

Generalisering av det gylne rektangel til høyere dimensjoner

Olav B. Skaar

Fakultet for teknologi og realfag
Univeritetet i Agder
Servicebox 422, N-4604 Kristiansand
Norge
olav.b.skaar@uia.no

1 Innledning

Det gylne snitt og *det gylne rektangel* er velkjente begreper innen matematikk, arkitektur og kunst. Men hvordan kan disse begrepene utvides og generaliseres? Eller mer spesifikt: Hvilken tredimensjonal figur tilsvarer best *det gylne rektangel*? Et alternativ kunne være den figuren som Huntley i 1962 [2], [3] introduserte som *den gylne kuboide* (eng. *golden cuboid*). Han brukte betegnelsen om et rettvinklet parallelepiped hvor fire av sideflatene var gylne rektangler. Men som vi skal se senere synes denne kuboiden i liten grad å ha de egenskapene som naturlig generaliseres fra det gylne rektangel. Den betegnes derfor i fortsettelsen for *Huntley-kuboiden*.

Vi ser først på det gylne snitt og en utvidelse av dette til å gjelde deling av et linjestykke i mer enn to deler. Forholdet mellom dets lengder defineres analogt til det gylne snitt, men dets størrelse vil endre seg og ha relasjon til de generaliserte Fibonacci-konstanter. Det gylne rektangel generaliseres til høyere dimensjoner. Vi ser spesielt på hvordan egenskapen - at fjerning av største kvadrat gir et nytt gyllent rektangel - kommer til uttrykk i høyere dimensjoner.

2 Det gylne snitt med generalisering

Vi bruker en vanlig definisjon:

Definisjon 2.1 (Det gylne snitt) Når et linjestykke deles i to slik at lengden av hele linjestykket forholder seg til den største delen som den største del forholder seg til den minste, kalles dette forholdet *det gylne snitt*.

En sier også at linjestykket er delt i *det gylne snitts forhold*, eller er *høydelt*.

I figur 1 er delenes lengder a_1 og a_2 , og definisjon 2.1 gir: $\frac{a_1+a_2}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \phi_2$. Dette gir følgende likning for kvotienten ϕ_2 : $\phi_2^2 - \phi_2 - 1 = 0$, med positiv rot

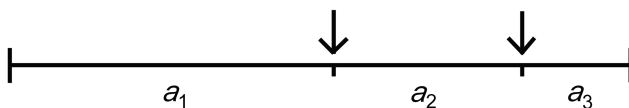
$$\phi_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1.61803\dots$$



Figur 1: Deling av et linjestykke med det gylne (mono)snitt.

Om en deler et linjestykke i tre deler analogt med todelingen i det gylne snitt, bør det være slik at:

Definisjon 2.2 (Det gylne dobbeltsnitt) Når et linjestykke deles i tre slik at lengden av hele linjestykket forholder seg til den største del, som denne forholder seg til den mellomste del, som denne igjen forholder seg til den minste, kalles forholdet det gylne dobbeltsnitt og betegnes ϕ_3 .



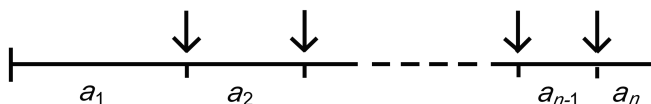
Figur 2: Deling av et linjestykke med et gyllent dobbeltsnitt.

Om delenes lengder er a_1, a_2 og a_3 får en: $\frac{a_1+a_2+a_3}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \phi_3$. Dette gir følgende likning for kvotienten ϕ_3 : $\phi_3^3 - \phi_3^2 - \phi_3 - 1 = 0$, med eneste reelle rot

$$\phi_3 = \frac{1}{3} \left[1 + \sqrt[3]{19 - 3\sqrt{33}} + \sqrt[3]{19 + 3\sqrt{33}} \right] = 1.83928 \dots$$

En naturlig generalisering av det gylne snitt ville være å dele et linjestykke i n ulike stykker og bestemme deres relative lengder med tilsvarende proporsjoner som for det gylne snitt:

$$(1) \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{(n-1)}}{a_n} = \phi_n$$



Figur 3: Deling av et linjestykke med et gyllent $(n-1)$ -snitt.

Her er n et naturlig tall > 1 , og linjestykkene er nummerert fra en kant. Siden det er forholdstall som skal bestemmes, kan vi velge:

$$(2) \quad a_n = 1$$

Av (1) og (2) finner vi:

$$(3) \quad a_{n-1} = \phi_n^1, a_{n-2} = \phi_n^2, \dots, a_{n-(n-1)} = a_1 = \phi_n^{n-1} \text{ og } (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \phi_n^n$$

Av (2) og (3) får vi likningen:

$$(4) \quad \phi_n^n - \phi_n^{n-1} - \phi_n^{n-2} - \dots - \phi_n - 1 = 0$$

hvor ϕ_n er den eneste reelle positive roten. For å vise dette kan vi omforme (4) ved å bruke formelen for summen av en geometrisk rekke forutsatt at $\phi_n \neq 1$, multiplisere med nevneren $\phi_n - 1$ og får likningen: $\phi_n^n(\phi_n - 2) + 1 = 0$. Funksjonen $f(x) = x^n(x-2) + 1$ vil ha sitt minimum mellom 1 og 2, nemlig for $x_0 = 2n/(n+1)$ der $f(x_0) < 0$. For $x > x_0$ vil funksjonen være monotont voksende, og blir raskt positiv, for eksempel er $f(2) > 0$. Vi ser dermed at (4) har nøyaktig én positiv rot som er i området $< 1, 2]$.

Mustonen presenterer i [5]: *Extension of Golden Section to multiple-partite division of a line segment* denne enkle generaliseringen av det gyldne snitt. Han antyder også at en tidligere betegnelse (eng.): *division in continuous proportion*, indikerer at en også tidligere har tenkt slik, og føyer til:

However, a bigger surprise is that our simple geometric generalization of the Golden Section seems to be neglected in earlier literature.

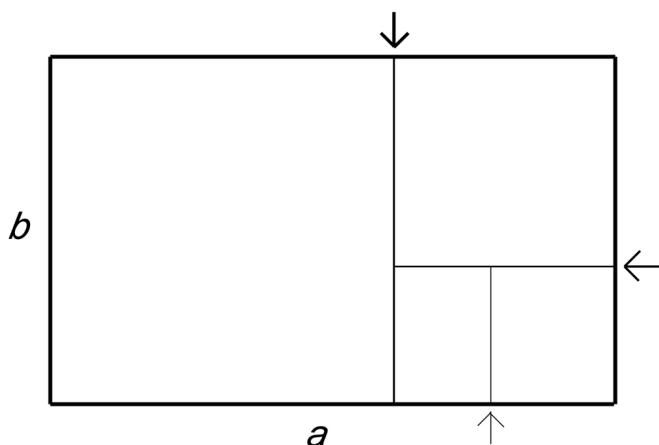
Jeg har her som Mustonen [5] brukt notasjonen ϕ_2 for *det gyldne snitt*. ϕ_3 bør kunne kalles *det gyldne dobbeltsnitt*, og ϕ_4 for *det gyldne trippelsnitt*. I det hele bør ϕ_n kunne kalles *det gyldne forhold* for sine respektive $(n-1)$ -snitt.

3 Det gyldne snitt anvendt på det gyldne rektangel

Adjektivet "gyldne" er blitt knyttet til flere plane figurer [1],[4]. Det gjelder rektangel, trekant, ellipse med flere. Felles for dem er at forholdet mellom to sentrale avstander er lik det gyldne snitts forhold. Det gyldne rektangel er klart mest omtalt og kan defineres slik:

Definisjon 3.1 (Det gyldne rektangel) *I et gyldent rektangel forholder summen av lengdene til de to ulike sidekantene seg til den lengste som den lengste til den korteste.*

I figur 4 illustreres den velkjente egenskapen at når en høydeleier et gyldent rektangel, vinkelrett på lengste side, dannes et kvadrat og et nytt gyldent rektangel.



Figur 4: Et gyllent rektangel med gjentatte fradelinger av kvadrater.

Fjerner vi det størst mulige kvadrat fra et gyllent rektangel vil resten også være et gyllent rektangel. Ved gjentatte høydelinger av de nydannede gyllne rektanglene framkommer en figur med kvadrater og omriss av gyllne rektangler som blir mindre og mindre. Arealforholdet mellom et kvadrat og det neste, og mellom et rektangel og det neste er $\phi_2^2 = 2,61803\dots$

4 Det gyllne dobbeltsnitt anvendt på en gyllen kuboide

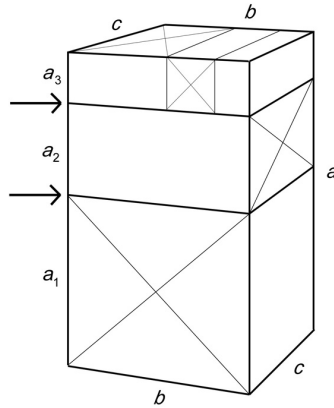
En kuboide [10] er et rektangulært parallellepiped, en kompakt, konveks figur avgrenset av seks rektangulære sideflater. Den vil være den tredimensjonale analoge figur til et rektangel siden den kan genereres av et rektangel som sveiper over en del av rommet ved å parallellforskyves et stykke vinkelrett på det plan det ligger i.

Definisjon 4.1 (Den gyllne kuboide) I en gyllen kuboide forholder summen av lengdene til de tre ulike sidekantene seg til den lengste som den lengste til den mellomste, som den mellomste til den korteste.¹

Relasjonene mellom forholdene kan uttrykkes som i (5) hvor kantlengdene refererer til figur 5.

Vi vil dele en gyllen kuboide med to parallelle plan vinkelrette på den lengste sidekanten (høyde a i figur 5) i kuboiden. Ved det gyllne dobbeltsnitt av a blir det da dannet tre kuboider med samme grunnflater bc men med gradvis mindre høyder a_1, a_2 og a_3 . Den gyllne kuboide er nå delt slik at en med hensyn til volum kan si: *Hele kuboiden forholder seg til den største delen, som den største til den mellomste, som den mellomste til den minste.*

¹Denne definisjonen samsvarer ikke med Huntleys kuboide.



Figur 5: En gyllen kuboide delt i tre ved et gyllent dobbeltsnitt av lengste sidekant.

Vi vil vise at den minste kuboiden i figur 5 også er en gyllen kuboide og bruker følgende:

$$(5) \quad \frac{a + b + c}{a} = \frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \phi_3 \quad (\text{Gyllen kuboide, definisjon 4.1})$$

$$(6) \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \phi_3 \quad (\text{Gyllent dobbeltsnitt av lengste sidekant})$$

$$(7) \quad a_1 + a_2 + a_3 = a$$

Av (5), (6) og (7) får vi

$$(8) \quad a_1 = b, \quad a_2 = c \quad \text{og} \quad a_3 = c/\phi_3$$

Setter vi inn fra (8) i (6) får vi

$$(9) \quad \frac{b + c + a_3}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{a_3} = \phi_3$$

Dette viser at den minste kuboiden bca_3 er en *gyllen kuboide* i følge definisjon 4.1. Vi kan uttrykke dette i:

Setning 4.1 *Om en gyllen kuboide deles med et gyllent dobbeltsnitt vinkelrett på lengste kant, vil den minste delen være en ny gyllen kuboide. Den største og mellomste delen vil inneholde kvadratiske flater og være kvadratiske kuboider (kvadratiske rettvinklede parallellepiped).*

Kort uttrykt:

Om en fra en gyllen kuboide fjerner den største, og så igjen den størst mulige kvadratiske kuboide med kvadrater fra ulike sideflater, vil resten være en gyllen kuboide.

Alle kuboidene her har samme grunnflate, bc . Siden forholdet mellom høydene (6) er ϕ_3 vil volumforholdet mellom en kuboide og den påfølgende mindre også være $\phi_3 = 1,83928\dots$ Vi lar: GK betegne *Gyllen Kuboide*, SKK betegne *Stor Kvadratisk Kuboide* og LKK betegne *Liten Kvadratisk Kuboide*. Ved stadig å bruke det gyldne dobbeltsnitt på de framkomne GK vil en kunne få en sekvens av kuboider hvor volumforholdet mellom en kuboide og den neste er

$$\phi_3 : GK_1, SKK_1, LKK_1, GK_2, SKK_2, LKK_2, GK_3, SKK_3, LKK_3, GK_4, \dots$$

Volumforholdet mellom en GK og den neste GK er $\phi_3^3 = 6,22226\dots$ Det samme forholdet er det også mellom en SKK og neste SKK og mellom en LKK og den neste LKK i sekvensen. Men det lineære forholdstallet mellom GK og den neste er $\phi_3 = 1,83928\dots$ (c/a_3 på figur 5).

5 Den gyldne hyperkuboide og dens oppdeling

En hyperkuboide [10], [11] er en n -dimensjonal analog til et rektangel ($n = 2$) og en kuboide ($n = 3$). Det er en lukket, kompakt, konveks figur bestående av grupper av motstående parallelle linjestykker, kanter, pekende i hver av rommenes n dimensjoner, vinkelrett på hverandre.

For $n > 3$ mister vi den visuelle forestillingen av rom, men kan like fullt gi matematiske beskrivelser. Verktøyet blir vektorrom.

Vi vil beskrive n -kuboiden i et n -dimensjonalt euklidisk rom \mathbf{R}^n [8], [12]. Det er et n -dimensjonalt vektorrom over skalkroppen \mathbf{R} , som består av alle n -tupler (x_1, x_2, \dots, x_n) hvor x_i er et reelt tall. Det kalles også for *reelt koordinatrom* og har en *standard basis*

$\mathbf{e}_1 = (1, 0, \dots, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, \dots, 0)$, \dots , $\mathbf{e}_n = (0, 0, \dots, 1)$ som bestemmer aksene.

Rommet er utstyrt med et standard indre produkt som mellom to vektorer \mathbf{x} og \mathbf{y} er definert ved

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{i=1}^n x_i y_i = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n$$

Skalarproduktet brukes til å definere lengden av en vektor

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i)^2}$$
 og også til å definere vinkelen mellom to vektorer.

Spesielt er to vektorer \mathbf{x} og \mathbf{y} ortogonale når $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

Vi tenker oss en n -kuboide plassert med ett av hjørnene i koordinatsystemets origo og med kuboidens sidekanter i akseretningene. En n -kuboide i et Euklidisk n -rom med sidekanter a_1, a_2, \dots, a_n vil bestå av punktene

$$\{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq a_i\}$$

Definisjon 5.1 (Den gyldne hyperkuboide) *Vi kaller en n -dimensjonal hyperkuboide med sidekanter $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ for en gyllen hyperkuboide hvis følgende forhold gjelder:*

$$(10) \quad \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{a_1} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \dots = \frac{a_{(n-1)}}{a_n} = \phi_n$$

Siden uttrykkene (10) og (1) er like, får vi her samme løsning for ϕ_n som ved generaliseringen av det gylyne snitt i kapittel 2, og vi bruker derfor samme symbol ϕ_n . Analogt til oppdelingen av det gylyne rektangel (figur 4) og den gylyne kuboide (figur 5) vil vi nå dele den gylyne n -kuboiden med et gylynt $(n-1)$ -snitt vinkelrett på lengste kant a_1 slik at denne sidekanten da blir delt i n stykker av lengde $a_2, a_3, a_4, \dots, a_n$ og a_n/ϕ_n . (Dette kan vises analogt til oppdelingen av den gylyne kuboide i kapittel 4.)

Kvadratisk kuboide nummer k , hvor $2 \leq k \leq n$, består av punktene:

$$\{(x_k, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq a_i\}$$

Vi ser av det generelle n -tupleruttrykket for koordinatene at kuboiden for de aktuelle verdier av k vil få to like sidekanter. Disse danner et kvadrat siden de peker i hver sine akseretninger og følgelig står vinkelrett på hverandre.

Den siste avdelte kuboiden er en gylynt kuboide som består av disse punktene:

$$\{(x_n/\phi_n, x_2, x_3, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid 0 \leq x_i \leq a_i\}$$

	Figur 4 ($n = 2$)	Figur 5 ($n = 3$)	(n)
Geometrisk figur	Gylynt rektangel Areal: ab	Gylynt kuboide Volum: abc	Gylynt n-kuboide Innhold: $a_1 a_2 \cdots a_n$
Ortogonal sidekanter	2 (a og b)	3 (a, b og c)	n (a_1, a_2, \dots, a_{n-1} og a_n)
Rand	2 par like linjestykker Lengdene: a og b	3 par like rektangler Areal: ab, ac og bc	n par like ($n-1$)-kuboider
Antall snitt	1 snitt (vinkelrett på lengste kant)	2 snitt (vinkelrett på lengste kant)	($n-1$) snitt (vinkelrett på lengste kant)
Snittene er like store som	Minste side i rektangelet. Lengde: b	Minste side i kuboiden. Areal: bc	Minste ($n-1$)-kuboide i n -kuboiden. Innhold: $a_2 a_3 \cdots a_n$
Avskårne deler	1 kvadrat Areal: bb	2 kvadratiske kuboider . Volum: bbc og ccb	$n-1$ kvadratiske n-kuboider . Innhold: $a_2 a_2 \cdots a_n, a_3 a_2 \cdots a_n, \dots, a_n a_2 \cdots a_n$
Randa omkring kvadratene	4 like linjestykker lik snittet Lengde: b	4 like rektangelflater lik snittet Areal: bc	4 like ($n-1$)-kuboider lik snittet Innhold: $a_2 a_3 \cdots a_n$
Resten	Et gylynt rektangel Areal: bb/ϕ_2	En gylynt kuboide Volum: bcc/ϕ_3	En gylynt n-kuboide Innh.: $a_2 a_3 \cdots a_n a_n/\phi_n$

Tabell 1: Sammenlikning av antall analoge deler i et gylynt rektangel, en gylynt kuboide og en gylynt hyperkuboide.

En oppsummerende sammenlikning av analoge elementer ved oppdeling av de gylyne figurene: *rektangel, kuboide og hyperkuboide* finnes i tabell 1. Det framgår her at når vi går fra et *gylynt rektangel til en gylynt figur* av en høyere dimensjon så vil antall deler som øker, øke med en for hver dimensjon vi går opp. Det er spesielt interessant å merke seg at ved å anvende det gylyne $(n-1)$ -snitt på en gylynt n -kuboide vil en i alle de $n-1$ n -kuboidene som fradeles være kvadratiske n -kuboider. For $n > 1$ går derfor kvadratformen igjen i alle figurer som fradeles i alle n dimensjoner. Resten inneholder ikke kvadrat(er) men er en ny gylynt figur i dimensjon n som er ϕ_n^n -delen av innholdet i utgangsfiguren, og det lineære forholdstall er ϕ_n . Vi har ikke definert det gylyne snitt for $n = 1$ siden vi da har null snitt. Hadde vi gjort det ville etter (1) $a_1/a_1 = \phi_1 = 1$ som ville innebære at alle rette linjestykker da ville være gylyne.

6 Gradvis tilnærming til gyldne figurer

Det er en velkjent sammenheng mellom *Fibonacci-tallene* (F): 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ... og det gyldne snitt, for: *Fibonacci-konstant* = $\lim_{n \rightarrow \infty} (F_n / F_{n-1}) = \phi_2 = 1,61803 \dots$

Tribonacci-tallene (T): 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, ... genereres ved at $T_k = T_{k-1} + T_{k-2} + T_{k-3}$ for $k = 4, 5, 6, \dots$

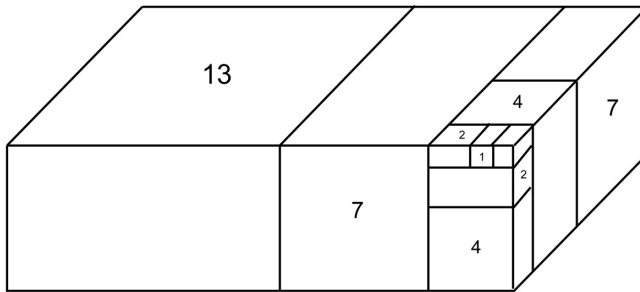
Det er også kjent at: *Tribonacci-konstant* = $\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n / T_{n-1}) = \phi_3 = 1,83928 \dots$

Vi tenker oss nå en rekke med kuboider med Tribonacci-tall som kanter med generell formel for volumet $K_n = T_n T_{n+1} T_{n+2}$ for $n = 1, 2, 3, \dots$

Forholdet mellom kantene i K_n går mot ϕ_3 når n går mot uendelig, og formen på K_n nærmer seg mer og mer en *gylden kuboide*.

I kapittel 4 gikk vi fra en gylden kuboide til en mindre ved å fjerne to kvadratiske kuboider. Nå kan vi gjøre det motsatte. Vi starter med K_n og føyer til to kvadratiske kuboider på samme side for å få K_{n+1} .

$$K_n + LKK_n + SKK_n = T_n T_{n+1} T_{n+2} + T_{n+1} T_{n+1} T_{n+2} + T_{n+1} T_{n+2} T_{n+2} = (T_n + T_{n+1} + T_{n+2}) T_{n+1} T_{n+2} = T_{n+1} T_{n+2} T_{n+3} = K_{n+1}$$



Figur 6: Figuren viser en gradvis oppbygging av kuboiden K_n fra $n = 1$ til $n = 5$.

Kees van Prooijen [7] har fotografert en gitterformet gjennomsiktig kuboide som gradvis er bygd opp av mindre kuboider med trespiler som sidekanter. Kantlengdene er hentet fra Tribonacci-serien med oddetall: 1, 1, 1, 3, 5, 9, ... Men her er LKK og SKK ikke føyd til på samme side. Han har valgt å gjengi noen fotografier av originalbilder ved å bruke pikseltall på 5000 x 2718 og 1250 x 680 hvor forholdstallet blir meget nær $\phi_3 = 1,83928 \dots$. Ved å følge lenken: "function movements" i artikkelen kan en få studere de fargerike og musikkinspirerte bildene som jo har form av ϕ_3 -rektangler.

Generelt definerer vi en n -stegs Fibonacci-rekke $\{F_k^{(n)}\}_{k=1}^{\infty}$ hvor $F_k^{(n)} = 0$ for $k \leq 0$, $F_1^{(n)} = F_2^{(n)} = 1$, hvor det generelle ledd er: $F_k^{(n)} = \sum_{i=1}^n F_{k-i}^{(n)}$ for $k > 2$. $F_k^{(n)} = F_{k-1}^{(n)} + F_{k-2}^{(n)} + \dots + F_{k-(n-1)}^{(n)} + F_{k-n}^{(n)}$. Divisjon med $F_{k-n}^{(n)}$ gir

$$\frac{F_k^{(n)}}{F_{k-1}^{(n)}} \cdot \frac{F_{k-1}^{(n)}}{F_{k-2}^{(n)}} \cdot \dots \cdot \frac{F_{k-(n-1)}^{(n)}}{F_{k-n}^{(n)}} = \frac{F_{k-1}^{(n)}}{F_{k-2}^{(n)}} \cdot \frac{F_{k-2}^{(n)}}{F_{k-3}^{(n)}} \cdot \dots \cdot \frac{F_{k-(n-1)}^{(n)}}{F_{k-n}^{(n)}} + \frac{F_{k-2}^{(n)}}{F_{k-3}^{(n)}} \cdot \frac{F_{k-3}^{(n)}}{F_{k-4}^{(n)}} \cdot \dots \cdot \frac{F_{k-(n-1)}^{(n)}}{F_{k-n}^{(n)}} + \dots + \frac{F_{k-n}^{(n)}}{F_{k-n}^{(n)}}$$

Setter inn grenseverdiene $\lim_{k \rightarrow \infty} (F_k^{(n)} / F_{k-1}^{(n)}) = \phi_n$ for brøkene og ordner til

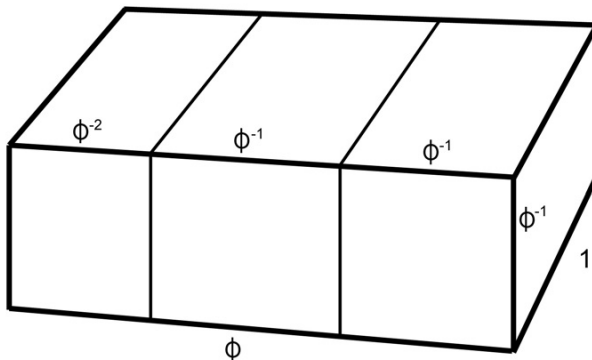
$$\phi_n^n - \phi_n^{n-1} - \phi_n^{n-2} - \dots - \phi_n - 1 = 0$$

Dette er samme likning som (4), og har derfor som rot samme positive reelle tall. Konstanten for det gyldne n -snitt er derfor lik tilsvarende $(n+1)$ -anacci-konstant = ϕ_{n+1} . Tabell 2 gir oversikt.

n	navn	Fibonacci n -stegs rekker	n -anacci-konstant= det gyldne $(n-1)$ -sntt	Snittnavn Det gyldne -
1	(degenerert)	1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, ...	$\phi_1 = 1$	(ikke snitt)
2	Fibonacci-tall	1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, ...	$\phi_2 = 1,61803\dots$	(mono)snitt
3	tribonacci-tall	1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, 44, 81, ...	$\phi_3 = 1,83928\dots$	dobbeltsnitt
4	tetranacci-tall	1, 1, 2, 4, 8, 15, 29, 56, 108, ...	$\phi_4 = 1,92756\dots$	trippelsnitt
5	pentanacci-tall	1, 1, 2, 4, 8, 16, 31, 61, 120, ...	$\phi_5 = 1,96594\dots$	tetrasnitt
6	heksanacci-tall	1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 63, 125, ...	$\phi_6 = 1,98358\dots$	pentasnitt
7	heptanacci-tall	1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 127, ...	$\phi_7 = 1,99196\dots$	heptasnitt
...				
n_∞		1, 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, ...	$\phi_\infty = 2$	

Tabell 2: Fibonacci n -stegs tall, n -anacci-konstanter og gyldne n -snitt.

7 Beslektede figurer



Figur 7: Huntley-kuboiden fra [3].

Kuboiden som Huntley presenterte i en artikkel i 1962 [2] og senere i sin bok [3] er vist i figur 7. Den hadde sidekanter på ϕ , 1 og $1/\phi$ ($\phi = \phi_2$) med et volum på 1 og en diagonal på 2. Den oppfyller ikke kravene i definisjon 4.1 til en gyllen kuboide. Den kan betegnes som en ϕ_2 -kuboide siden forholdet mellom par av kanter er ϕ_2 . Om den deles opp som på figur 7, og det fjernes to like store kvadratiske kuboider fra den, vil resten også være en ϕ_2 -kuboide. Det er også vist [9] at en ved gjentatte sammenføyninger av kuboider kan lage en sekvens hvor det veksler mellom to typer kvadratiske kuboider, A (lav form) og B (høy form). Når en kube føyes til A -typen får en B -typen, og føyes en ϕ_2 -kuboide til B får en neste A .

Som vi i denne artikkelen har generalisert det gylne rektangel, kan vi også generalisere *den gylne ellipse* [4] til høyere dimensjoner. For å få den tredimensjonale analoge figur til en gyllen ellipse, bytter vi ut **sidekanter** med **akser** i definisjonen 4.1 og får definert *en gyllen ellipsoide* hvor forholdet mellom aksene er ϕ_3 som i (5). *Den gylne ellipsoiden*, en kompakt, konveks figur, vil når halvaksene er $a_1 = a/2$, $a_2 = b/2$ og $a_3 = c/2$ bestå av punktene:

$$\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2} + \frac{x_3^2}{a_3^2} \leq 1\}$$

8 Avrunding og konklusjon

Utgangspunktet for denne artikkelen var en undring over at *Huntley-kuboiden* [2] var betegnet som en *gyllen kuboide*. For å belyse problemstillingen er en del begreper beskrevet og definisjoner gitt. Mustonen har kort beskrevet den enkle utvidelse en kan gjøre av det *gylne snitt* ved å dele linjestykket opp i flere, f. eks. n gradvis mindre stykker slik at forholdet mellom nabostykker er ϕ_n , og lik forholdet mellom hele linjestykket og den største delen.

Vi har altså ikke bare ett gyllent snitt ϕ_2 , men mange! ϕ_n vil være det gylne $(n-1)$ -snitt når et linjestykke er delt i n deler slik at relasjonene i (1) er oppfylt. Den karakteristiske egenskapen for et rektangel er jo som navnet betyr ”rett vinkel”. Her står 2 ulike kanter vinkelrett på hverandre. I den analoge 3-dimensjonale figur, kuboiden, står 3 ulike kanter vinkelrett på hverandre. Og generelt vil n ulike kanter stå vinkelrett på hverandre i n -kuboiden. De tilsvarende gylne figurer for rektangel, kuboide og n -kuboide er gitt ved definisjon 3.1, 4.1 og 5.1.

Den egenskapen ved et gyllent rektangel at det ved fradeling av størst mulig kvadrat dannes et nytt gyllent rektangel, er viet spesiell oppmerksomhet. Vil en finne en parallell til denne egenskapen igjen i de høyere dimensjonene? I tabell 1 har vi vist at vi får en fullgod analogi for denne egenskapen for *den gylne kuboide* og generelt for *den gylne n-kuboide*. Dette er en sterk indikasjon på at den valgte generaliseringen er bærekraftig. Sammen med resonnementene tidligere må vi derfor konkludere med at ϕ_3 -kuboiden bør betegnes *den gylne kuboide*.

Ved utgangspunkt i *Fibonacci-tallene* og *Tribonacci-tallene* kan en gradvis bygge opp figurer som nærmer seg formen til et *gyllent rektangel* og en *gyllen kuboide*. For å kunne nærme seg formen på en n -kuboide må en bruke tallene fra tilsvarende n -steps rekker [6] hvor forholdet nærmer seg rekkens n -anacci-konstant.

Til slutt vil jeg rette en stor takk til høgskoledosent Trygve Breiteig ved Universitetet i Agder, som har vært vennlig å lese gjennom denne artikkelen og gitt nyttige kommentarer.

Referanser

- [1] M. BICKNELL AND V.E HOGGATT, *Golden triangles, rectangles, and cuboids*. Fibonacci Quaterly **7** (1969) 73–91.
- [2] H.E. HUNTLEY, *The golden cuboid*. Fibonacci Quaterly **2** (1964) 184,240.
- [3] H.E. HUNTLEY, *The divine proportion*. Dover Publications, Mineola, N.Y., 1970.
- [4] H. E. HUNTLEY, *The golden ellipse*. Fibonacci Quarterly **12** (1974), 38-40.
- [5] S. MUSTONEN, *Extension of golden section to multiple-partite division of a line segment*. <http://www.survo.fi/papers/nsection.pdf> .
- [6] T. NOE, T. I. PIEZAS OG E. W. WEISSTEIN, *Fibonacci n-step number*. MathWorld - A Wolfram Web Resource. (<http://mathworld.wolfram.com/Fibonacci-StepNumber.html>)
- [7] K. VAN PROOIJEN, *The odd golden section*. <http://www.kees.cc/gldsec.html> .
- [8] S. SHIRALI OG H. L. VASUDEVA, *Metric space*. Springer-Verlag, London, 2006.
- [9] M. WALKER, *Golden cuboid sequences*. Fibonacci Quarterly **23** (1985), 153-154
- [10] E. W. WEISSTEIN, *Cuboid*. MathWorld - A Wolfram Web Resource. (<http://mathworld.wolfram.com/Cuboid.html>)
- [11] E. W. WEISSTEIN, *Hypercube*. MathWorld - A Wolfram Web Resource. (<http://mathworld.wolfram.com/Hypercube.html>)
- [12] WIKIPEDIA, *Euclidian space*. http://en.wikipedia.org/wiki/Euclidean_space.