Normat **57**:1, 10–21 (2009)

Modulirum för trianglar (och tetrahedra)

Ulf Persson

Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola
ulfp@chalmers.se

1 Inledning

I en tidigare artikel i Normat (55:2) har Bengt Ulin behandlat frågan huruvida två icke-kongruenta trianglar kan ha samma omkrets och area och visat att så är fallet. Heuristiskt är detta knappast förvånande, trianglar kan beskrivas med tre parametrar, och att fixera två bör lämna en 1-dimensionell skara. Att detta verkligen är fallet visades elementärt och elegant av Jan Boman i ett följande nummer (Normat 55:4) och det är min ambition att i en serie av artiklar sätta denna fråga i ett mera systematiskt sammanhang och speciell att explicit parametrisera sådana skaror av trianglar (så kallade pA-trianglar i Ulins terminologi) samt att även ta upp andra naturliga 1-dimensionella familjer som sådana som har given inskriven och omskriven radie.

I min första inledande artikel tänker jag i detalj beskriva vad jag skulle vilja kalla ett modulirum för trianglar. Modulirum utgör centrala studieobjekt inom algebraisk geometri och teorin för dem har haft viktiga tillämpningar inom strängteori. De modulirum som då åsyftas rör ekvivalensklasser av komplexa variteter och får naturliga strukturer som variteter själva. I vårt fall är situationen betydligt elementärare, men trots detta tillräckligt intrikat anser jag för att inte vara helt trivial och faktiskt ge en inblick i den mera sofistikerade teorin.

I den klassiska matematikundervisningen på relativt elementär nivå spelade geometrin för trianglar en central roll. Skoleleven för en femtio år sedan var väl förtrogen med begrepp som omskriven och inskriven cirkel, kände till Herons formel och drillades i olika uppgifter som innefattade solvering av trianglar. Denna geometriundervisning blev under 60-talet ansedd som föråldrad och istället uppställdes en ambition att förmedla en modernare och mera begreppsmässig undervisning. Nu blev det si och så med ambitionerna, och i slutändan hade större delen av geometripensumet försvunnit utan att ersättas av något annat. I mångt och mycket var detta synd, ty även om lekandet med trianglar kan vara ålderdomligt är det inte desto mindre en rik källa till olika problem, och problemlösning utgör kärnan i all matematisk verksamhet, oberoende av nivå. Det är min förhoppning att introducerandet av modulirum för trianglar skall ge ett naturlig sätt att såväl presentera klassiska begrepp som att föreslå problem. Och varför begränsa oss till trianglar i det euklidiska planet, tetrahedrar utgör en uppenbar generalisering till en högre dimension, och då visar det sig att även de mest elementärt ställda problem leder till ganska intrikata frågor. Vinkelsumman i en euklidisk triangel är som bekant konstant, men vad är motsvarigheten till detta för tetrahedrar? Vidare kan man även betrakta frågeställningarna i ett icke-euklidiskt sammanhang, och de blir då genast betydligt mera sofistikerat. Men detta tänker vi överlåta till kommande artiklar.

2 Kongruenta avbildningar

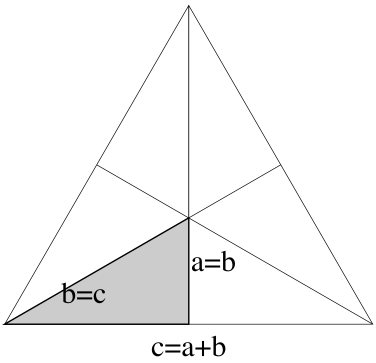
Vad menar vi med att två trianglar (i planet) är kongruenta? Detta är ett begrepp som går tillbaka till de gamla grekerna. Den intuitiva föreställningen, som även framträder tydligt i Euklides olika bevis, är att vi tänker oss trianglar utförda i något stelt material, säg papp (även om detta inte var tillgängligt för grekerna), och att vi har full frihet att vrida och vända på dessa, och att således två trianglar är kongruenta om de kan så att säga precis täcka varandra. Med lite mera modern matematisk terminologi kan vi tänka oss trianglar givna i rummet och flyttas vi stela avbildningar, d.v.s. ortogonal-avbildningar och translationer. De senare utgör en 6-dimensionell grupp G säg (3 dimensioner för vridningar och 3 dimensioner för translationer) och trianglar utgör ett 9-dimensionellt rum (T säg) genom att ge de tre ko-ordinaterna för vart och ett av dess tre hörn. Banan av en triangel utgöres av alla de möjliga förflyttningar en given triangel kan utstå via gruppen, och alla dessa förflyttade trianglar utgör mängden av alla sinsemellan kongruenta. Vad vi är intresserade av är inte trianglarna som sådana utan upp till kongruens, så vad vi behöver göra är att på ett naturligt sätt parametrisera banorna, vilket utgöres av kvoten T/G (Ett 3-dimensionellt rum ty $9-6=3$). Detta är ett typiskt moduli problem, vi har ett parameterrum och en verkan på detta rum av en naturlig grupp som definerar en ekvivalens. Nu är T ett stort rum, onödigt stort skulle man kunna hävda, och G en onödigt komplicerad grupp, så vi kommer inte att fullfölja denna konstruktion närmare, utan den är bara avsedd för att ge läsaren en indikation på vad som är problemet.

I stället skall vi koncentera oss på den naturliga frågan, hur kan man avgöra om två trianglar är kongruenta utan att behöva klippa ut dem ur någon papp och försöka passa ihop dem, vilket knappast verkar vara en matematisk process, även om den med viss möda kan genomföras via en sådan. Denna fråga besvarades fullständigt av Euklides, och ett svar är att två trianglar är kongruenta om sidornas längder överensstämmer. Euklides gav också andra svar givna i de olika så kallade kongruensfallen, och typiskt är att av en triangles sex storheter, nämligen dess tre sidlängder och tre vinklar är alla kända och bestämda om tre av dessa specifieras. Nu gäller detta inte generellt, ty i det euklidiska rummet kan två trianglar vara icke-kongruenta fastän de har samma vinklar (de säges vara likformiga). Detta är ett fenomen som inte förekommer i den icke-euklidiska världen, då bestämmer även vinklarna en triangel upp till kongruens, och icke-kongruenta likformiga trianglar existerar inte! I den euklidiska världen är likformighet fundamental, den utgör basen för den euklidiska avståndsbestämningen, avsaknaden av en naturlig längdenhet och därmed möjligheten för skalning. Pythagoras sats, urtypen för det euklidiska rummet i dess moderna tappning, är helt enkelt en följd av att en rätvinklig triangel kan delas upp i två likformiga deltrianglar var och en likformig dessutom med den ursprungliga. Så knappast förvånande kan inte de tre vinklarna i en triangel vara godtyckliga, de är underställda villkoret att dess summa är konstant (π eller 180^o beroende på den konvention vi har för vinkelmätning), så att specifiera vinklar utgör bara en 2-dimensionell familj.

3 Modulirum för trianglar

3.1 Kvotering med grupp

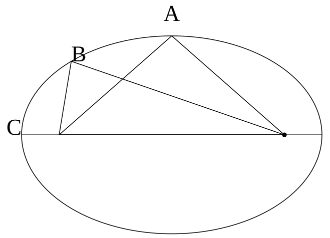
Låt oss specifiera en triangel genom att ge dess längder a, b, c som en punkt (a, b, c) i det 3-dimensionella rummet R^3. Först vad är villkoren på a, b, c? Först måsta givetsvis $a, b, c > 0$ ty de utgöres ju av längder, sedan måste triangelolikheterna gälla, d.v.s. en sidolängd är alltid mindre än summan av de två återstående längderna. Om man tänker sig sidorna som käppar och vill sätta samman dem som en triangel lyckas inte detta såvida inte de tre triangelolikheterna $a-(b+c) > 0, b-(c+a) > 0$ och $c-(a+b) > 0$ gäller. Vad som återstår är en öppen kon K med en triangel som bas (och därmed även en slags pyramid) utskuren av dessa olikheter. Denna kon är en 3-dimensionell mängd och den har egenskapen att om (a, b, c) är en godtycklig punkt i mängden så innehåller denna mängd även strålen genom denna punkt och origo, d.v.s. alla punkter $(\lambda a, \lambda b, \lambda c)$ där $\lambda > 0$. Men konen är inte vårt modulirum, ty varje permutation av längderna (a, b, c) ger upphov till en kongruent triangel, fastän var och en av dessa sex olika permutationer ger i allmänhet upphov till skilda punkter i K. Vad vi har här är ett parameterrum K samt en verkan av en grupp betecknad S_3 som verkar på K via permutationer av ko-ordinaterna. Vi är således intresserade av kvoten K/S_3. Nu innan vi fortsätter kan det vara naturligt att förenkla problemet ytterligare. Istället för att vara intresserade av trianglar upp till kongruens så försvagar vi ekvivalensrelationen genom att istället betrakta den upp till likformighet. Vi är således bara intresserade av formen av trianglar inte deras storlek. Den stråle vi tidigare har betraktat utgöres i själva verket av skalningar av en viss fix triangel (a, b, c). Läsaren må vara bekant med begreppet projektiva rum och homogena ko-ordinater, i vilket vi parametriserar linjer genom origio. Men eftersom detta rör strålar och inte linjer är det betydligt naturligare att betrakta kvoten inte med $\mathbf{R}^*$ utan $\mathbf{R}^*_+$ vilket är sfären, specifikt enhetssfären. Gör vi detta parametriserar vi våra trippler med en sfärisk triangel som utgör snittet med första oktanten. Vi får således en sfärisk triangel med alla vinklar räta. Men för att förenkla det hela kan vi även parametrisera våra strålar med dess snitt med det plan som skär ut den sfäriska triangeln, d.v.s. det plan som bestämmes av sfärens snitt med de tre ko-ordinat axlarna. Det är lätt att inse att detta plan är givet av $a + b + c = 1$ och dess snitt med konen K är en liksidig triangel. Varje punkt på denna liksidiga triangel gives då av (a, b, c) men nu betraktade som barycentriska ko-ordinater. Och K självt kan ses som just konen över denna triangel utsträckt mot oändligheten.

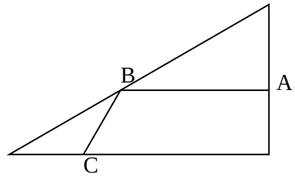


Nu är det lätt att visualisera verkan av S_3 på denna triangel. Dess mitt, dess barycenter, som givet av (a, a, a) motsvaras givetvis av den liksidiga triangeln. Genom denna punkt har vi tre linjer givna av $(a, a, c), (a, b, a)$ och (a, b, b) respektive. De delar upp triangeln i sex små rätvinliga trianglar som permuteras av verkan av S_3. Vi kan välja en av dessa trianglar, skuggad i bilden nedan, och då motsvaras varje element av S_3 av ett translat av detta. En sådan triangel säges utgöra ett fundamentalområde. Inga två inre punkter är ekvivalenta under gruppens verkan, och varje punkt är ekvivalent med någon ur området. Cyliska permutationer som $(a, b, c) \mapsto (b, c, a)$ motsvarar en vridning 120 grader, medan en involution som $(a, b, c) \mapsto (b, a, c)$ motsvaras av en spegling i linjen $a = b$.

Permutationer av ko-ordinaterna kan ses som linjära avbildningar, givna av permutationsmatriser. Detta ger, som den initierade läsaren redan insett, en grupprepresentation av den symmetiska gruppen, och denna representaion sönderfaller i två invarianta underrum, ett given av linjen genom $(1, 1, 1)$ det andra av det plan som är vinkelrätt mot det, och vilken vi nu betraktar.

Detta fundamentalområde (det skuggade) kan vi nu betrakta som ett moduli rum för trianglar upp till likformighet. Rummet självt utgöres av en rätvinklig triangel. Dess hypotenusa och dess korta katet motsvaras av likbenta trianglar, ty dessa är invarianta under spegling i sin symmetri axel. Likbenta trianglar är av två slag, dels det slag i vilken bägge benen utgör trianglarnas längre sidor, och dels för vilka de utgör dess kortare. Den liksidiga triangeln är av bägge slagen. Det kan vara en lämplig övning för läsaren att reda ut vilket slag tillhör vilken typ av sida. Slutligen, den längre kateten utgör de degenerarde trianglarna för vilka det gäller likhet i triangelolikheterna. De tre hörnen kommer då att ligga på en linje och utgöra ett segment med en punkt i. Skall man räkna dessa som trianglar? I själva verket visar det sig lämpligt att göra så om vi vill skaffa oss kompakta modulirum. Detta är ett återkommande tema i konstruktion av modulirum nämligen att kompaktifiera dessa och identifiera objekten på randen som degenerade objekt av ett visst slag. Till detta skall vi återkomma.



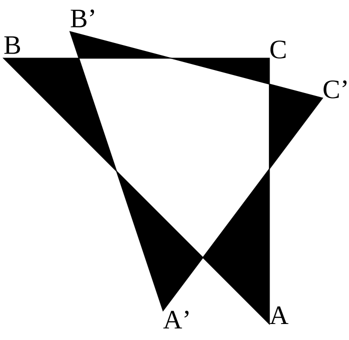


Intressanta exempel på skaror av trianglar med fix omkrets är att även fixera längden av en sida. Denna sidas ändpunkter kan då utgöra brännpunkterna till en ellips med lämplig längd på storaxeln (nämligen halva den givna omkretsen). Trianglarna som uppkommer genom att man låter dess apex löpa längs ellipsens omkrets kommer då att bilda en bruten rät linje i modulirummet. Varför bruten? Den utgör en rät linje i den stora triangeln, men reflekteras tillbaka in i fundamentalområdet.

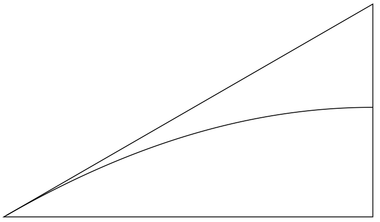
3.2 Avstånd och mått på modulirummet

Genom att identifiera vårt modulirum med den skuggade triangeln får vi automatiskt både ett avstånd och ett mått på detta rum. Två trianglar som är 'nära' varandra kommer att motsvaras av punkter som är 'nära' varandra, och det specifika avståndet är givet av det euklidiska. Det är dock ingenting 'kanoniskt' med just det avståndet, man kan tänka sig många olika avstånd. Ett exempel är om vi istället representerar modulirummet som en motsvarande sfärisk triangel får vi ett annat något annorlunda distans. Vi kan även försöka definera avståndet mera intuitivt. Två trianglar som är nära varandra täcker varandra nästan helt perfekt, men inte helt. Hur vi än vrider och vänder på dem kommer det att finnas delar av dem som blir över. Vi skulle nu kunna mäta arean av de överblivna delarna (skuggade i den vidstående figuren), och ju mindre denna är, desto närmare är trianglarna varandra. Eller vi skulle kunna ta maximum (summan, summan av kvadraterna) av de avstånd ($d(A, A')$ etc) som ges av närliggande hörn (A, A', B, B', C, C' i figuren). Eller vi skulle kunna ta Hausdorff distansen mellan de två trianglarna[1]

[1] Om A, B är två kompakta delmängder av ett metriskt rum definerar vi $d(A, B) = max(sup_{x\in A}(inf_{y\in B} d(x, y)), sup_{y\in B}(inf_{x\in A} d(x, y)))$

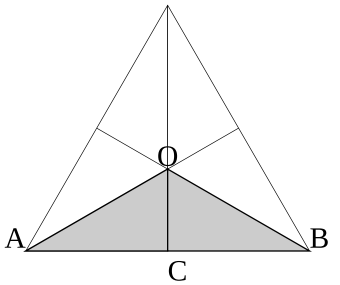


Sedan skulle vi kunna ta minimum över dessa när vi låter trianglarna variera bland sina kongruenta avbilder. Detta motsvaras ju uppenbarligen av att vi försöker 'matcha' två papp-trianglar så nära som möjligt. Om vi är intresserade av avstånd mellan trianglar upp till likformighet, måste vi då skala dessa, vilket utgör ett problem ty differensen hur vi än definerar den går mot noll om vi låter trianglarna bli mindre och mindre. Vi skulle kunna renormalisera genom att dividera med areor eller omkrets, eller bara betrakta trianglar med fix area eller omkrets. Som synes finns det ett otal olika sätt att bestämma avstånd i vårt rum, vitsen är att alla dessa olika avståndsdefinitioner är ekvivalenta, de metriska rum vi erhåller kommer alla att vara homeomorfa. Detta ger ett alternativt sätt att definera ett moduli rum, helt enkelt genom att betrakta alla trianglar med en av dessa givna avståndsfunktioner, och identifiera punkter med avstånd noll mellan varandra. (Sådana kommer att utgöra disjunkta ekvivalensklasser). Problemet är att på detta sätt utan någon explicit parametrisering är det svårt att lista ut hur modulirummet ser ut rent globalt.

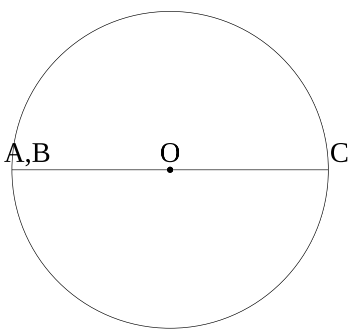


Vidare har vi ett mått givet av areor i det utvalda fundamentalområdet. Detta delas i två av hyperbelbågen som ges av $c^2 = a^2 + b^2$. Denna båge parametriserar alla rätvinkliga trianglar. Ovanför bågen har vi alla spetsvinkliga trianglar och nedanför alla trubbvinkliga (d.v.s. trianglar vars största vinkel är mindre, respektive större än en rät). Vilken typ av trianglar är vanligast? Vad är sannolikheten för att en triangel skall vara spetsvinklig? Denna fråga har uppenbarligen ingen mening så länge vi inte specifierar ett mått, och det finns ju ett otal mått vi kan lägga på rummet, men om vi håller oss till det vi får gratis genom vårt val av modulirum som den skuggade fundamentalområdet kan vi roa oss med att räkna ut det.

3.3 Topologin hos modulirummet



Det visar sig att vi får ett naturligare modulirum om vi istället betraktar trianglar upp till orienterad kongruens. Vi kallar sådana trianglar för orienterade. Detta betyder att om vi betraktar trianglarna i papp och låter måla en sida röd och en sida grön, så tillåts vi inte att vända på trianglarna, en röd sida får inte matchas med en grön. (Orienterade trianglar är således målade trianglar). Detta betyder att två spegelvända trianglar inte är orienterat kongruenta, såvida de inte är likbenta. Detta har som konsekvens att istället för att betrakta hela S_3 betraktar vi bara den cykliska undergruppen Z_3 av rotationer. Detta betyder att fundamentalområdet blir större, i själva verket kan väljas som vårt förra triangelområde plus dess spegelbild i endera kanten.

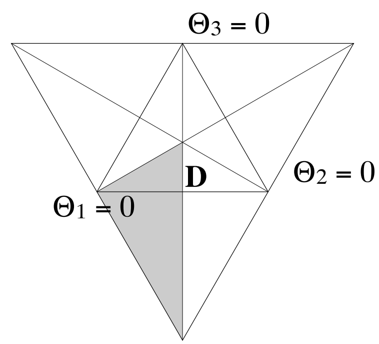


Men nu kommer punkterna på kanten AO vara identiska med motsvarande punkter på kanten BO och det är således inte bara naturligt utan även nödvändigt att klistra ihop figuren längs dessa kanter. Detta är fullt möjligt utan att på något sätt förändra metriken, och vi erhåller då en form av en strut, vars spets utgöres av den liksidiga triangeln. Spetsen är en så kallad singularitet, ty cirklar kring denna punkt har mindre omkrets än de skulle ha med avseende på radien (I själva verket bara en tredjedel). Detta är typiskt när man kvotar ut med en gruppverkan som har en fix punkt. Men om vi bara är intresserade av topologin kan vi platta ut det hela till en cirkelskiva, så att dess mittpunkt motsvarar den liksidiga triangeln, och så att vi har en distingerad diameter som motsvarar de likbenta trianglarna, halverad av medelpunkten, en halva motsvarande 'spetsiga' och en annan de 'trubbiga'. Det är enkelt att skriva upp en explicit avbildning som avbildar vårt fundamentalområde till en cirkel. Om P är en godtycklig punkt i området, r distansen till O och θ vinkeln mellan PO och CO (d.v.s. om vi sätter origio i O och introducerar polära ko-ordinater) låter vi avbilda P på en punkt med motsvarande vinkel 3θ och avstånd $r\sqrt{3}/\cos\theta$.

Men inte nog med detta. Vi noterar även att punkterna på linjen AB bör identifieras med varandra symmetriskt runt C. På cirkelskive representationen betyder detta att vi identifierar den övre halvcirkeln med den nedre. Resultatet blir en sfär. Den topologiska beskrivningen är nu färdig. Modulirummet för orienterade trianglar är en sfär. Dess nordpol motsvarar degenerarade trianglar i vilken punkten ligger vid ena änden (A eller B) medan dess sydpol degenererade trianglar vars punkt ligger i mitten (C). En meridian mellan dem motsvarar samtliga degenerarde trianglar (sträckan AC) och motstående meridian alla likbenta trianglar. Hur vi nu exakt avbildar vår ursprungliga fundamentalområde på sfären är mindre viktigt, vi har dock ett antal mer eller mindre naturliga alternativ.

3.4 Alternativa modulirum

Ett mycket naturligt sätt att parametrisera trianglar upp till likformighet är helt enkelt att betrakta triangelns vinklar. Dessa utgör en trippel $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$ med villkoret att summan är π och alla vinklar är positiva.



Vi erhåller då en större triangel (punkterna i den mindre deltriangeln motsvarar de trianglar för vilka vinklarna uppfyller triangelolikheterna, d.v.s. de är alla spetsiga), men annars är situationen mer eller mindre identisk med den förra. Mittpunkten motsvaras av den liksidiga triangeln, och medianerna av de likbenta. Vi erhåller två olika fundamentalområden beroende på om vi betraktar orienterade eller ickeorienterade trianglar. Och på samma sätt som tidigare kan vi i det förra fallet klistra ihop kanterna och forma en sfär.

Vi kan presentera dessa trianglar på olika sätt. Vi kan fixera en cirkel och ge tre punkter på denna. Dessa tre punkter ger tre centralvinklar vars summa givetvis är 2π. De definerar även en triangel vars omskrivna cirkel är den givna, och vars vinklar är hälften av centralvinklarna. Genom att istället ta de korresponderande tangenterna erhåller vi en triangel, som har den givna cirkeln som inskriven cirkel. Vi får dock vara försiktiga, villkoret är att de tre punkterna aldrig får ligga på ena sidan av en diameter, detta villkor är helt enkelt att triangelolikheten för centralvinklarna skall hålla. (Om så inte är fallet kommer visserligen cirkeln att tangera triangelns sidor, men bara när de är utsträckta som linjer. I själva verket givet tre linjer finns det fyra cirklar som tangerar dem alla, men bara en av dem ligger inuti den triangel de definerar.) Detta betyder att vi då endast utnyttjar den lilla triangeln ovan. Relationen mellan centralvinklar och vinklarna hos den omskrivande triangeln är givetvis $\theta \mapsto \pi - \theta$ (vilket förutsätter att ingen centralvinkel $> \pi$).

Relationen mellan de två modulikonstruktionerna ovan är givet i ena ledet av avbildningen

$$(\theta_1, \theta_2, \theta_3) \mapsto (\sin\theta_1, \sin\theta_2, \sin\theta_3)$$

där högerledet skall tolkas som homogena ko-ordinater eller normaliseras med $\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \sin\theta_3$. Detta bygger givetvis på den kända och lätt verifierade satsen att i en triangel med sidlängder L_1, L_2, L_3 och motsvarande vinklar $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ gäller

$$\frac{L_1}{\sin\theta_1} = \frac{L_2}{\sin\theta_2} = \frac{L_3}{\sin\theta_3}$$

(vars gemensamma värde kan ges en geometrisk tolkning).

Omvändingen är lite mera omständlig. Vi noterar att eftersom $\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$ finner vi att $\sin\theta_3 = \sin(\theta_1 + \theta_2) = \sin\theta_1 \cos\theta_2 + \sin\theta_2 \cos\theta_1$. Detta ger en algebraisk relation mellan a, b, c om vi skall kunna lösa $a = \sin\theta_1, b = \sin\theta_2$ och $c = \sin\theta_3$. Vi gör då en lämplig ansats genom att försöka finna ett lämpligt $\lambda > 0$ sådan att $\lambda a, \lambda b, \lambda c$ uppfyller relationen

$$\lambda c = \lambda a\sqrt{1 - \lambda^2 b} + \lambda b\sqrt{1 - \lambda^2 a}$$

genom att förkorta bort λ och sätta $\mu = \lambda^2$ kvadrera frigöra kvadratrotstermen och kvadrera igen erhåller vi

$$(c^2 - a^2(1 - \mu b^2) - b^2(1 - \mu a^2))^2 = 4a^2b^2(1 - \mu b^2)(1 - \mu a^2)$$

vilket förenklas till

$$(c^2 - (a^2 + b^2) + 2\mu a^2 b^2)^2 = 4a^2b^2(1 - \mu(a^2 + b^2) + \mu^2 a^2 b^2)$$

som mirakulöst reduceras till

$$4a^2b^2c^2\mu = 4a^2b^2 - (c^2 - (a^2 + b^2))^2$$

Eftersom vänsterledets koefficient är symmetrisk i a, b, c måste samma gälla för högerledet, fastän det inte ser så ut vid första anblicken. Dock upprepad användning av konjugatregeln förenklar högerledet till

$$(2ab + c^2 - (a^2 + b^2))(2ab - c^2 + (a^2 + b^2)) = (c^2 - (a - b)^2)((a + b)^2 - c^2)$$

d.v.s.

$$\lambda = \frac{\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)}}{2abc}$$

vilket också är det gemensamma värdet för $\frac{\sin\theta_1}{a}$ etc. Vi löser nu

$$\theta_1 = \arcsin(\frac{\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)}}{2bc}$$

etc. Signifikansen av detta uttryck kommer att avslöja sig nedan, men låt oss för framtida bruk sätta $H = \sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)}$

4 Funktioner på modulirum

En funktion F på ett modulirum (a,b,c) skall vara en homogen och symmetrisk funktion i variablerna. Graden av homogeniteten ges av skalningsfaktorn vid skalning. Omkrets (p), och radierna (r,R) för inskrivna respektive omskrivna cirkeln är klassiska exempel på homogena symmetriska funktioner av grad 1, arean (A) är ett exempel av grad 2. Kvoten mellan två funktioner av samma grad är en *bona fide* funktion på våra modulirum och är oberoende av skalning, d.v.s. beror bara på formen av triangeln. Dessa funktioner kan således även uttryckas med hjälp endast av vinklarna $\theta_1,\theta_2,\theta_3$. Explicita uttryck för dessa klassiska funktioner var välkända för forna tiders elever, men det är inte så svårt att härleda dem.

Fallet med perimetern är trivialt, uppenbart gäller att

$$p = a+b+c$$

När det gäller den inskrivna cirkelns radie inser man lätt att via dess medelpunkt delas triangeln upp i tre trianglar med samma höjd (=r) och var och en med en sida som bas. Således gäller $r(a+b+c) = rp = 2A$, d.v.s.

$$r = \frac{2A}{p}$$

För den omskrivna cirkelns radie R noterar vi att $a = 2R\sin\theta_1, b = 2R\sin\theta_2, c = 2R\sin\theta_3$ d.v.s. $2R = \frac{a}{\sin\theta_1}$ etc. Vidare kan vi uttrycka arean via $2A = bc\sin\theta_1 = ac\sin\theta_2 = ab\sin\theta_3$. Detta betyder att $\sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3$ kan både skrivas som $\frac{p}{2R}$ och $2A(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}) = \frac{2Ap}{abc}$. Ur detta löser vi ut R och erhåller

$$R = \frac{abc}{4A}$$

Vad som återstår är att erhålla ett uttryck för arean A. Men denna har vi redan av en tillfällighet funnit, ty vi vet att

$$\frac{2abc}{4A} = 2R = \frac{a}{\sin\theta_1} = \frac{2abc}{H}$$

ur vilket vi direkt sluter

$$\begin{aligned} A = \frac{1}{4}H &= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a-b+c)(-a+b+c)} = \\ &= \frac{1}{4}\sqrt{p(p-2a)(p-2b)(p-2c)} \end{aligned}$$

känd som Herons formel.

Man skulle vilja finna ett mera begreppsmässigt bevis för Herons formel. Man ser att A inte kan vara ett polynom, eftersom det då skulle vara av andra graden men ändå delbart med de tre faktorerna $(a+b-c), (a-b+c), (-a+b+c)$ ty arean försvinner hos de degenererade trianglarna. Nästa försök är att A^2 är ett polynom. I så fall måste det vara av formen $k(a+b+c)(a+b-c)(a-$

$b+c)(-a+b+c)$ ty det är symmetriskt och av grad fyra. Konstanten k kan man bestämma genom att evaluera den liksidiga triangelns area. Men hur ser man att det är ett polynom? Utnyttja att $2A = ab\sin\theta$ samt att $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$. Mellan $\sin^2$ och $\cos^2$ föreligger ett enkelt linjärt samband. Lös ut för de båda, kvadrera och lägg ihop och vi erhåller ett symmetriskt polynom (av fjärde graden) för A^2

En intressant övning blir nu att uttrycka olika funktioner (som t.ex. $\frac{R}{r}, \frac{A}{p^2}$ etc) av grad noll i vinklarna.

5 Modulirummet för tetrahedrar

Vi kan nu försöka göra samma sak för tetrahedrar som vi gjorde för trianglar. Detta visar sig vara betydligt mera komplicerat. Först har vi sex kantlängder att hålla reda på. Tre sidor kan bara sättas samman på ett sätt för en triangel, medan sex kanter kan sättas samman på olika sätt och ge inkongruenta tetrahedrar. Den elementära kombinatoriken är betydligt mera komplicerad, två sidor i en triangel har alltid samma relation, medan två kanter i en tetraheder är antingen skeva eller har ett hörn gemensamt. Tre kanter har antingen ett gemensamt hörn, eller ligger i ett plan och bildar en triangel, eller ingetdera, d.v.s. två av kanterna är skeva och den tredje sammanbinder dem. Permutationsgruppen för sidorna av en triangel utgöres av den fulla symmetriska gruppen S_3, medan permutationsgruppen för en tetraheders kanter som bevarar de så kallade incidensrelationerna utgör en delgrupp av samtliga permutationer S_6. Det är inte svårt att se att denna är av ordning 24 ty en kant a kan avbildas på en godtycklig kant a' (6 olika val). En kant b med ett gemensamt hörn med a måste avbildas på en kant med ett gemensamt hörn med a' (4 olika val). Därefter är permutationen fixerad. Gruppen kallas inte oväntat för tetrahedergruppen och utgör symmetrigruppen för en reguljär tetraheder. Dess gruppstruktur är intressant men vi skall inte gå närmare in på denna. Istället nöjer vi oss med att påpeka att indexet av tetrahedergruppen i S_6 är 30 så i princip skall det vara möjligt att ur sex kantlängder konstruera fram trettio inkongruenta tetrahedrar, men i allmänhet är inte varje hopsättning möjlig, ty varje val av tre kanter behöver inte satisfiera triangelolikheterna och kan således inte utgöra en triangel. Man inser att för oregelbundna tetrahedrar som ligger mycket nära en regelbunden bör det maximala antalet uppnås. Ett exempel på ett val av sex kanter som inte tillåter det maximala antalet är $(9, 10, 11, 29, 30, 31)$ som bara kan sättas samman på sex olika sätt. Läsaren inser att bortsett från en dimensionsräkning (6 för tetrahedrar upp till kongruens och 5 för tetrahedrar upp till likformighet) är det ogörligt att med denna metod göra en explicit konstruktion.

En tetraheder har sex olika kantvinklar, dessa bestämmer en tetraheder upp till likformighet, om vi tar i beaktande de ganska komplicerade ordningarna vi måste ta. Eftersom familjen av tetrahedrar upp till likformighet är 5-dimensionell, kan dessa sex olika kantvinklar inte variera oberoende av varandra, men vad är villkoret? Det är inte det uppenbara att summan skall vara konstant.

För att få något grepp om modulirummet behöver vi använda en av de alternativa metoderna vi diskuterade ovan. Låt oss betrakta 4 punkter på sfären. Sfären kan vi betrakta som Riemannsfären, d.v.s. den komplexa projektiva linjen $\mathbf{CP^1}$ givet av homogena komplexa ko-ordinater (z_0, z_1)

> Vi kan dehomogenisera dessa till lokala ko-ordinater för två kartor $z = \frac{z_1}{z_0}$ för $z_0 \neq 0$ och $w = \frac{z_0}{z_1}$ för $z_1 \neq 0$ med $z = 1/w$ på det gemensamma snittet av de två kartorna var och en identisk med det komplexa talplanet.

Som bekant opererar de brutna linjära funktionerna $\frac{az+b}{cz+d}$ de så kallade Möbius-avbildningarna på Riemannsfären. Dessa utgör en 3-dimensionell komplex grupp betecknad $PSl(2, \mathbf{C})$ som innehåller en 3-dimensionell delgrupp $SO(3)$ av vridningar av sfären. Fyra punkter på Riemannsfären utan tanke på ordning ges av ett homogent polynom i z_0, z_1 av grad fyra. Sådana polynom är bestämda upp till en komplex multiplikativ konstant och utgör således ett komplext projektivt rum av komplex dimension 4, d.v.s. $\mathbf{CP^4}$. Den naturliga verkan av Möbiusgruppen på sfären, d.v.s. de linjära binära formerna, inducerar för varje binär form (speciellt de av grad fyra) en verkan genom ko-ordinatbyte. Detta inducerar även en verkan av delgruppen $SO(3)$. Kvoten $\mathbf{CP^4/SO(3)}$ utgör vårt sökta modulirum, och dess dimension är som man lätt inser den förväntade $4 \times 2 - 3 = 5$. Eftersom gruppen vi kvotar med är kompakt blir det hela nästan lika enkelt som med kvotningen av en ändlig grupp. (Det är det som är vitsen med kompakthet.) Speciellt kan vi definera en avstånds funktion genom att t.ex. betrakta Hausdorffdistansen mellan banorna i $\mathbf{CP^4}$ vilken själv har en naturlig metrik, som vi dock inte har utrymme att gå närmare in på.