalles de ikke-trivielle nullpunkter. Og Riemann, faktisk, beregnet en del av dem og fant at disse første som han beregnet de lå på linjen med realdel lik 1/2 og var enkle nullpunkter. Så han formodet at de alle lå på den linjen. Og han hadde funnet en meget god approksimasjonsformel for å beregne funksjonen i denne stripen hvor realdelen ligger mellom 0 og 1, og særlig på linjen hvor imaginærdelen er lik 1/2. Så han hadde kunnet gjøre numeriske beregninger gående opp ett stykke, og hadde funnet flere nullpunkter på linjen, og ingen utenfor. Så han hadde et visst grunnlag for å gjøre sin formodning. Dessuten var det dette at denne eksplisitte formel som han angir for $\pi(x)$, den blir enklere, den vil ha det minste restledd så å si. Det opptrer visse rekker som inneholder nullpunktene. Og disse rekkene vil ha den minste innflytelse hvis de alle ligger på denne linjen hvor realdelen er lik 1/2. Det vil føre til den enkleste fordeling, den jevneste fordeling av primtallene hvis det er slik. Det er også filosofiske grunner til å tenke seg at de skulle være der. Særlig hvis man for eksempel er tilhenger av Leibniz' filosofi, at i denne verden er ting så bra som de kan være, og da skulle man tro at det i hvert fall må gjelde for primtallene.

Kunne du tegne på tavlen hvor nullpunktene skal ligge? Du har sagt det med ord, men det kunne jo være fint med en tegning.
Vanligvis betegner man realdelen med σ og imaginærdelen med t. Og du har den linje hvor sigma er lik 1/2. Så ligger da nullpunktene nødvendigvis i alle fall i denne stripen der σ ligger mellom 0 og 1, som kalles ofte for den kritiske stripe, og linjen $\sigma = 1/2$ kalles gjerne den kritiske linje. De ligger i alle fall symmetrisk til denne linjen her, slik at om det var et nullpunkt på denne side så måtte det være et nullpunkt på samme avstand med samme t, men med σ like langt fra 1/2 på den andre siden. Hvilket betyr at de som ikke lå på linjen måtte forekomme i par, på hver side. De som er på linjen kan være enkle nullpunkter, og nu har man beregnet med moderne regnemaskiner nullpunktene uhyre langt opp, og de ligger alle på linjen, de er alle enkle. Så det kan i dag vanskelig kastes noe tvil på Riemanns hypotese, må jeg si. Den numeriske evidens er nu ganske overveldende. Det var den ikke da jeg begynte å arbeide, får jeg si. For da hadde man bare beregnet den numerisk for en forholdsvis kort strekning, som ikke kunne regnes for typisk på noen måte. Det fantes gode grunner til å kaste tvil på den fra det synspunkt, men ikke at jeg egentlig hadde noen tvil, noen gang.

Hvis man visste at Riemannhypotesen var sann, ville det gitt innsikt i de tingene vi snakket om tidligere?
Det ville ikke hjelpe så mye på disse spørsmålene, nei. Det er så at de må henge sammen med hva man kunne kalle finfordelingen av nullpunktene på den kritiske linje, og det vet vi ikke mye om. Det finnes visse formodninger som ikke er bevist, og det er mulig at man kan komme frem til noen nye skarpe formodninger som kan gi noe mer. Men jeg tror det vil, om det noen gang kommer, ta uhyre lang tid før sånne spørsmål kan bli oppklart.

Men er der eller forventer du at det er en direkte sammenheng mellom strukturen av fordelingen av nullpunktene på linjen $Re(s) = 1/2$ og primtallenes fordeling?
Det er i og for seg klart at det er en forbindelse, fordi at disse eksakte formler, for eksempel Riemanns formel for $\pi(x)$, så er antallet primtall under ett viss tall x gitt ved en formel som er nokså grei, men som inneholder en uendelig rekke hvor disse nullpunktene inngår. Så det er en sammenheng. Det er klart, men om det er en sammenheng som man kan komme til bunns i, det er en annen sak, og noe som man kan ha stor tvil om. Jeg mener, det er mulig at man kan med tiden komme frem til resultater som gir mer detaljert informasjon om hvordan nullpunktene er fordelt på linjen. Men det er håpløst i dag å spekulere om hvordan det kan være. Hva vi har i dag er bare nokså primitive formodninger om fordeling av nullpunktene som man kan dra noen slutninger av, men ikke særlig presise slutninger.

Men du vil ikke forvente at et bevis av Riemann-hypotesen ville gi den type innsikt?
Det er mulig at et bevis av Riemanns formodning vil gi en hel del annet samtidig, fordi det er sannsynlig at det må bero på ganske nye ideer og sånn som kan bringe inn en hel del ny informasjon. Mer enn bare at de ligger på linjen. En hel del mer detaljert informasjon. Men igjen, det er sånn som man kan spekulere på.

Du har ingen spekulasjoner du vil komme med i den retning?
Nei, det har jeg ikke. Jeg vet ikke i hvilken retning man skal søke for å finne et bevis. Derfor kan jeg heller ikke ha noen formodninger om hva andre resultater eller bevis vil medføre. Men man kan vente at nye ideer og nye metoder som gir et så avgjørende resultat vil også gi tilgang til en del mer.

Av de 23 problemene som Hilbert nevnte i 1900 holder du på Riemann-hypotesen som det absolutt viktigste?
Vel, for meg er det viktigst så klart. Men det behøver ikke å være det for andre matematikere. Det avhenger av hva slags interesser man har. Det er ganske mange ting som avhenger av Riemanns hypotese, særlig hvis man tenker på den i den mer generelle form. Jeg mener, Riemann snakket bare om zeta-funksjonen. I dag har man jo så mange funksjoner av lignende type hvor man regner med at samme ting holder. Og jeg tror det kanskje er lite sannsynlig at man bare finner et bevis for Riemanns opprinnelige hypotese uten at det også gir en hel del om disse andre rent generelt. Det ville jo ha uhyre store konsekvenser.

Så du tror fortsatt at det er mye trolldom å avdekke blant primtallene i framtiden?

Jaja. Det er utvilsomt ting som kan... det finnes kanskje også en del problemer som er faktisk uløselige i denne retning. Det er så at man kan gjøre spørsmål, for eksempel, om disse ting man kaller for Fermat primtall. Det er primtall av formen $2^p - 1$, hvor p er et primtall. Det er ingen som vet om det finnes uendelig mange av disse, eller bare et endelig antall. Primitive sannsynlighetsteoretiske betraktninger skulle indikere at det antagelig finnes uendelig mange av dem. Derimot, denne type primtall som kom inn i forbindelse med sirkeldelingsligningen, altså hvor man kan dele sirkelen i et visst antall deler med passer og linjal som er de klassiske konstruksjonsmidler i geometrien, det er primtall av formen

$$2^{2^n} + 1.$$

Ingen vet om det finnes uendelig mange av disse heller. Men der sier sannsynlighetsteoretiske argumenter at det bare er et endelig antall. Det er en uhyre tynn følge. Jeg mener, de vokser veldig fort disse tallene. Det er kanskje spørsmål som aldri blir avgjort, og det er mulig at det ikke finnes... Det er utvilsomt så at det er en hel del spørsmål i matematikken som kan stilles, som er uløselige, så og si. Men det er jo så at vi ofte stiller spørsmål som det i grunnen ikke er noen særlig tvingende grunn til å stille. Jeg har alltid vært av den mening at hvis det gjelder et problem som man faktisk nesten er nødt til å betrakte, jeg mener som så og si tvinger seg på en, så skal det alltid finnes en matematisk løsning til det.

Vi har jo mange utvidelser av tallbegrepet. I nyere tid så har en sett, for eksempel, at en prøver å utvide tallbegrepet også i en mer geometrisk retning hvor sfærene, på en måte, spiller rollen av naturlige tall. Har du noen tro på at den type utvidelse vil gi noe ny innsikt i tallteorien?

Den kan gi noe ny innsikt i andre retninger. Jeg tror ikke det har noen betydning for hva vi vet om disse mer vanlige tall som vi betrakter. Jeg mener for eksempel om man tar de aller første generalisasjoner av tallbegrepet utover de komplekse tall, kvaternioner. Det er det jo folk som har skrevet en del om. Tallteori basert på kvaternioner og sånn, og kommet fram til en del ting, men det har aldri gitt noen nye innsikter om de klassiske tall. Så jeg tror ikke det er mye å vente i så måte. Jeg må si, kvaternioner kan være nyttige for en del ting, men egentlig så forferdelig interessante er de ikke. Men det vesentlige nye er jo det at man må gi opp kommutativiteten i multiplikasjonen.

Hva med det som Deligne viste, den såkalte Riemannhypotesen for endelige kroppsutvidelser?

Vel, det er jo altså en videreutvikling av dette som begynte med det som først Hasse beviste for zeta-funksjonen for en kubisk kurve, og senere André Weil for generelle kurver. André Weil fremsatte en del formodninger, og det var dette som da Deligne gjorde. Jeg mener, efter André Weils resultat, så var det jo de som trodde at det skulle lede til at man skulle finne en måte å angripe det klassiske problemet på, ved å se på de metoder som hadde vært benyttet. Men det synes som det ikke er tilfellet. Jeg mener, det er tydelig at disse ting har en viss sammenheng, men de beviser som har vært funnet, de har ikke gitt noen som helst indikasjon på at de kan overføres til det klassiske tilfellet.

La oss vende litt tilbake til Riemann-hypotesen. Vi snakket med deg tidligere om at du skulle ha antydet at den ikke var riktig, men det tilbakeviste du jo klart.
Hva jeg ville fremheve ved mitt foredrag i København, (den 10ende Skandinaviske kongress i matematikk, København 1946) var at det fantes ikke mye av hva man kunne kalle numerisk evidens for den, fordi at regningene gikk på den tid så kort at om det hadde vært noen unntagelser så skulle en ikke ventet at de ville ha kommet så tidlig. For det første, hvis man ser på Riemann-Siegel formelen for funksjonen på halvlinjen, så er det så langt som regningen gikk den gang, at den gikk litt over imaginær del lik 1000. Det er veldig få ledd som kommer med der ved disse beregningene, og funksjonen oppfører seg uhyre regulært. Man hadde jo den ting som ble fremsatt av danske Gram, den såkalte Grams lov, og så langt som regningene gikk var det to unntagelser til Grams lov. Grams lov ville ha medført at Riemanns hypotese var riktig, men den ville også ha innført alt for stor regularitet for fordelingen av nullpunktene. Jeg visste ut fra de resultatene jeg hadde oppnådd i de arbeidene jeg hadde skrevet tidligere at Grams lov etter hvert ble mer og mer gal. Istedenfor å ha et par unntagelser så ville det etter hvert bli nærmere unntagelsen når den holdt. Som jeg sa så var det å vente at de første nullpunkter, om det var noen andre enn de på linjen, så ville de kommet et langt stykke etter de første unntagelser til Grams lov. Så det numeriske materialet tyder i grunnen ikke spesielt på hva som var riktig, og andre resultater var bare av statistisk art. Men jeg må si at hvis man tror at det er noen ting i denne verden som er som det skal være, så synes jeg det er riktigheten av Riemanns hypotese. Den gir den beste fordeling av primtallene, og også den man i grunnen skulle vente statistisk sett, nemlig at avvikelsene fra

$$li(x) = \int_2^x \frac{dt}{\log t}$$

ikke er stort større enn kvadratroten av x. Det vil medføre en eleganse som er slående. Dessuten vil jeg si at jeg hadde en sterk tro på Riemanns intuisjon.

Men forventer du at det er en slags regularitetsstruktur av nullpunktene på linjen?
Det er utvilsomt en viss lovmessighet, men hvor langt det går er det vanskelig å gjette på. For eksempel, man kan reise spørsmål om imaginærdelene av nullpunktene er på noen måte forbundet med andre matematiske konstanter som vi har allerede. Det er det ingen som vet noe om selvfølgelig, men det er ikke umulig må jeg si. Jeg anser det ikke som helt umulig at det kunne være en hel del lovmessighet som ville være helt uventet, og som det gjenstår å oppdage. Det kan godt være. Jeg mener, det er ingen grunn til å tro at vi er så veldig langt henimot hva som kan gjøres i fremtiden engang. Det er nok alltid mulig at det kan finnes nye måter å se det på og som leder til helt uventede sammenhenger.

Var du den første som tok i bruk spektralteoretiske metoder?
Jeg vet i grunnen ikke det. Det har vært forsåvidt fra gammelt av en del folk som hadde gjettet på at kanskje nullpunktene hadde en forbindelse med et spektralproblem av en eller annen art, men kunne ikke peke på noe bestemt. Men jeg tror at det er lite nyttig i å spekulere hvor snart man kommer opp med noen positiv ide om hvordan man kan angripe og oppnå noen nye resultater. Det vil nok komme noen gang, tror jeg, men hvor lenge en må vente – eller dere må vente – er vanskelig å gjette selvfølgelig.

Men om du skulle gjette, ville du tro at et idé-kompleks hvor man studerer et spektralproblem på et eller annet rom, som man ennå ikke vet hva er, at det er noe slikt som eventuelt ville føre til en løsning?
Det er en tanke som flere folk har vært inne på. Det har vært noen som har kunnet konstruere et rom, hvis de antar at Riemanns hypotese er riktig, hvor de kan definere en operator som er relevant. Vel og bra, men det gir jo i grunnen ingen ting selvfølgelig. Det hjelper ikke mye hvis man må postulere resultatene i forveien – det er ikke mye verdi i sånt.

Har du selv arbeidet seriøst med Riemann-hypotesen i de siste 30 årene?
Vel, jeg har tenkt på den fra tid til annen. Det var en gang jeg hadde en idé som jeg tenkte kanskje kunne ha ledet til et bevis. Jeg fulgte den et stykke på veien, men jeg syntes det var litt usannsynlig at det skulle lede frem. Den ville bare gitt Riemann-hypotesen for zetafunksjonen $\zeta(s)$ og for noen av Dirichlets L-funksjoner, men ikke for alle. Jeg har aldri prøvd å fullføre beviset. Idéen berodde på at jeg hadde funnet en måte å approksimere $\varphi(s)\zeta(s)L(s)$, hvor $L(s)$ var en L-funksjon med kvadratisk karakter χ slik at $\chi(-1) = -1$, og $\varphi(s)$ er en hel analytisk funksjon som gjør produktet reelt på linjen $s = \frac{1}{2} + it$, med polynomer som konvergerer mot $\varphi(s)\zeta(s)L(s)$. Det at polynomene hadde symmetrien bygget inn kunne gi håp om at man kunne gjøre noe ad denne vei. Spørsmålet var hva man kunne si om nullpunktene til disse polynomene. Men etterhvert ble jeg mer og mer overbevist om at det ikke kunne fungere som jeg først hadde tenkt. Det virket så usannsynlig på meg. Men jeg har sett av og til at folk har angrepet et problem på en måte som syntes ”hare-brained”, for å bruke et engelsk ord, men så viste det seg at man kunne få det til å virke. De har bevist ett eller annet som man ikke lett kunne bevise på annen måte. Og på samme måte har jeg sett folk ha idéer som syntes virkelig strålende og briljante, men det eneste problemet var at når man følger det til enden, så kunne man ikke få noe ut av det likevel. Så det kan virke begge veier: noen ganger fungerer en god idé ikke, og hva som synes en dårlig, idiotisk idé kan faktisk fungere.

Har du kommunisert noen av disse idéene du hadde til andre?
Ja, jeg har nevnt dette som jeg nevnte for dere, Jeg har sagt at jeg ikke har noen særlig tro på at det ville ha ledet til noe om jeg hadde fortsatt med det og fulgt det videre. Det appellerte noe til meg i begynnelsen og jeg prøvde å følge det opp lenge, men jeg ble mer og mer overbevist om usannsynligheten av at jeg kunne ha oppnådd noe på den måten. Men uten faktisk å ha verifisert at det ikke kunne gjøres.

Har du mange idéer, eller etterlatte tanker, som du vil la komme ettertiden til gode?
Nei, jeg kan ikke si det om Riemann-hypotesen. Jeg har en del statistiske resultater. Det er en del folk som har vært på meg i de siste årene og villet at jeg skulle publisere i detalj disse tingene som jeg har forelest om noen ganger, nemlig om lineære kombinasjoner av visse Dirichlet-rekker. Disse lineære kombinasjoner, som er så beskafne at de også har funksjonal-ligninger som leder til en reell funksjon på den kritiske linjen, slik at vi vanligvis har en positiv del av nullpunktene på den kritiske linjen. Jeg må si at det er interessant at dette kan gjøres, men man kan ikke bruke det til noe større. Det er egentlig ikke så mange nye idéer som inngår i det, bare eldre idéer som er kombinert på en ny måte. Så jeg synes det var interessant å utarbeide det og forelese om det, men vet enda ikke om jeg bør publisere det. Det blir en del lengre enn hva jeg egentlig skulle ha lyst til å skrive opp. Som jeg sa tidligere så er jeg av natur noe lat, og det er min unnskyldning for ikke å ha publisert så mye. Mange ting er jo etter hvert publisert av andre. Så selv om jeg ikke skulle publisere dette, så vil det nok etter hvert komme noen andre som vil gjøre det, skulle jeg tro.

Du nevnte at andre forsøk på å løse Riemann-hypotesen – slik som Connes' – at de essensielt sett, som du ser det, bare gir reformuleringer.
Ja, det er en ny måte å komme frem til de eksplisitte formlene – en ny adgang – men det gir i grunnen ikke mer enn hva man allerede hadde. Connes trodde utvilsomt til å begynne med at han holdt på med noe som skulle lede an til et bevis, men det viste seg at det leder ikke lenger enn andre forsøk. Da jeg snakket med ham sist så hadde han innsett dette. Det er ofte slik med sånt arbeid som er nokså formelt. Det var jo, for eksempel, en japaner Matsumoto som holdt noen foredrag som fikk en hel del folk til å tro at han hadde beviset.

For å avrunde om Riemann-hypotesen: hvis vi, som ikke-eksperter, stilte deg følgende spørsmål og du skulle gi et kort svar: Hva er det Riemann-hypotesen forteller oss om primtallene?
Den forteller oss at de er veldig pent distribuert, omtrent så jevnt og så bra som man overhodet kunne vente. Man kan ikke vente en fullstendig jevn fordeling, selvfølgelig. Men den forteller oss at ihvertfall når det gjelder matematikken – og ihvertfall tallteorien – så lever vi i Leibniz' best mulige verden, slik som den gode Candide i Voltaires "Candide" blir fortalt av sin lærer Pangloss, at han lever i den best mulige av alle mulige verdener. Vel, i alle fall i tallteorien så har man den best mulige sammenheng av tingene, selv om man ikke kan bevise det enda. Det ville gi meg stor tilfredsstillelse å se et bevis, av den grunn at det vil vise at det er noen ting som er riktig i denne verden. Det er så mye annet som ikke går som det skulle, men i alle fall primtallene, og selvfølgelig også zeta-funksjonens nullpunkter, er distribuert så vel som de kunne være.

Har du tenkt over om det finnes noen slags geometriske analogier til primtallene når det gjelder fundamentalitet?
Hvis du betrakter en kompakt Riemannsk flate med den hyperbolske metrikken, og ser på de lukkede geodetiske linjer, så kan du si at deres lengder svarer der til logaritmene til primtallene. I det kompakte tilfellet så har man i det vesentlige at

Riemanns hypotese er riktig, bortsett fra at vi i endel tilfelle har noen nullpunkter som ligger mellom 1/2 og 1 på den reelle linjen, hvilket jeg ikke tror kan hende med de funksjonene som vi gjerne betrakter i tallteorien. Skjønt jeg vet det er noen som har trodd på at kanskje noen av de kvadratiske L-funksjonene har nullpunkter mellom 1/2 og 1.

Er det ellers noe du har å bemerke om Riemann-hypotesen før vi forlater det temaet?
Jeg tror det er mulig at det tar ganske lang tid enda før det blir avgjort. Fra tid til annen har jo folk vært optimistiske. Hilbert, da han ga sine problemer i 1900, mente at Riemanns hypotese var et av de problemer man ville se løsningen av før det var gått så forferdelig lang tid. Det er jo nå litt over hundre år siden han ga sine berømte forelesninger om disse problemene. Så vi må jo si at hans oppfatning var feil. En hel del av de problemer som han anså som mer vanskelig viste seg å være atskillig enklere. Det var for eksempel en del problemer om transcendens av tall som ble avgjort tidligere. Det har jo vært gjort store fremskritt når det gjelder transcendensresultater siden Lindemanns opprinnelige arbeider fra 1882. Jeg må forresten nevne en historie om denne Lindemann. Da jeg var i Uppsala høsten 1939 så fant jeg i biblioteket der to arbeider av Lindemann som han hadde publisert da han var i nokså høy alder, ihvertfall vel over sytti, der han mente seg å ha løst Fermats problem. I arbeid nr. 2 hadde han en hel del stygge ting å si om de som påpekte feil i hans første arbeide. Det han hende med den beste. Lindemann var jo virkelig en meget stor matematiker. Hans transcendensresultat var uhyre vidtrekkende og et veldig generelt resultat – han bygget på noen tidligere resultat av Hermite. Det hender at folk, også matematikere, blir litt sånn senile i sine eldre år, dere får bære over med meg hvis...

Var det noen oppdagelser du gjorde under krigen som senere ledet til oppdagelsen av sporformelen?
Sporformelen kom noe senere, og den hadde i grunnen ikke noe særlig forbindelse med hva jeg hadde gjort med zeta-funksjonen. Den kom frem ved at jeg hadde sett et arbeide av Hans Maass hvor han betraktet løsningen av en viss partiell differensialligning, som er invariant under modulgruppen, for eksempel, og det var en hel del problemer han hadde latt stå åpne. Jeg så at man skulle kunne bruke noen idéer som jeg hadde vært litt inne på før krigen, en del ting som jeg hadde kommet inn på i kjølvannet av min hovedoppgave. Disse integraloperatorene, som jeg hadde betraktet, følte jeg meg mye mer familiær med enn differensialoperatorer. Jeg likte bedre å se på Fredholm-ligninger enn differensialligninger, og jeg tenkte at hvis man betraktet klassen av alle invarianter, dvs. integraloperatorer som var invariante under modulærgruppen, for eksempel, så ville det være en mer naturlig ting enn å se bare på den såkalte hyperbolske Laplace-operatoren. Så jeg begynte å se på det. Selvfølgelig, dette var integraloperatorer som strakte seg over hele området, øvre halvplan hvis man brukte denne representasjonen, men man kunne også bruke invariansen under gruppen til å få en integraloperator over bare et fundamentalområde. Da jeg hadde gjort dette, lå det veldig nær å se om det lot seg gjøre å beregne sporet av integraloperatoren som virket innen fundamentalområdet, og det viste seg at ved å kombinere leddene på en passende måte, så ga det meg en meget tiltrekkende form.

Det gikk forholdsvis lett hvis jeg ikke betraktet modulgruppen, men en gruppe som hadde kompakt fundamentalområde i det hyperbolske plan. I 1952 ga jeg en del forelesninger i Midtvesten om dette ved fire universiteter: I Ann Arbor, Purdue, Chicago og Urbana. Det tok meg en del besvær å gjennomføre beviset for modulgruppen som jo ikke har kompakt fundamentalområde, og det tok meg enda mer besvær å gjøre det generelt for grupper i det hyperbolske plan som har endelig areal av fundamentalområdet, men som har det man kaller ”cusps” eller ”spisser”. Det lyktes meg å fullføre dette. Den vanskelige ting var først å håndtere det kontinuerlige spektrum, knyttet til de såkalte Eisenstein-rekkerne, og å vise at de også kunne fortsettes analytisk om det var en generell gruppe, ikke bare en modulgruppe, men en generell gruppe som hadde endelig areal av fundamentalområdet, men som ikke var kompakt. Det greide jeg å gjøre sommeren 1953, og jeg kommuniserte dette resultatet til Siegel. Jeg tenkte at han ville være noe interessert, og det var han da også. Han spurte om jeg ville komme og forelese om dette i Göttingen i 1954, og det gjorde jeg. Det var en ganske lang rekke av forelesninger som sluttet med å behandle det ikke-kompakte tilfellet generelt, ikke bare for modulgrupper,men generelt. Det var en assistent som hadde tatt en del notater. Jeg skulle skrive opp behandlingen av det ikke-kompakte tilfellet − det kompakte tilfellet var nokså kurant − så jeg begynte å skrive sammen siste del. Senere fikk jeg da tilsendt dette som denne assistenten hadde skrevet, og jeg syntes det var så forskrekkelig dårlig at jeg ikke sendte tilbake det som han hadde sendt meg. Så de såkalte Göttingen-notene begynte med 6. kapittel. Jeg holdt på den tiden på å utarbeide forelesninger for den kongressen eller symposiet som ble holdt i Bombay januar/februar i 1956. Jeg var glad det ikke varte lenger, da det tidlig blir svært varmt der. Jeg skrev sammen disse foredragene, og jeg holdt så 4×1 timers foredrag i Bombay om dette. Det var det som jeg da publiserte i deres beretning. Der behandlet jeg ikke bare det hyperbolske planet, men også generelle hyperbolske rom og andre høyere dimensjonale tilfeller, og påpekte hva vanskelighetene var. Jeg behandlet det kompakte tilfellet fullstendig, for der er det egentlige ikke noen nye vanskeligheter som kommer inn. I de høyere dimensjoner kommer der inn mer komplikasjoner når man betrakter kontinuerlige spektra som inntreffer med typer av ikke-kompakthet som kan være forenlig med endelig volum av fundamentalområdet, og vi har kontinuerlige spektra av forskjellige dimensjoner. Det synes jeg er et av de bedre resultater av det jeg hadde oppnådd i denne retning. Jeg ga sporformelen generelt for det kompakte tilfellet, og jeg gjorde også mer i det hyperbolske tilfellet, så jeg syntes ikke det var noen grunn for meg til å inkludere de tingene som denne assistenten hadde sendt meg. Jeg sendte aldri de første 5 kapitlene til Göttingen. Enhver intelligent person kunne komplettere det som ble publisert, dels i beretningen fra møtet i Bombay, men det ble også publisert i en indisk journal.

Poissons summeformel, var den på noe tidspunkt en filosofisk motivasjon for deg, da du arbeidet med sporformelen?

Den var egentlig ikke noen motivasjon, men den kan sees som en analogi når man betrakter euklidske rom og kommutative grupper og deres virkning. Poissons formel,hvis man behandler den på samme måte, kan betraktes som et spesialtilfelle av sporformelen.

Var din motivasjon arbeidene til Maass?
Det var hans første avhandling som jeg så litt på, jeg har aldri riktig lest detaljene. Jeg så mer på hva han ikke hadde gjort enn på hva han hadde gjort, og tenkte at det skulle jeg gjøre ved å betrakte klassene av alle invariante integraloperatorer.

Hvor lang tid brukte du på å bevise sporformelen?
En del av det så jeg nokså tidlig, og det kompakte tilfellet gikk ganske fort.

Kunne du skrive ned sporformelen for oss?
Vel, den ser noe komplisert ut generelt, men i det enkleste tilfellet der gruppen Γ har et kompakt fundamentalområde – la oss si $\mathcal{D}$ – i det hyperbolske plan, så blir den betraktelig enklere. Så la $\lambda_n = \frac{1}{4} + r_n^2,\ \ n = 1, 2, \cdots$ være egenverdiene til den assosierte Laplace-operatoren, og la $h(r)$ være en like funksjon som er analytisk når $|\mathrm{Im}(r)| < \frac{1}{2} + \epsilon$ for en $\epsilon > 0$, og med vekstbetingelse $h(r) = O(\frac{1}{(1+r^2)^{1+\epsilon}})$. La

$$g(u) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} h(r)e^{iur}dr$$

være Fourier-transformen til $h(r)$. Da blir sporformelen

$$\sum_{n=1}^{\infty} h(r_n) = \frac{A(\mathcal{D})}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} rh(r)\frac{e^{\pi r} - e^{-\pi r}}{e^{\pi r} + e^{-\pi r}}dr$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\{P\}_\Gamma} \frac{\log N(P)}{N(P)^{k/2} - N(P)^{-k/2}} g(k \log N(P))$$

Her er $A(\mathcal{D})$ arealet til $\mathcal{D}$ målt med hensyn på det invariante hyperbolske målet, $\{P\}_\Gamma$ betegner en primitiv klasse av hyperbolske transformasjoner, $N(P)$ er normen til P. P'ene tilsvarer de geodetiske kurvene på den assosierte Riemannske flaten, og $\log N(P)$ er lengden til P.

Når du ser på den veldige betydningen sporformelen har hatt regner du det som din største matematiske oppdagelse?
Vel, den er antagelig det, skulle jeg tro. Det er antagelig den som har mest anvendelse, skulle jeg også tro. Skjønt, disse anvendelsene kan jeg ikke si at jeg nødvendigvis begriper. Jeg mener, jeg har hørt at den har anvendelse i fysikk, og sånn, men jeg vet ikke presis hvordan det henger sammen. Og, jeg er egentlig ikke noe særlig interessert i hvordan det henger sammen heller.

Er du overrasket over at den har fått så stor betydning som den har gjort?
Vel, jeg er litt overrasket over at den har fått anvendelse i fysikk. Matematisk sett så synes jeg nok at den syntes betydningsfull for meg. Den inneholder en hel del informasjon, og selve problemet inneholder også en hel del åpent for fremtidig arbeider. Særlig i de høyere dimensjoner hvor man har kontinuerlige spektra av mer enn en dimensjon, så og si. Det kompliserer jo saken. Det er nok en hel del å gjøre der enda. Men det får heller bli gjort av andre, må jeg si.

Jeg har ikke tenkt å skrive noe mer om sporformelen. Jeg holdt noen foredrag i 80-årene, og også et par ganger senere om det jeg kalte "hybrid trace formula".

Det enkleste er, kan man si, hvis du tar det hyperbolske plan og en vanlig algebraisk Riemannsk flate avbildet i det hyperbolske plan, som henger sammen med uniformeringsteoriene – hvordan skal jeg uttrykke dette? – så kan du utlede en del klassiske ting, som for eksempel Riemann-Roch formelen, som spesialtilfeller av sporformelen. Du bruker noen spesielle kjerner, får jeg si. Vel, det lignende kan gjøres i flere høyere dimensjoner også, der er det noe vanskeligere å finne de rette kjernefunksjonene. Det kan gjøres for alle de såkalte "bounded symmetric domains" og for visse klasser av funksjoner. Det finnes tilsvarende ting der, særlig hvis du har et produkt av flere av disse, hvor du har tildels noen av dem som i seg selv gir hva som svarer til en Riemann-Roch formel. Men den andre komponenten i kjernen er mer generell, og det er det jeg refererte til som "hybrid trace formula". Og av noen av dem kunne man få ganske interessante resultater. Et enkelt tilfelle er de såkalte Hilberts modulgrupper som knytter seg til et reelt algebraisk tallegeme. Hvis det er av graden n så har du et produkt av n hyperbolske plan. Du kan velge en kjerne der, som er hva man kunne kalle den singulære kjerne, som leder til Riemann-Roch formelen, for, la oss si, $n-1$ av disse variable. For den siste kan du ta en generell kjerne, så får du formler som leder til disse Dirichlet-rekker som du kan danne fra denne Hilbertske modulgruppen. Og blant annet får du det interessante tilfelle at hvis n er et like tall, så får du der en rekke av noe som svarer til en zeta-funksjon og en rekke av L-funksjoner, kan du si, som er tilknyttet til gruppen, og denne zeta-funksjon har en pol i $s = 1$. Og i det klassiske tilfellet, hvis du har bare et hyperbolsk plan, eller hvis du har et ulike antall hyperbolske plan, så ville samme problem lede til noe som har ett nullpunkt i $s = 1$. For n like så er det noe som er mer analogt med zeta-funksjonen og Dirichlets L-rekker. Jeg holdt en del foredrag om det i 80-årene, og kanskje også noe senere, men har aldri publisert det, faktisk. Jeg vet ikke om noen andre har publisert det til denne tid. Jeg har ikke fulgt efter hva som har skjedd med dette. Det har blitt skrevet en hel del i litteraturen som jeg ikke har fulgt med i. Jeg leser ikke så mye som jeg gjorde før.

Synes du det er tilført noe vesentlig nytt i de senere utvidelser og generaliseringer av sporformelen?

Vel, synspunktet ble jo skiftet noe da man begynte å se på gruppe-representasjoner, selvfølgelig. På den tiden tenkte jeg ikke på det, saken er den at jeg har i grunnen aldri lest noe større om disse tingene. Det er først senere at jeg har begynt å se litt på dette. I det hyperbolske planet er det ikke nødvendig å se på gruppe-representasjoner, alt kan oppnåes ved å se på automorfe funksjoner og automorfe former, de er alle skalarer så å si, bare en komponent. I de høyere dimensjonale symmetriske rom er situasjonen mer komplisert. Om du har en diskret gruppe hvis fundamentalområde har endelig volum, kan du se på automorfe funksjoner selvfølgelig, men i de fleste tilfelle er det intet som svarer til de skalare automorfe former, og selv for de begrensede komplekse symmetriske områder, hvor skalare former alltid eksisterer, forteller de ikke hele historien. Du må i det høyere dimensjonale tilfellet også betrakte vektorer av funksjoner som transformeres under gruppens aksjon ved en grupperepresentasjon, som er en matrise. Det er bare i det hyperbolske plan at vi får alt ved å se på automorfe funksjoner og skalare former. Det gir mer generalitet å betrakte alle grupperepresentasjoner, men jeg må tilstå at jeg har aldri satt meg noe større inn i dette felt. Jeg har aldri lest noe større. Jeg opererte mest med å se i noen avhandlinger for å se hva folk gjorde, og hva jeg kunne forstå av det og bygge videre på min egen måte. Jeg har lest svært få bøker om matematikk, men de jeg har lest har betydd en hel del for meg. Mest har jeg sett på avhandlinger, mer enn lærebøker, men en lærebok som har betydd en hel del var Heckes "Algebraische Zahlentheorie", den lærte jeg en hel del av – den er en riktig juvel.

Er det andre bøker enn Heckes som har vært viktige for deg?.
Saken er den at når det gjaldt algebraisk tallteori, så var det mange andre bøker som jeg så, og som jeg prøvde å lese, men de hadde ikke min måte å se det på. Jeg fant Hecke svært forståelig og måten han innførte idealbegrepet på. Hermann Weyl hadde skrevet en bok om algebraisk tallteori, en forholdsvis liten en, og Landau hadde også skrevet en bok om samme emnet. Jeg følte meg aldri komfortabel med deres bøker. Jeg foretrakk Heckes måte å se tingene på. Den fungerte jo svært bra for han, og han var den første som kunne gjøre noe større med zeta- og L-funksjonene for de algebraiske kroppene av høyere grader og bevise funksjonalligningene.

Bortsett fra algebraisk tallteori er det andre bøker, for eksempel Titchmarsh' bok om Riemanns zeta-funksjon, som har hatt betydning for deg?
Den hadde en hel del bra i seg, men hadde også en hel del ting i seg som ikke var bra. Det var ingen grunn til å ta med noe om nesten-periodisk funksjoner, og å betrakte zeta-funksjonen som en nesten-periodisk funksjon. Det er veldig lite nyttig i dette synspunktet. Det kan være interessant på sin måte, men man har aldri fått noen ting ut av det som har hatt noen verdi for zeta-funksjonen eller noen av disse tallteoretiske rekkene. Det kapitlet kunne ha vært helt utelatt. Titchmarsh hadde en hel del gode ting i sin bok. Jeg må si at jeg leste ikke alle hans bevis. I det hele tatt når det gjelder mange av bevisene i disse bøker som berører analytisk tallteori, så var ting gjort uvanlig komplisert. Når de skulle arbeide med de eksplisitte formlene, er det så at det er én formel som en egentlig var interessert i, der rekken ikke er absolutt konvergent. Faktum er at i alle tilfeller er det mye enklere å bruke de integrerte formler. Man kan alltid få konvergens ved å integrere et par ganger, da blir rekkene absolutt konvergente. En kan oppnå like gode resultater ved å bruke disse rekkene og ta deriverte, og det er helt unødvendig å betrakte de som ikke konvergerer absolutt.