Abel, de elliptiske funksjoner, og lemniskaten

Morten Eide

morteid@math.uio.no

1 Innledning

Det er flere momenter i Abels korte liv som er bemerkelsesverdige. Mest kjent for allmennheten er historien om femtegradsligningen. Det mest epokegjørende verket er kanskje Parisavhandlingen knyttet til de Abelske funksjoner, og historien rundt dette er også dramatisk. Det som imidlertid gjorde Abel kjent i samtiden var det berømte kappløpet med Jacobi om prioriteten til de elliptiske funksjonene. Vi skal her se litt på det første bidraget fra Abels hånd i denne henseende slik det kom til utrykk i hans "Recherches sur les Functions Elliptique" i "Crelles Journal' i 1827[1]. Her legges frem noe av materialet til det som får Abel til å uttrykke et entusiastisk brev til Holmboe.[2]

Du skal ses hvor det er pent. Jeg har funnet at man kan dele ved hjelp av passer og linjal lemniskaten i $2^n + 1$ deler når dette tall er primtall. Delingen avhenger av en ligning hvis grad er $(2n+1)^2 - 1$. Men jeg har funnet dens fullstendige løsning ved kvadratrottegn. Jeg har ved samme anledning kommet etter det mysteriet som har hvilet over Gauss teori av sirkelens deling.

Vi skal forsøke å peke på noen av hovedideene som kommer til utrykk her. Disse er ikke knyttet til de elliptiske funksjonene alene, men av flere emner som går sammen slik Abel utrykker det i et annet brev.

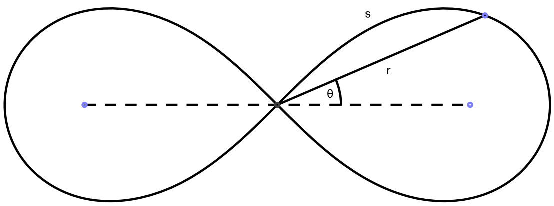
Jeg har kommet frem til disse resultatene angående lemniskaten ved å kombinere funksjonslære, ligningsteori og tallteori.

Abels undersøkelser er svært vidtrekkende så vi vil av naturlige årsaker begrense oss til å se på de grunnleggende egenskapene han legger frem angående de elliptiske funksjonene, og i tillegg se på anvendelsen i forhold til lemniskaten slik at vi får et blikk for den sammenheng de elliptiske funksjonene står inne i.

De elliptiske funksjonene har sitt opphav i studiet av buelengder til kurver. Opprinnelsen ligner dermed på opprinnelsen til de trigonometriske funksjonene, ettersom

[1] Engelsk oversettelse: Studies on Elliptic Functions, oversatt av M. E. Barnes

[2] Skrift i kursiv er sitater fra Abel.



Figur 1: Lemniskaten

disse startet med studiet av korders forhold til buelengder. Det skiller seg imidlertid ved at mens man tidligere brukte geometriske metoder til å utlede forhold, må man nå ta i bruk analytiske metoder. Etter at infinitesimalregningen var utviklet fikk man et verktøy til å gå utover studiet av sirkelbuer. Det ble mulig å regne ut flater under krumme kurver, og det ble gjort forsøk på å regne ut buelengden av slike kurver. En av de første kurvene som ble gjenstand for slikt studie var lemniskaten fordi denne gir relativt enkel integraler som minner om sirkelbuens integral.

2 Lemniskatens buelengde

Lemniskaten er gitt som det geometriske stedet for alle punkter der produktet av avstandene fra to punkt er konstant.

Ut fra dette forhold kan vi finne andre egenskaper for lemniskaten. Det finnes mange egenskaper, og ulike linninger for kurven. Ligningen gitt ved polarkoordinater har vi således ved

$$r = \sqrt{2}a\sqrt{\cos 2\theta} \tag{1}$$

Fra denne ligningen kan vi finne et utrykk for buelengden utrykket ved radien. Vi vil gå inn på dette for å vise hvordan de elliptiske integralene oppstod.

For å finne buelengdeutrykket tar vi utgangspunkt i ligningen over, og i buelengdedifferensialet. Vi velger spesielt $a = \frac{1}{2}\sqrt{2}$, og utrykket blir da $r = \sqrt{\cos 2\theta}$ Det generelle utrykket for buelengden er gitt ved

$$ds^2 = dr^2 + d\theta^2 r^2$$

Vi har ligningen ovenfor

$$r^2 = \cos 2\theta$$

og ved differensiering av denne får vi

$$r\ dr = -\sin 2\theta\ d\theta$$

som gir

$$d\theta^2 = \frac{r^2\,dr^2}{\sin^2 2\theta}$$

Innsetting fører til

$$\begin{aligned} ds^2 &= dr^2 + \frac{r^4\,dr^2}{\sin^2 2\theta} \\ &= \frac{\sin^2 2\theta + r^4}{\sin^2 2\theta}\,dr^2 \\ &= \frac{1-\cos^2 2\theta + r^4}{1-\cos^2 2\theta}\,dr^2 \\ &= \frac{1}{1-r^4}\,dr^2, \end{aligned}$$

som gir

$$ds = \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}\,dr$$

Vi får da et utrykk for buelengden utrykt ved radius vektor

$$s(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-r^4}}\,dr \tag{2}$$

Dette integralet fikk man problemer med å regne ut. Det var ikke mulig å finne en antiderivert med vanlige midler. Gauss fant ved et lykketreff en måte å beregne det fullstendige integralet fra 0 til 1 ved hjelp av det såkalte aritmetrisk geometriske middel, men det var ikke mulig å finne integralet for alle verdiene. Selv om det ikke ble funnet en metode til å finne buelengden for alle verdiene av x, ble det imidlertid funnet en formel for fordobling av bueintegralet av Fagnano. Dette er gitt ved

$$2\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{1}{\sqrt{1-x^4}}\,dx \tag{3}$$

Har man gitt et punkt på en lemniskatebue, kan man altså ved konstruksjon finne et punkt der buelengden fra origo er dobbelt så lang. Euler gikk videre med dette og kunne også finne en addisjonsformel for lemniskateintegralet: altså gitt to buelengder ut fra origo som vi kjenner radien til. Da ble det mulig å finne den radien som gir en buelengde lik summen av buelengdene. Imidlertid var det ikke noen klar metode til å finne disse addisjonsformelene. Legendre arbeidet iherdig med disse spørsmålene, men kom ikke til noe avgjørende resultat.

Her er det så Abel og Jacobi kommer inn, og det utvikles et kappløp mellom dem for å bringe frem alle resultatene de sitter inne med. Det som er det nye i disse betraktningene er at de omvender funksjonene. I stedet for å betrakte buelengdene som funksjon av radius vektor snur de problemstillingen rundt, de betrakter radien som en funksjon av buelengden. Dermed oppstår en type funksjoner som er en utvidelse av de trigonometriske der det nettopp er tilfelle at lengden er funksjoner av buer.

3 Abels første bidrag til elliptiske funksjoner

Abel innleder betraktningene i *Rechershes* ved kort å nevne forhistorien ved Legendre. Han definerer deretter de elliptiske funksjonene.

Vi har gitt funksjonen $\varphi\alpha = x$ ved ligningen

$$\alpha = \int \frac{\mathrm{d}\ x}{\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)}} \tag{4}$$

eller

$$\varphi'\alpha = \mathrm{d}\ \alpha\sqrt{(1-c^2x^2)(1+e^2x^2)},$$

Jeg introduserer også to andre funksjoner av α, nemlig:

$$f\alpha = \sqrt{(1-c^2\varphi^2\alpha)};\ \ F\alpha = \sqrt{(1+e^2\varphi^2\alpha)}$$

Det Abel stiller frem her er en generalisering av både de trigonometriske funksjonene og lemniskateintegralet. Setter vi $c = 1$ og $e = 0$ får vi $\varphi\alpha = \sin\alpha$ der $f\alpha = \cos\alpha$ og $F\alpha = 1$. Setter vi både c og e lik 1 går 4 over til lemniskateintegralet, og de andre funksjonene knyttet til lemniskaten har vi ved

$$f\alpha = \sqrt{1-\varphi^2\alpha};\ \ F\alpha = \sqrt{1+\varphi^2\alpha}$$

Vi skal senere komme tilbake til disse, men ser først litt på hvordan Abel går videre. Han forklarer først hensikten med skriftet.

Man kan vise at funksjonene $\varphi\alpha = 0$, $f\alpha = 0$ og $F\alpha = 0$ har uendelige mange røtter som kan finnes. En bemerkelsesverdig egenskap er at funksjonene $\varphi(m\alpha)$ o.s.v der m er et helt tall kan skrives som rasjonale funksjoner av $\varphi\alpha, f\alpha, F\alpha$. Det er således ikke vanskelig å finne $\varphi(m\alpha)$ når verdiene av elementærfunksjonene er gitt. Det omvendte problemet er imidlertid svært vanskelig og er avhengig av en ligning av grad m^2. Løsningen av disse ligninger er skriftets hovedhensikt.

Det er interessant å bemerke at Abel selv la større vekt på ligningsteorien enn de nye funksjonene han hadde funnet.
Abel bestemmer så noen fundamentale egenskaper til funksjonene, blant annet de deriverte av de ulike funksjonene. Definisjonen av funksjonene viser direkte at

$$\varphi'\alpha = f\alpha F\alpha$$

og ut fra dette finner han den deriverte til de andre funksjonene. Han setter så opp addisjonsformelene for disse funksjonene som på et vis danner grunnlaget for de senere betraktningene.

$$\varphi(\alpha+\beta) = \frac{\varphi\alpha\cdot f\beta\cdot F\beta + \varphi\beta\cdot f\alpha\cdot F\alpha}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha\cdot\varphi^2\beta} \tag{5}$$

$$f(\alpha+\beta) = \frac{f\alpha\cdot f\beta - c^2\varphi\alpha\cdot\varphi\beta\cdot F\alpha\cdot F\beta}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha\cdot\varphi^2\beta} \tag{6}$$

$$F(\alpha+\beta) = \frac{F\alpha\cdot F\beta + e^2\varphi\alpha\cdot\varphi\beta\cdot f\alpha\cdot f\beta}{1+e^2c^2\varphi^2\alpha\cdot\varphi^2\beta} \tag{7}$$

Disse formlene bevises ved å differensiere utrykkene.
På grunnlag av disse addisjonsutrykkene viser Abel at funksjonene er periodiske.

Disse ligningene viser at $\varphi\alpha$, $f\alpha$ og $F\alpha$ er periodiske funksjoner. Formlene kan også skrives som:

$$\begin{aligned}
\varphi(m\omega + n\varpi i \pm \alpha) &= \pm(-1)^{m+n} \cdot \varphi\alpha \\
f(m\omega + n\varpi i \pm \alpha) &= (-1)^{m} \cdot f\alpha \\
F(m\omega + n\varpi i \pm \alpha) &= (-1)^{n} \cdot F\alpha
\end{aligned}$$

Vi ser ut fra utrykkene at funksjonene er dobbelperiodiske der den ene perioden er imaginær i forhold til den andre.

Abel går videre og finner generelle utrykk for funksjonene når argumentene blir flerdoblet som nevnt innledningsvis. Man finner jo enkelt utrykket for $\varphi(2\alpha)$ ved å sette $\alpha = \beta$ i addisjonsformelen. Dette kan imidlertid videreføres ved å gjenta prosessen. Man finner for eksempel videre $\varphi(3\alpha)$ ved å anvende utrykket man har funnet for $\varphi(2\alpha)$. Abel studerer slik de helt generelle funskjonene

$$\varphi(n\alpha) = \frac{P(\varphi\alpha)}{Q(\varphi\alpha)}$$

Her finner han en rekke måter å fremstille funskjonene P og Q på, både som summer av elementære utrykk, og som produkter. Det han finner av utviklinger benytter han etterhvert på delingsproblemene.

4 Utrykk for deling av argumentene

De førtste delingsproblemene Abel ser på er delingen av hele perioder, og deretter på delingen av generelle argumenter. Det første som behandles er halvering, og denne er en slags omvending av fordoblingsfunksjoner.

Verdiene av $\varphi(\frac{\alpha}{2})$, $f(\frac{\alpha}{2})$ og $F(\frac{\alpha}{2})$ kan finnes lett på følgende måte. Anta at $\beta = \frac{\alpha}{2}$, sett

$$x = \varphi(\frac{\alpha}{2}), \;\; y = f(\frac{\alpha}{2}), \;\; z = F(\frac{\alpha}{2})$$

dette gir:

$$f(\alpha) = \frac{y^2 - c^2x^2z^2}{1 + e^2c^2x^4}, \quad F(\alpha) = \frac{y^2 + e^2x^2z^2}{1 + e^2c^2x^4}$$

eller ved å substituere y^2 og z^2 med x^2 [3]

$$f(\alpha) = \frac{1 - c^2x^2 - c^2e^2x^2}{1 + c^2e^2x^4}, \quad F(\alpha) = \frac{1 + e^2x^2 - e^2c^2x^2}{1 + c^2e^2x^4}$$

[3] Sammenhengen mellom funksjonene er gitt ved definisjonene innledningsvis

Disse ligningene gir

$$1 + f\alpha = \frac{2(1 - c^2x^2)}{1 + c^2e^2x^4}, \quad 1 - f\alpha = \frac{2c^2x^2(1 + e^2x^2)}{1 + c^2e^2x^4}$$

$$F\alpha - 1 = \frac{2e^2x^2(1 - c^2x^2)}{1 + c^2e^2x^4}, \quad F\alpha + 1 = \frac{2(1 + e^2x^2)}{1 + c^2e^2x^4}$$

som gir

$$\frac{F\alpha - 1}{1 + f\alpha} = e^2x^2 `; \quad \frac{1 - f\alpha}{F\alpha + 1} = c^2x^2$$

og ved å kvadrere finner vi

$$\varphi(\frac{\alpha}{2}) = x = \frac{1}{c}\sqrt{\frac{1 - f\alpha}{F\alpha + 1}} = \frac{1}{e}\sqrt{\frac{F\alpha - 1}{f\alpha + 1}} \tag{8}$$

Videre finner han halveringsutrykk for de andre funksjonene. Vi skal ikke følge Abel direkte her, men se hvordan denne halveringsformelen kan anvendes på lemniskateintegralet.

Lemniskateintegralet får vi som sett ved å sette $c = 1$ og $e = 1$, altså $f\alpha = \sqrt{1 - x^2}$ og $F\alpha = \sqrt{1 + x^2}$ når $x = \varphi\alpha$. Dette ser vi ut fra definissjonene til funksjonene, og ved å bemerke at $\sqrt{1 - x^2}\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 - x^4}$ som er nevneren i lemniskateintegralet. Halveringsformelen til lemniskaten blir dermed

$$\varphi\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{1 - x^2} + 1}}$$

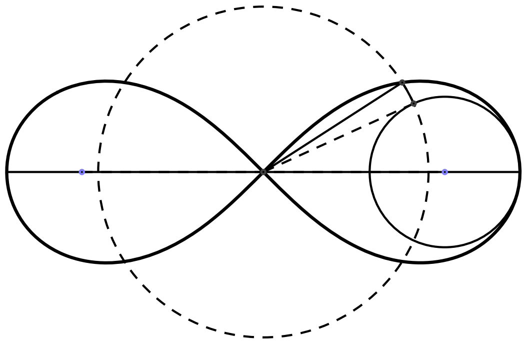
der $x = \varphi\alpha$

Denne halveringsformelen kan anvendes på alle buer, men vi ser på hva som skjer med kvartbuen. Når buelengden blir en kvart bue er radien 1. Ved halveringsformelen får vi da utrykk for radien når buen er halvparten av denne kvartbuen. Den er da gitt ved

$$r = \sqrt{\frac{\sqrt{1^2 + 1} - 1}{\sqrt{1 - 1^2} + 1}} = \sqrt{\sqrt{2} - 1}$$

Størrelsen kan konstrueres, og en løsning er gitt i figur 2.

Etter at Abel har funnet halveringsformlene går han videre og finner generelle formler for deling av argumentet. Herfra blir imidlertid utledningene vidløftige, slik at vi begrenser oss til å peke på retningen ved å se på $\varphi(\frac{\alpha}{3})$. Vi gjør ikke det generelt, men for lemniskaten.



Figur 2: Halvering av lemniskatebuen

5 Tredeling av lemniskatebuen

Vi finner først et utrykk for $\varphi(3\alpha)$. Dette gjør vi ved å bruke addisjonsformelen to ganger. Vi finner først $\varphi(2\alpha)$. Vi setter $\varphi\alpha = u$ slik at $f\alpha = \sqrt{1-u^2}$ og $F\alpha = \sqrt{1+u^2}$. Addisjonsformelen gir

$$\varphi(2\alpha) = \frac{2\varphi\alpha \cdot f\alpha \cdot F\alpha}{1+\varphi^4\alpha} = \frac{2u\sqrt{1-u^2}\sqrt{1+u^2}}{1+u^4} = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$$

Vi setter

$$v = \varphi(2\alpha) = \frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4}$$

og får av dette

$$\begin{aligned}
\varphi(3\alpha) &= \varphi(\alpha+2\alpha) \\
&= \frac{u\sqrt{1-v^2}\sqrt{1+v^2} + v\sqrt{1-u^2}\sqrt{1+u^2}}{1+u^2v^2} \\
&= \frac{u\sqrt{1-(\frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4})^2}\sqrt{1+(\frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4})^2} + (\frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4})\sqrt{1-u^2}\sqrt{1+u^2}}{1+u^2(\frac{2u\sqrt{1-u^4}}{1+u^4})^2}
\end{aligned}$$

Vi får et stort utrykk, men det lar seg redusere til et rasjonalt utrykk uten røtter

$$\varphi(3\alpha) = \frac{u(u^8+6u^4-3)}{3u^8-6u^4-1}$$

Med $u = \varphi\alpha$ har vi

$$\varphi(3\alpha) = \frac{\varphi\alpha(\varphi^8\alpha + 6\varphi^4\alpha - 3)}{3\varphi^8\alpha - 6\varphi^4\alpha - 1} \tag{9}$$

Har vi altså gitt en radius vektor $\varphi\alpha$ av en buelengde α, finner vi ved dette utrykket en radius vektor som gir den tredobbelte buelengden. Omvendt kan vi finne tredelingsradien hvis $\varphi(3\alpha)$ er kjent, og $\varphi(\alpha)$ er ukjent. Det lar seg ikke gjøre når buen er vilkårlig, men for den halve lemniskatebuen blir radien lik 0. Ved å sette ligningen over 9 lik 0 og løse ligningen med hensyn på $\varphi\alpha$ vil vi finne verdien som gir radien til en tredel av den hele sløyfen. Vi trenger bare sette nevneren lik 0, og vi kan dele med det trivielle $\varphi\alpha = 0$. Vi får å løse

$$\varphi^8\alpha + 6\varphi^4\alpha - 3 = 0$$

Dette er en åttendegradsligning, og graden er gitt ved $3^2 - 1$ som uttalt i sitatet innlednignsvis. Ligningen er likevel lett å løse, fordi det er en annengradsligning av $\varphi^4\alpha$. Vi får bare en løsning som er reell og denne er gitt ved

$$\varphi\alpha = \sqrt[4]{2\sqrt{3} - 3}$$

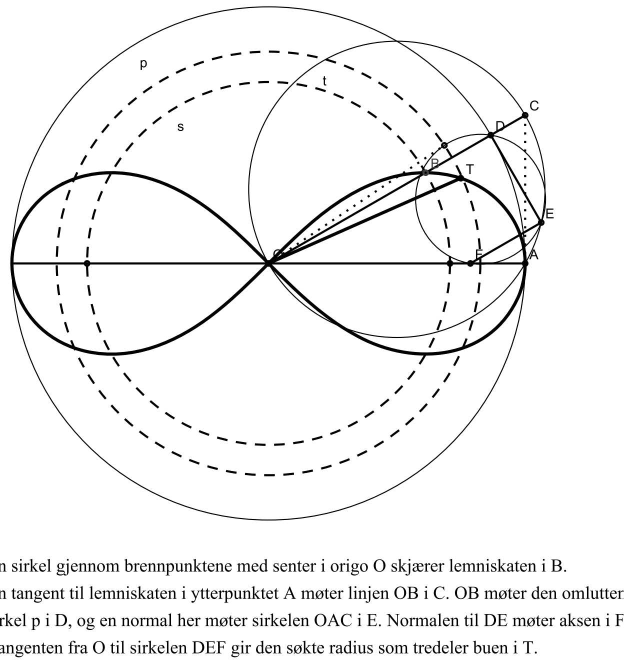
Størrelsen her lar seg også konstruere, og en vei er gitt i Figur 3.

Det vi har gjort her i et spesielt tilfelle er det Abel fortsetter med og gir helt generelle svar på. Han ser som sagt på utrykket $\varphi(n\alpha) = \frac{P(\varphi\alpha)}{Q(\varphi\alpha)}$ der P og Q er polynomfunkjoner. Han betrakter formen til funskjonen P, og finner at denne er løsbar ved konstruksjon når $n = 2^n + 1$ er primtall. Dette er det samme som Gauss hadde funnet for sirkelens vedkommende. Ut fra dette gir også tredelingen seg, fordi 3 er et primtall av formen $n = 2^n + 1$.

Med dette skriftet innledet Abel sammen med Jacobi et helt nytt kapittel i funksjonstorien. Undersøkelsene er utgangspunktet for det som siden er blitt teorien om blandt annet elliptiske kurver som har vidrekkende betydning. Videre inneholder de grunnleggende bidrag til ligningsteorien, og mye av det som ligger i Galois teori kan gjenfinnes her.

6 Sluttbemerkning

I Abels skriftlige arbeider er lemniskaten den eneste figuren som forekommer, og dette leder oss til å gjøre noen avsluttende bemerkninger.
Geometriske figurer har spilt en stor rolle som symboler i ulike sammenhenger blandt annet hos Platon. Sirkelen er således symbolet for helhet, den sluttede orden. Lemniskaten har i slike sammenhenger en særskilt betydning. Tegner vi lemniskatekurven dobbelt med en farge på innsiden og en på utsiden vil vi se at det



Figur 3: Tredeling av lemniskatebuen

som er utsiden i den ene halvdelen blir innsiden i den andre halvdelen. Lemniskaten har da i flere tradisjoner vært symbolet på omvending, at det ytre blir det indre og omvendt. Den forener på den måte det som vender utover og det som går innover. Ser man på Abels gjennomgripende betraktningsmåte er det nettopp omvendingen man ser hele tiden. Når han ikke kan løse femtegradsligningen, snur han på problemstillingen, og ser om det i det hele tatt er mulig å finne løsninger, og hva som er kriterier for løsbarhet. En lignende omvending skjer ved overgangen fra de elliptiske integralene til de elliptiske funksjonene, og ligger også til grunn for hans store verk om de Abelske funksjonene. Også en annen polaritet var forenet i Abel. På den ene siden ser vi en nesten grenseløs fantasi, og på den andre siden den største logiske strenghet. Fra denne synsvinkel er lemniskaten et symbol for mye av Abels åndsart.

Referanser

[1] N. H. Abel, *Recherches sur les fonctions elliptique,* Journal für die reine und angewandte Mathematik, Vol. 2, 1827. pp. 101-181