Uppgifter

512. Ett pärlhalsband består av en öppen kedja med $2r$ röda och $2v$ vita pärlor trädda i godtycklig ordning. Genom att snitta kedjan i ett lämpligt antal delkedjor vill två systrar dela upp pärlorna sinsemellan så att de får r röda och v vita pärlor var. Vilket är det minsta antalet snitt som alltid möjliggör en sådan uppdelning?

513. En triangel har sidlängderna a, b, c och omkretsen 1. Visa olikheten

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \frac{1}{2}\,.$$

514. Låt a_0, $a_1, \ldots,$ a_{n-1} vara reella tal sådana att $0 < a_0 \leq a_1 \leq \cdots \leq a_{n-1} \leq 1$. Låt vidare λ vara en rot till polynomet $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ och som uppfyller $|\lambda| \geq 1$. Visa att $\lambda^{n+1} = 1$.

515. (Föreslaget av *Kent Holing, Trondheim.*) For en irredusibel monisk fjerdegradsligning $Q(x) = 0$ med heltallskoeffisienter, diskriminant lik D og Galoisgruppe G, vis at G er syklisk hvis og bare hvis $Q(x)$ kan faktoriseres som et produkt av to andregradspolynomer i $Q[\sqrt{[D]}\,][x]$.

Lösningar skickas senast 15 april 2009 till:
Dag Jonsson, dag@math.uu.se
Box 480
Uppsala universitet, Matematiska institutionen
SE-75106 Uppsala

Lösningar till tidigare uppgifter i Normat

497. (*Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK.*) Vi betragter betingelsen

$$k \text{ er divisor i } \sum_{i=1}^{k} x_i\,. \tag{1}$$

a. Hvis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er en permutation af tallene $1, 2, \ldots, n$, så er

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}\,,$$

således at (1) er opfyldt for $k = n$, hvis og kun hvis n er ulige.

For $n = 1$ er problemet trivielt, og for $n = 3$ er (1) opfyldt for $k = 1, 2, 3$, hvis vi vælger $(x_1, x_2, x_3) = (1, 3, 2)$. Vi skal se, at dette er de eneste værdier af n, for hvilke problemet **a.** har en løsning, så antag, at $n \geq 5$ er ulige, at $x_1, x_2, \ldots, x_n$ er en permutation af tallene $1, 2, \ldots, n$, og at (1) er opfyldt for alle k. Ifølge antagelserne er $n - 1$ divisor i

$$\sum_{i=1}^{n-1} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i - x_n = n\frac{n+1}{2} - x_n = (n-1)\frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} - x_n\,,$$

og altså er $x_n = \frac{n+1}{2} + m(n-1)$ for et helt tal m. Nu er

$$\tfrac{n+1}{2} - (n-1) = -\tfrac{n-3}{2} < 1 \text{ og } \tfrac{n+1}{2} + (n-1) = n + \tfrac{n-1}{2} > n\,,$$

og da $1 \leq x_n \leq n$, må m være 0 og $x_n = (n+1)/2$.

Ifølge antagelserne har vi endvidere, at $n - 2$ er divisor i

$$\sum_{i=1}^{n-2} x_i = \sum_{i=1}^{n-1} x_i - x_{n-1} = (n-1)\frac{n+1}{2} - x_{n-1} = (n-2)\frac{n+1}{2} + \frac{n+1}{2} - x_{n-1}\,.$$

Som ovenfor følger heraf for $n \geq 5$, at $x_{n-1} = (n+1)/2 = x_n$ i modstrid med antagelsen om, at x_i'erne er en permutation af tallene $1, 2, \ldots, n$.

b. Ja, der findes uendelige følger $x_1, x_2, \ldots$, som indeholder ethvert positivt helt tal netop en gang, således at (1) er opfyldt for ethvert k. Sådanne følger kan konstrueres rekursivt. Vi beskriver rekursionsskridtet.

Lad $x_1, x_2, \ldots, x_n$ være givet således, at (1) er opfyldt for $k = 1, 2, \ldots, n$, og lad z være et positivt helt tal forskelligt fra samtlige x_i. Vi skal se, at der findes et positivt helt tal y forskelligt fra z og fra samtlige x_i således, at følgen $x_1, x_2, \ldots, x_n, y, z$ opfylder (1) for $k = 1, 2, \ldots, n+2$. Dertil observerer vi, at hvis y vælges således, at

$$\sum_{i=1}^{n} x_i + y = m(n+1)(n+2) + (n+1)z$$

for et positivt helt tal m, så gælder

$$n+1 \text{ er divisor i } \sum_{i=1}^{n} x_i + y \qquad \text{og} \qquad n+2 \text{ er divisor i } \sum_{i=1}^{n} x_i + y + z\,.$$

Det er klart, at m kan findes således, at tallet $y = m(n+1)(n+2)+(n+1)z-\sum_{i=1}^{n} x_i$ er positivt og forskelligt fra z og fra samtlige x_i.

Det ses nu let, hvordan man kan bestemme følger med den angivne egenskab. En mulighed er at starte med at sætte $x_1 = 1$. Dernæst anvendes den beskrevne konstruktion med $n = 1$, $z = 2$, og m valgt mindst muligt. Det giver $x_2 = 3$, $x_3 = 2$. Derefter fortsættes, idet vi i hvert skridt vælger z som det mindste positive hele tal, der ikke forekommer blandt de foregående x_i'er, og for bestemtheds skyld vælger m mindst muligt. De første 13 elementer i den således bestemte følge bliver

$$1, 3, 2, 10, 4, 52, 5, 43, 6, 54, 7, 65, 8\,.$$

(Också löst av *Con Amore Problemgruppe, København, DK.*)

498. (*Peter Kierkegaard, Gentofte, DK.*) I firkant $ABCD$ betegnes siderne $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, mens diagonalerne betegnes $BD = p$, $AC = q$.

Betingelsen $\angle A + \angle C > \angle B + \angle D$ er ensbetydende med

$$\angle B + \angle D < 180^\circ. \tag{1}$$

Den er også ensbetydende med

$$\angle A + \angle C > 180^\circ. \tag{2}$$

Idet vi først betragter betingelsen (1), kan dennes venstre side ligge mellem 0° og 360°, så betingelsen kan ligeságodt formuleres:

$$\sin(B+D) > 0 \quad \text{eller} \quad \sin B \cos D + \cos B \sin D > 0\,. \tag{3}$$

Indsættes heri

$$\cos B = \frac{a^2+b^2-q^2}{2ab},\ \cos D = \frac{c^2+d^2-q^2}{2cd},\ \sin B = \sqrt{1-\cos^2 B},$$
$$\sin D = \sqrt{1-\cos^2 D},$$

fås efter multiplikation med $4abcd$ at (3) er ensbetydende med

$$\begin{aligned}&(c^2+d^2-q^2)\sqrt{4a^2b^2-(a^2+b^2-q^2)^2}\\ &\qquad +(a^2+b^2-q^2)\sqrt{4c^2d^2-(c^2+d^2-q^2)^2} > 0.\end{aligned} \tag{4}$$

Lad os indlægge et nyt koordinatsystem med AC på x-aksen, B over x-aksen, samt D under x-aksen. Vi kan fx antage at A og C har koordinaterne hh (-1,0) og $(1, 0)$. Kaldes koordinaterne for B og D hh (x, y) og $(u, -v)$ gælder altså:

$$y > 0, \qquad v > 0\,. \tag{5}$$

Med betegnelserne ovenfor får vi:

$$\begin{aligned} &a^2 = (x+1)^2 + y^2,\ b^2 = (x-1)^2 + y^2,\ c^2 = (u-1)^2 + v^2, \\ &d^2 = (u+1)^2 + v^2,\ p^2 = (x-u)^2 + (y+v)^2,\ q^2 = 4\,. \end{aligned} \tag{6}$$

Vi kan udtrykke konveksitetsbetingelsen for firkanten i samme koordinatsystem. Vi må forlange at planprodukterne

$$|\overrightarrow{DC}\overrightarrow{DB}| = \begin{vmatrix} 1-u & x-u \\ v & y+v \end{vmatrix}$$

og

$$|\overrightarrow{DB}\overrightarrow{DA}| = \begin{vmatrix} x-u & -1-u \\ y+v & v \end{vmatrix}$$

er positive. Dette giver konveksitetsbetingelserne $v - vx + y - uy > 0$, $v + vx + y + uy > 0$.

Som det næste vil vi udtrykke betingelsen (4), som jo var ensbetydende med (1), ved x, y, u, v via (6). Tages (5) i betragtning, finder vi efter reduktion:

$$(u^2 + v^2 - 1)y + (x^2 + y^2 - 1)v > 0\,. \tag{7}$$

For fast $D(u, -v)$ udsiger (7) at B skal ligge udenfor en vis cirkel Γ_D med centrum på ACs midtnormal. Γ_D har ligningen

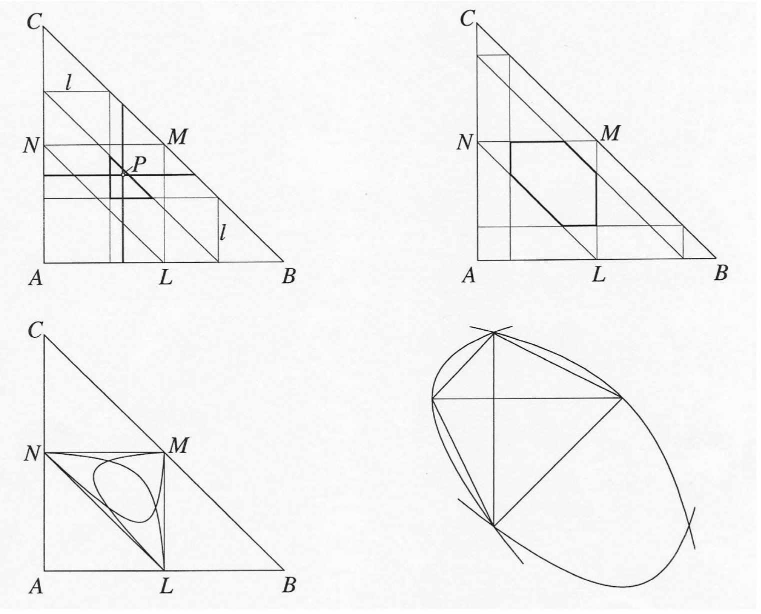
$$x^2 + \big(y + \frac{u^2 + v^2 - 1}{2v}\big)^2 = 1 + \frac{(u^2 + v^2 - 1)^2}{4v^2}\,.$$

Af denne ligning fremgår ved indsætning at $A(-1, 0)$, $C(1, 0)$, $D(u, -v)$ alle ligger på Γ_D som derfor er den omskrevne cirkel til trekant CDA med radius R_D. For fast $B(x, y)$ findes analogt at D skal ligge udenfor den omskrevne cirkel Γ_B til trekant ABC med radius R_B.

Vi kan behandle den ensbetydende relation (2) på helt tilsvarende måde. Vi finder da, at for fast A skal C ligge indenfor den omskrevne cirkel Γ_A til trekant DAB med radius R_A, samt at for fast C skal A ligge indenfor den omskrevne cirkel Γ_C til trekant BCD med radius R_C.

Vi bemærker nu at i specialtilfældet $\angle A + \angle C = \angle B + \angle D = 180^\circ$ er firkanten indskrivelig, således at $R_A = R_B = R_C = R_D = R$. Sammenholdes ovenstående resultater indses at (1) og (2) netop bliver ensbetydende med betingelsen $R_A + R_C > R_B + R_D$.

475. (*Hans Georg Killingbergtrø, Leksvik, NO.*) Hver tilfeldig oppdeling lar seg representere ved et punkt P innenfor en sjansetrekant ABC (øverste venstre figur) med $A(0,0)$, $B(1,0)$ og $C(0,1)$ i kartesiske koordinater. Lengdene av stavens venstre og mellomste del er abscisse og ordinat til P. Den tredje lengden er da lik den horisontale (og også den vertikale) avstanden fra P til BC. Skal de tre lengdene kunne være sidelengder i en stavtrekant, må hver av dem være mindre enn $1/2$, så P må ligge innefor en sjansetrekant LMN, der L, M og N halverer sidene i ABC. Arealet av LMN er 25 % av arealet av ABC, så det er bare 25 % sjanse for at delene kan danne en trekant.



(a) Videre i øverste venstre figur er l et tall mellom $1/4$ og $1/3$. Da ligger P inni en sjansetrekant som ligger helt innenfor LMN og har kateter lik $1-3l$, så sannsynligheten er her $(1-3l)^2$. I øverste høyre figur er l mindre enn $1/4$ og gir en sjansetrekant som stikker delvis utenfor LMN, og avskjærer LMN tre små trekanter, hver med kateter lik l. Her blir sannsynligheten dermed $1/4-3l^2$.

(b) Vi *låner* først en stavtrekant med feil størrelse der én vinkel er lik 30° og dens motstående side er $1/2$. De andre vinklene varieres og får motstående side lik sinus til vedkommende vinkel. Vi får riktig stavtrekant ved å dividere hver av de lånte sidene med summen av dem. Dette gir figuren nederst til venstre med tre kurver inni LMN, en fra L til M en fra M til N, og en fra N til L. Det konvekse området som begrenses av kurvene, gir svaret på (b) med beregnet areal nær 8,6359 % av ABC-arealet. Figuren nederst til høyre viser et større bilde av området. Utregningen lettes noe ved at den ene halvdelen deles i en innskrevet firkant med vinkelrette diagonaler, og tre segmenter (skalker) som faktisk er arealbevarende affinitetsavbildninger av hverandre, så av disse trengs det bare å beregne én.