

Datortomografins matematik –

Om en matematisk teori med många nya tillämpningar

Jan Boman

Matematiska Institutionen
Stockholms Universitet
106 91 Stockholm
jabo@math.su.se

Datortomografi utvecklades under 1970-talet och kom i mycket allmänt bruk under 1980-talet, trots att en datortomograf redan då kostade någon miljon kronor. Att datortomografi är en sofistikerad och mycket effektiv teknik för röntgenundersökning för medicinsk diagnostik är i dag välkänt. Mindre välkänt är förmodligen det faktum att avancerad matematik spelar en väsentlig roll för datortomografens funktion.

Vid datortomografi avbildar man ett plant snitt genom det område som man vill undersöka. Metoden kallas därför ibland för *skiktröntgen*, och ordet *tomografi* är bildat av det grekiska ordet *tomos*, som betyder sektion eller snitt. Anledningen till att matematiken behövs kan sägas vara att det är omöjligt att direkt avbilda eller mäta de storheter som man är intresserad av, och att apparaten därför i stället mäter helt andra storheter. Matematiken utgör förbindelsen mellan det man mäter och det man vill veta. Det som man vill veta är värdet på absorptionskoefficienten för röntgenstrålning i varje punkt i ett plant snitt genom det undersökta området. Olika slags vävnad har olika täthet och därmed något olika absorptionskoefficient. Således kan sjuk vävnad, exempelvis tumörvävnad, ofta kännas igen genom något avvikande absorptionskoefficient. Om vi känner ett gott närmevärde på absorptionskoefficienten i ett tillräckligt tätt gitter av punkter i det plana snittet, så är det mycket lätt att med datorns hjälp rita upp en bild av snittet genom att tätare medium ges högre svärtning på bilden eller tvärtom. Låt oss tänka oss att vi söker värdet på absorptionskoefficienten i varje ruta i ett rutnät bestående av kvadrater med 0,5 millimeters sida. Om det undersökta området är en cirkelskiva med 25 centimeters diameter, så har vi alltså bortåt 200 000 kvadrater och lika många tal som ska bestämmas.

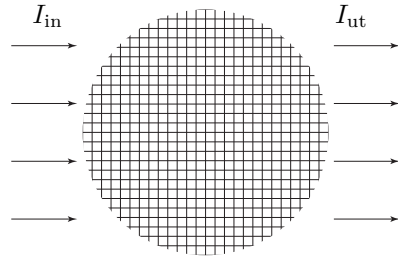
Problemet är att vi inte kan mäta dessa värden direkt, utom möjligen genom att säga ut den tunna skiva som vi vill studera och genomlysas den vinkelrätt mot sitt eget plan. Men detta vill vi förstås inte göra med en levande människa och inte heller med en dyrbar maskin, exempelvis en rymdraket. Vad man kan göra är att genomlysas skivan *i dess eget plan*, i många olika riktningar.

Låt oss försöka uttrycka matematiskt den information som en sådan undersökning kan ge. Antag att vi skickar en röntgenstråle med känd intensitet I_{in} genom området så som i figuren nedan. Med en detektor mäter vi den utgående strålens

intensitet I_{ut} . Kvoten $I_{\text{in}}/I_{\text{ut}}$ är ett mått på den totala absorptionen längs strålens hela väg. Om strålen passerar genom n stycken rutor med absorptionskoefficient a_1, \dots, a_n , där talet n är exempelvis 500, så kan man säga att vi härigenom har mätt värdet av

$$(1) \quad a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i.$$

Närmare bestämt gäller att $\log(I_{\text{in}}/I_{\text{ut}})$ är proportionell mot kvantiteten (1). Vi har därmed fått ett känt samband mellan ett antal av alla de obekanta talen. Genom att genomlysa i samma riktning men med parallellförflyttat läge (se figuren) kan vi få ytterligare 500 samband. Lika många till kan vi få genom att genomlysa i den vinkelräta riktningen.



Poängen är nu att man kan mäta upp ytterligare samband mellan de obekanta storheterna genom att genomlysa området i fler riktningar, exempelvis parallellt med rutornas diagonaler. En liten komplikation blir då att det inte längre är så lätt att säga hur lång väg vår röntgenstråle passerar genom var och en av de små rutorna. Men detta går att ta hänsyn till; jag går inte in på dessa detaljer här. Det finns inte heller någon anledning att inskränka sig till rutnätets diagonalriktningar. För varje ny riktning som vi genomlyser området får vi ett stort antal nya linjära samband mellan de sökta talen. Sammanfattningsvis, om man genomlyser den tunna plana skivan i låt oss säga 500 olika riktningar och registrerar cirka 500 mätvärden för varje riktning, så får man totalt 250 000 mätvärden som vart och ett måste vara en vägd summa av ett stort antal av de okända talen; vikterna i summan kommer sig som sagt av att strålen i fråga har passerat olika långt genom de olika rutorna längs dess väg. Därmed kan problemet beskrivas som ett gigantiskt linjärt ekvationssystem med (minst) cirka 200 000 obekanta. Sådana har vi ju goda och välkända metoder för att lösa, och vi har utmärkta snabba datorer. Så problemet förefaller att vara löst, åtminstone i princip.

Emellertid vore ett sådant ekvationssystem på tok för stort även för dagens datorer, åtminstone för att behandlas med standardmetoder. Ty antalet operationer som krävs för att lösa ett linjärt ekvationssystem med vanlig Gausselimination är proportionellt mot kuben på antalet obekanta, och $200\,000^3 = 8 \cdot 10^{15}$. Om datorn gör en miljard operationer i sekunden så skulle kalkylen alltså ta nästan 10^7 sekunder, det vill säga några månader!

Vi behöver därför en bättre matematisk analys av problemet. Det visar sig att det är bättre att formulera och analysera problemet i kontinuerliga termer. Vi frågar därför åter efter värdet av absorptionskoefficienten i *varje punkt* i den (tunna) plana skivan. Absorptionskoefficienten kan då betraktas som en *funktion* på skivan, det vill säga som en funktion på ett plant område. Om vi inför ett koordinatsystem i skivans plan, kan vi alltså betrakta den sökta funktionen som en funktion $f(x, y)$ av två variabler. Nästa steg är att uttrycka våra mätvärden i termer av denna funktion.

Antag att vi gör en mätning med hjälp av en röntgenstråle parallellt med x -axeln längs linjen $y = b$. Denna stråles dämpning längs hela sin väg utgörs av summan av all dämpning längs dess väg genom området, och det är lätt att se att i detta fall (logaritmen för) den totala dämpningen måste vara proportionell mot integralen

$$(2) \quad \int f(x, b) dx.$$

Obervera att den ändliga summan (1) skulle kunna skrivas som $\sum_{i=1}^n f(x_i, b)$, där $a_i = f(x_i, b)$ är värdet av absorptionskoefficienten i punkten (x_i, b) , en punkt i den i :te rutan längs strålens väg. Om vi betecknar den i :te kvadratiske rutans sida med Δx_i , så är denna summa lika med en konstant gånger $\sum_{i=1}^n f(x_i, b) \Delta x_i$, ett uttryck som vi ju känner igen som ett närmevärde till integralen (2). Jag har inte satt ut några gränser, eftersom det kan underförstås att vi ska integrera över den mängd av x för vilka (x, y) ligger inom området, vilket vi kan anta är ett intervall. Alternativt kan vi definiera funktionen $f(x, y)$ som noll överallt utanför området och integrera från $-\infty$ till ∞ .

Uttrycket (2) brukar kallas för *linjeintegralen* eller *kurvintegralen* av funktionen f över den räta linjen L , och betecknas

$$(3) \quad \int_L f ds,$$

där ds betecknar längdelementet längs linjen L och anger att integrationen sker med avseende på båglängden. Med hjälp av en parameterframställning av den räta linjen kan man lätt definiera integralen (3) för vilken rät linje L som helst. Därmed har vi gjort oss oberoende av koordinatsystemet och kan nu beskriva de mätvärden som erhålls med vilken strålriktning som helst. Det matematiska problem som datortomografen måste lösa kan därmed, i sin kontinuerliga form, uttryckas på följande sätt:

En obekant funktion f är definierad på ett område i planet, exempelvis
 (P) *en cirkelskiva. Antag att man känner värdet av linjeintegralen $\int_L f ds$ för varje rät linje L genom området. Beräkna funktionen f .*

I en berömd artikel från 1917 löstes detta problem av den österrikiske matematikern Johann Radon. I artikeln gavs en explicit formel för värdet av funktionen f i punkten (x, y) uttryckt i värdena av alla linjeintegralerna $\int_L f ds$. När Radon löste detta problem hade han givetvis ingen aning om att lösningen skulle få viktiga tekniska tillämpningar, utan han studerade problemet uteslutande därför att frågan var matematiskt intressant och visade sig ha en vacker lösning. Efter utvecklingen av datortomografi har Radons problem och många av dess varianter och generaliseringar studerats intensivt av matematiker, och avbildningen $L \mapsto \int_L f ds$ kallas numera för Radontransformen av funktionen f .

I praktiken undersöker man vanligen ett tredimensionellt område genom att avbilda en hel serie av parallella plana snitt på så sätt som ovan beskrivits. Praktiskt sker detta oftast genom att patienten successivt förflyttas i riktning vinkelrätt mot de plana snitten. Detta innebär förstås att man för undersökning av ett tredimensionellt område använder sig endast av röntgenstrålar som är parallella med ett fixt plan. För att effektivisera datainsamlingen och minimera stråldosen har

man i vissa nyare datortomografer övergivit principen att analysera en tunn skiva i taget och går i stället direkt på problemet att rekonstruera funktionen f i ett tredimensionellt område. Mätdata baseras i dessa fall vanligen på en större mängd av strålriktningar, inte alla parallella med ett och samma plan (multislice tomography, helical tomography etc.). Att på ett effektivt sätt utnyttja denna större mängd av mätdata leder till mycket svårare, genuint tredimensionella, matematiska problem, som ännu är långt ifrån lösta.

Den stora framgången med datortomografi för medicinsk diagnostik har lett till att samma eller liknande mättekniker har utvecklats för många andra ändamål. Förutom röntgenstrålning används bland annat ultraljud, gammastrålning och elektronstrålar. Mätmetoder baserade på kärnspinnresonans (MRI, Magnetic Resonance Imaging) leder till liknande matematiska problem som datortomografi.

En av de tidigaste tillämpningarna av tomografiska metoder uppkom inom geologin. Genom att registrera tidsskillnaden mellan en jordbävning i en punkt A och den seismiska vågens ankomst till en annan punkt B för ett stort antal par av punkter A och B beräknar man utbredningshastigheten för seismiska vågor i olika punkter i jordens inre och drar därav slutsatser om den fysiska beskaffenheten hos jordklotets inre delar.

En snarlik teknik används för malm- och oljeprospektering. En explosion arrangeras vid jordytan, och tidpunkt och styrka hos reflexerna mäts med detektorer vid ett stort antal punkter på jordytan. Experimentet upprepas med ett antal andra lägen för explosionen. Med utgångspunkt från dessa mätdata försöker man beräkna beskaffenheten hos jordlagren under mätområdet.

Inom industrin används tomografiska metoder för produktkontroll och processkontroll.

Elektronmikroskopi kan framgångsrikt kombineras med tomografi genom att provet genomlysas med elektronstrålar i ett stort antal riktningar.

Många fler exempel skulle kunna ges. Området utvecklas mycket snabbt. Sökning med Google på "tomography" ger 10 miljoner träffar!

De olika tillämpningarna ger upphov till liknande, men ändå olika, matematiska problem. Analys av problem med anknytning till Radontransform och tomografi är därför ett aktivt forskningsområde inom matematik.

För utvecklingen av datortomografin belönades fysikern Allan Cormack, uppvuxen i Sydafrika och senare verksam vid Tufts University nära Boston, och den brittiske ingenjören Godfrey Hounsfield med nobelpriset i fysiologi eller medicin 1979. Under en kort tid som sjukhusfysiker på 1950-talet sysslade Cormack med strålterapi mot cancer. Vid strålterapi önskar man planera bestrålningen så att stråldosen mot tumören maximeras medan övrig vävnad skadas så litet som möjligt. Cormack insåg att man skulle kunna förbättra strålningsplaneringen om man kände den variabla absorptionskoefficienten för strålningen i det bestrålade området. Med syfte att bestämma denna formulerade Cormack, ovetande om Radons arbete 1917, datortomografins fundamentala problem (P) och löste det. Resultaten publicerades i två artiklar i början av 1960-talet. Dessa artiklar röntte till en början föga uppmärksamhet. Oberoende av Cormack byggde Hounsfield i början av 1970-talet den första datortomografen. Därefter gick utvecklingen mycket snabbt.

På återstoden av dessa sidor ska jag säga några ord om hur man analyserar det matematiska problemet och hur beräkningen görs. Jag måste börja med att införa några beteckningar.

Om α är en vinkel och p ett reellt tal är

$$x = -t \sin \alpha + p \cos \alpha, \quad y = t \cos \alpha + p \sin \alpha, \quad t \in \mathbf{R},$$

en parameterframställning med båglängden som parameter av en linje $L(\alpha, p)$ med vinkeln α mot y -axeln och avståndet $|p|$ från origo. Om $L = L(\alpha, p)$ så kan integralen (3) därmed skrivas

$$(4) \quad g_\alpha(p) = \int_{L(\alpha, p)} f \, ds = \int_{\mathbf{R}} f(-t \sin \alpha + p \cos \alpha, t \cos \alpha + p \sin \alpha) dt.$$

Index \mathbf{R} vid integraltecknet betyder att integrationen sker över hela reella axeln \mathbf{R} . Våra mätdata kan alltså beskrivas av ett ändligt antal funktioner $g_\alpha(p)$ av en reell variabel p för olika värden på α , $\alpha = \alpha_1, \dots, \alpha_m$, där $0 \leq \alpha_k < \pi$. I datortomografer kan man välja exempelvis $m \approx 500$. Naturligtvis är i praktiken även p en diskret variabel, men det bortser vi från här. Problemet är som sagt att beräkna funktionen $f(x, y)$ utgående från funktionerna $g_\alpha(p)$.

Vi kommer att behöva använda några enkla egenskaper hos Fouriertransformationen. För en funktion $u(t)$ av en variabel definieras Fouriertransformen \hat{u} genom

$$\hat{u}(\tau) = \int_{\mathbf{R}} u(t) e^{-it\tau} dt, \quad \tau \in \mathbf{R}.$$

Funktionen $u(t)$ kan (under lämpliga förutsättningar på funktionen u) återvinnas från Fouriertransformen genom den så kallade inversionsformeln

$$(5) \quad u(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \hat{u}(\tau) e^{it\tau} d\tau, \quad t \in \mathbf{R}.$$

Formeln (5) är den matematiska formuleringen av det välkända faktum att ett godtyckligt tidsförlopp kan beskrivas som en summa av sinusformade svängningar med olika frekvenser; det komplexa talet $\hat{u}(\tau)$ anger amplitud och fas för svängningen med frekvensen τ . För en funktion $f(x, y)$ av två variabler definieras Fouriertransformen genom en motsvarande dubbelintegral

$$(6) \quad \hat{f}(\xi, \eta) = \iint_{\mathbf{R}^2} f(x, y) e^{-i(x\xi + y\eta)} dx dy,$$

och inversionformeln lyder i detta fall

$$(7) \quad f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbf{R}^2} \hat{f}(\xi, \eta) e^{i(x\xi + y\eta)} d\xi d\eta.$$

Nu finns ett enkelt samband mellan den 1-dimensionella Fouriertransformen av funktionen $g_\alpha(p)$ i (4) och den 2-dimensionella Fouriertransformen av f . Om vi nämligen sätter in $\eta = 0$ i definitionen (6) av den 2-dimensionella Fouriertransformen \hat{f} och skriver dubbelintegralen som en upprepad integral, så får vi

$$(8) \quad \begin{aligned} \hat{f}(\xi, 0) &= \int_{\mathbf{R}} \left(\int_{\mathbf{R}} f(x, y) dy \right) e^{-ix\xi} dx \\ &= \int_{\mathbf{R}} g_0(x) e^{-ix\xi} dx = \hat{g}_0(\xi), \end{aligned}$$

där $g_0(x)$ är uttrycket (4) svarande mot $\alpha = 0$, det vill säga

$$g_0(p) = \int_{\mathbf{R}} f(p, y) dy.$$

(Det är förstås likgiltigt om vi kallar variabeln för x eller p och om integrationsvariabeln heter y eller t .) Formeln (8) innebär därmed att den 1-dimensionella Fouriertansformen av mätdata svarande mot strålriktning parallellt med y -axeln är lika med restriktionen av den 2-dimensionella Fouriertransformen av den sökta funktionen f till en linje genom origo i $\xi\eta$ -planet, nämligen linjen $\eta = 0$. Genom en lätt räkning inses att samma utsaga gäller för godtycklig strålriktning, nämligen i formelspråk

$$(9) \quad \widehat{g}_\alpha(\tau) = \widehat{f}(\tau \cos \alpha, \tau \sin \alpha)$$

för alla $\tau \in \mathbf{R}$ och alla vinklar α . Det betyder att om vi känner $g_\alpha(p)$ för alla p och ett visst α , så kan vi räkna ut värdet av den 2-dimensionella Fouriertransformen $\widehat{f}(\xi, \eta)$ för alla (ξ, η) av formen $(\xi, \eta) = (\tau \cos \alpha, \tau \sin \alpha)$ för $\tau \in \mathbf{R}$. Då α genomlöper ett stort antal värden $\alpha = \alpha_k$ så kommer dessa linjer att ganska väl täcka en stor del av $\xi\eta$ -planet, varmed den 2-dimensionella Fouriertransformen $\widehat{f}(\xi, \eta)$ är approximativt känd. Det återstår därmed endast att invertera den 2-dimensionella Fouriertransformen för att bestämma $f(x, y)$.

Detta resonemang visar att den sökta funktionen måste vara entydigt bestämd av alla funktionerna $g_\alpha(p)$ — i varje fall om $g_\alpha(p)$ vore känd för *alla* α . Resonemang-
et ger också följande metod för att beräkna $f(x, y)$ utifrån mätdata $g_\alpha(p)$. Beräkna Fouriertransformen av var och en av de uppmätta funktionerna $g_k(p) = g_{\alpha_k}(p)$ för $k = 1, 2, \dots, m$. Använd formeln (9) för att beskriva den 2-dimensionella Fouriertransformen av f på ett gitter bestående av ett stort antal räta linjer genom origo. Beräkna till sist f genom att invertera den 2-dimensionella Fouriertransformen.

För numerisk beräkning av Fouriertransformer är mycket effektiva algoritmer kända sedan 1960-talet (Fast Fourier Transform, FFT). För det sista steget i den nyssnämnda proceduren, nämligen invertering av den 2-dimensionella Fouriertransformen $\widehat{f}(\xi, \eta)$, behöver man emellertid känna $\widehat{f}(\xi, \eta)$ på ett rektangulärt gitter snarare än ett radiellt. Problemet att finna tillräckligt goda närmevärden för $\widehat{f}(\xi, \eta)$ på ett rektangulärt gitter utgående från kända värden på ett radiellt gitter visade sig dock vara svårare än väntat. Man utför därför vanligen i praktiken beräkningen på ett annat sätt, som nu ska beskrivas.

För var och en av de m funktionerna $g_k(p)$ bildar vi en ny funktion $h_k(p)$ genom formeln

$$(10) \quad h_k(p) = \int_{\mathbf{R}} g_k(p - q)K(q) dq,$$

där $K(p)$ är en viss fix funktion, som strax ska beskrivas. Uttrycket i högra ledet ovan kallas för faltningen av funktionerna g_k och K . För var och en av funktionerna $h_k(p)$ bildar vi sedan en funktion av två variabler (x, y) som är konstant på linjer med normalriktningen $(\cos \alpha_k, \sin \alpha_k)$ genom

$$(11) \quad h_k(x \cos \alpha_k + y \sin \alpha_k).$$

Till sist beräknar man halva medelvärdet av alla funktionerna (11); resultatet är

$$(12) \quad f(x, y) \approx \frac{1}{2m} \sum_1^m h_k(x \cos \alpha_k + y \sin \alpha_k).$$

Det kan tyckas anmärkningsvärt att en så enkel formel ger svaret på ett så komplicerat problem. Noteras bör också att denna beräkningsprocedur lät sig beskrivas i helt elementära termer; Fouriertransformation och annan avancerad matematik behövdes inte.

Och hur stort är räknearbetet? Om vi antar att var och en av funktionerna $g_k(p)$ representeras genom n stycken tal $g_k(p_i)$, $i = 1, \dots, n$, så kräver evalueringen av integralen (10) ungefär n operationer för varje p , alltså $\approx n^2$ operationer, och för samtliga k får vi därmed totalt $\approx mn^2$ operationer. Evaluering av formeln (12) kräver $\approx m$ operationer för varje punkt (x, y) , och om vi har $\approx n^2$ punkter i området, så kräver detta ytterligare $\approx mn^2$ operationer. Om $m \approx n$ ger detta totalt $2mn^2 \approx n^3$ operationer. Med exemplvis $n \approx 500$ krävs således $\approx 10^8$ operationer, vilket datorn utför på bråkdelen av en sekund.

Jag ska skissera ett bevis för formeln (12) för $x = y = 0$, det vill säga

$$(13) \quad f(0, 0) \approx \frac{1}{2m} \sum_1^m h_k(0).$$

Härav följer (12) ganska lätt för godtyckligt (x_0, y_0) genom att man tillämpar (13) på funktionen $f(x_0 + x, y_0 + y)$. Vi börjar med att använda inversionsformeln (7) i två variabler för $(x, y) = (0, 0)$, det vill säga

$$f(0, 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{\mathbf{R}^2} \widehat{f}(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Polära koordinater $\xi = r \cos \alpha$, $\eta = r \sin \alpha$, ger

$$f(0, 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \widehat{f}(r \cos \alpha, r \sin \alpha) r dr d\alpha.$$

Om vi gör variabeltransformationen $\alpha \mapsto \alpha + \pi$ i den yttre integralen och transformationen $r \mapsto -r$ i den inre integralen, får vi samma uttryck med den inre integralen ersatt av $\int_{-\infty}^0 \widehat{f}(r \cos \alpha, r \sin \alpha) |r| dr$. Genom att addera den så erhållna formeln till den föregående får vi

$$(14) \quad 2f(0, 0) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_0^{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \widehat{f}(r \cos \alpha, r \sin \alpha) |r| dr d\alpha.$$

Den 1-dimensionella inversionsformeln (5) använd för $t = 0$ innebär att

$$(15) \quad g_\alpha(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \widehat{g}_\alpha(\tau) d\tau.$$

Om vi kombinerar detta med formeln (9), finner vi att

$$(16) \quad g_\alpha(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\tau \cos \alpha, \tau \sin \alpha) d\tau.$$

Om vi inte hade haft faktorn $|r|$ i integralen (14), så hade vi nu kunnat dra slutsatsen av (14) att $f(0, 0)$ är approximativt lika med en konstant gånger medelvärdet av alla $g_\alpha(0)$.

För att ta hänsyn till faktorn $|r|$ väljer vi nu en funktion $K(p)$ med egenskapen att dess Fouriertransform uppfyller villkoret

$$\widehat{K}(\tau) \approx |\tau|$$

för alla τ i ett ganska stort intervall $|\tau| < A$ och $\widehat{K}(\tau) = 0$ utanför ett något större intervall. Definitionen av h_k genom (10) tillsammans med formeln

$$\widehat{h}(\tau) = \widehat{u}(\tau)\widehat{v}(\tau)$$

för Fouriertransformen av en faltning $h(t) = \int u(t-s)v(s)ds$ ger nu att

$$\widehat{h}_k(\tau) = \widehat{g}_k(\tau)\widehat{K}(\tau) \approx \widehat{g}_k(\tau)|\tau| = \widehat{f}(\tau \cos \alpha_k, \tau \sin \alpha_k)|\tau| \quad \text{för } |\tau| < A.$$

Analogt med (16) finner vi därmed att

$$(17) \quad h_k(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}_k(\tau) d\tau \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\tau \cos \alpha_k, \tau \sin \alpha_k) |\tau| d\tau.$$

Om vi nu ersätter den yttre integralen i (14) med en Riemannsumma enligt formeln $\int_0^{2\pi} \varphi(\alpha) d\alpha \approx (2\pi/m) \sum_{k=1}^m \varphi(\alpha_k)$ och använder uttrycket (17) för den inre integralen, så får vi formeln (13).

Kalkylen illustreras i bilderna 1 - 5 på sidan 186. Bild 1 är en välkänd testbild, den så kallade Shepp-Logan-fantomen, som har varit i bruk sedan 1970-talet och som påminner om ett plant snitt genom en skalle. Bild 2 illustrerar samtliga mätta data, och kallas i tomografikretsar för sinogrammet. Om $L(\alpha, p)$ är linjen med ekvation

$$(18) \quad x \cos \alpha + y \sin \alpha = p,$$

så är den vertikala axeln α -axeln (med ett halvt varv graderat från 0 till 500) och den horisontella axeln är p -axeln. Gråskalevärdet hos punkten (p, α) i sinogrammet anger alltså det uppmätta värdet av integralen av f över linjen $L(\alpha, p)$. Namnet sinogram kommer sig av att ett föremål som befinner sig i punkten (x, y) ger upphov till sinuskurvan (18) i $p\alpha$ -planet i sinogrammet.

För att underlätta tolkningen av Bild 2 har jag gjort Bild 3, som är ett horisonellt utsnitt svarande mot ett fixt α i sinogrammet, nämligen $\alpha = 400$ i den skala som används. Observera att grafen i Bild 3 säger precis samma sak som gråskaleremansan.

Indata till beräkningen, det vill säga mätdata, består alltså precis av 500 sådana funktioner som anges av grafen i Bild 3.

Bild 4 illustrerar rekonstruktionen, det vill säga funktionen (12). Funktionen $K(p)$ har definierats genom att $\widehat{K}(\tau)$ har satts lika med $|\tau| \cos(\tau c\pi/2)$ för $|\tau| < 1/c$ och lika med noll för övriga τ , och konstanten c har valts lika med 0,003. I praktiken använder man sig av ett antal finesser för att få bästa möjliga rekonstruktion, men här har beräkningen gjorts exakt enligt beskrivningen i texten ovan. Vid noggrann jämförelse av Bild 4 och Bild 1 ser man att rekonstruktionen ser helt korrekt ut, förutom att den är något oskarpare än testbilden. Oskärpan beror huvudsakligen på att vi genom att ersätta funktionen $\tau \mapsto |\tau|$ i Fourierraummet med den nyssnämnda funktionen $\widehat{K}(\tau)$ har försummat höga frekvenser.

Vid vissa tillämpningar av den tomografiska metoden (exempelvis inom elektronmikroskopi) finns det ett intervall av riktningar α inom vilket man inte kan mäta integralerna $\int_{L(\alpha,p)} f ds$. I sådana situationer är det mycket svårt eller omöjligt att rekonstruera den sökta funktionen noggrant. Bild 5 illustrerar detta. Bilden visar en delsumma av summan (12) där talet $m = 500$ har ersatts med 350. Detta innebär att mätdata har utnyttjats endast från strålriktningar svarande mot sju tiondelar av ett halvt varv i stället för ett halvt varv. Följden har blivit att alla konturer som är parallella med de saknade strålriktningarna är både suddiga och felaktigt återgivna.

Sammanfattningsvis, det som man har kunnat se eller mäta direkt med röntgen i detta fall är 500 gråskaleremsor, alternativt grafer, liknande dem i Bild 3. Det är ju uppenbart att finare strukturer hos fantombilden, exempelvis de små cirkelskivorna i mitten av bilden, är omöjliga att se på någon av de 500 röntgenbilderna, och det samma gäller i själva verket även de grövre strukturerna, möjligen med undantag av fantombildens yttre skal, "skallbenet". Men de små cirkelskivorna har tydligen ändå lämnat — för våra ögon osynliga — spår i de 500 graferna, för med matematikens hjälp kan vi se dem och exakt ange deras läge.

Ett stort tack riktas till Hans Rullgård, som har skrivit Matlabprogrammet och givit värdefulla kommentarer till tidigare versioner av manuskriptet.

Litteratur

Frank Natterer: *The mathematics of computerized tomography*, Wiley & Sons, 1986. Nytryck utgivet av Society for Industrial and Applied Mathematics 2001.

Frank Natterer och Frank Wübbeling: *Mathematical methods in image reconstruction*, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001.

Charles Epstein: *Introduction to the mathematics of medical imaging*, Pearson Education/Prentice Hall, 2003.

Wikipedia: "Tomography" (<http://en.wikipedia.org/wiki/Tomography>), eller "Computed tomography" (http://en.wikipedia.org/wiki/Computed_tomography).

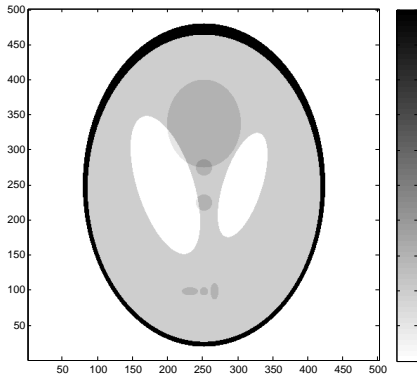


Bild 1

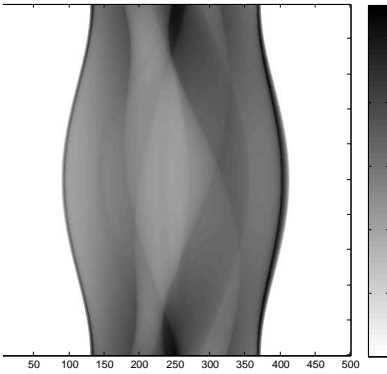


Bild 2

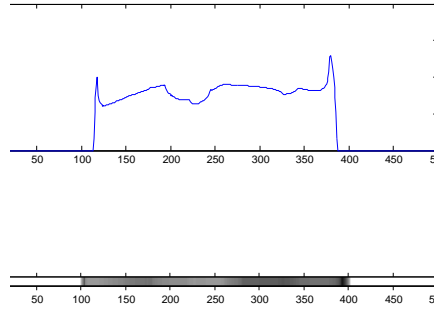


Bild 3

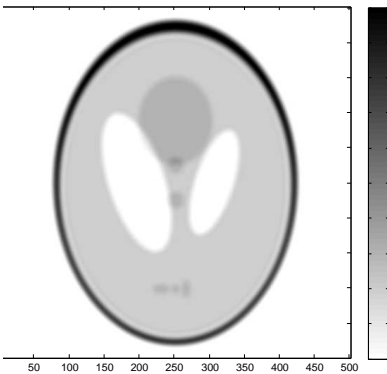


Bild 4

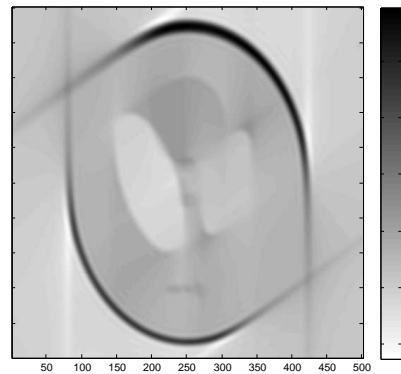


Bild 5