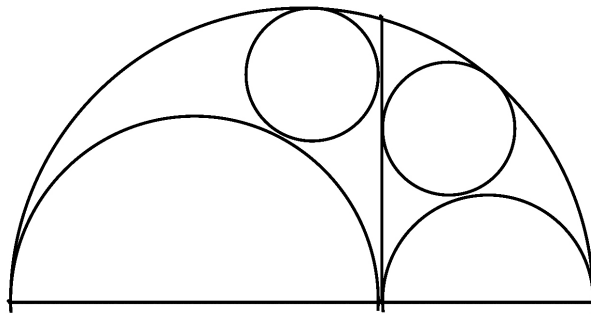


# Tvillingcirklar

*Christer Bergsten*

Linköpings universitet  
chber@mai.liu.se

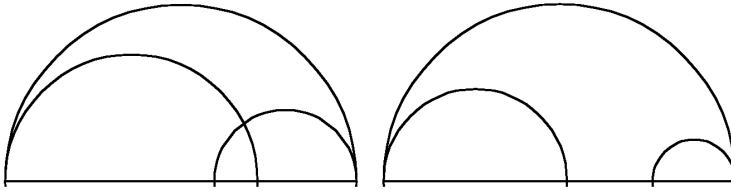
En konfiguration av cirklar som fascinerat genom tiderna är den s.k. skomakar-kniven, eller arbelos. I denna tidskrift har den tidigare tagits upp av Bengt Ulin [1], Karen Sofie Ronaess [2] och Morten Eide [3], där bl.a. de arkimediska tvilling-cirklarna diskuterats. Figuren nedan visar skomakarkniven med dessa två mindre cirklar som är kongruenta oberoende av den relativa storleken mellan de två inre tangerande halvcirklarna.



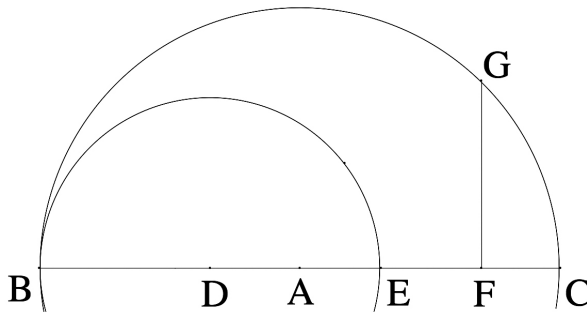
I denna artikel betraktas skomakarkniven då dess två mindre halvcirklar inte tangerar varandra, dvs. skär varandra eller saknar gemensamma punkter. Denna figur kallar jag en öppen arbelos (se Figur 1). Den gemensamma tangenten ersätts då med de inre halvcirklarnas potenslinje. Jag kommer i det följande att visa att en motsvarighet till de tvillingcirklar som Arkimedes introducerade då förblir tvilling-cirklar, dvs. är kongruenta. Jag kommer att utgå från en geometrisk konstruktion med vilken man kan konstruera dessa cirklar och ta fram formler för dessa cirkels diameter och medelpunkter. Avslutningsvis pekar jag på ytterligare en intressant cirkel som tangerar tvillingcirklarna. Endast grundläggande klassisk geometri kommer att användas. För att förenkla notationen kommer en cirkel med medelpunkt i A och med B som en punkt på cirkelns periferi att betecknas  $C_{AB}$

## 1 Ett konstruktionsproblem

I Figur 2 är cirkeln  $C_{AB}$  given med diametern BC. Cirkeln  $C_{DB}$  har sin medelpunkt D på BC. Normalen genom en punkt F på BC skär  $C_{AB}$  i G. Uppgiften är att konstruera en cirkel som tangerar  $C_{AB}$ ,  $C_{DB}$  och sträckan FG (på dess vänstra sida; FG kan även skära cirkeln  $C_{AB}$ ).



Figur 1: Två fall av en öppen arbelos.



Figur 2: Att konstruera en cirkel som tangerar cirkeln  $C_{AB}$ , cirkeln  $C_{DB}$  och sträckan  $FG$ .

**Konstruktion 1**

Utgå från Figur 2. Dra sträckan  $BG$  som skär  $C_{DB}$  i  $H$ . Dra normalen från  $H$  till  $FG$  som skär  $FG$  i  $J$ . Bestäm mittpunkten  $K$  på sträckan  $HJ$ . Rita cirkeln  $C_{HK}$ . Förläng sträckan  $DH$  tills den skär cirkeln  $C_{HK}$  i  $L$ . Medelpunkten  $M$  i den sökta cirkeln fås nu som skärningen mellan cirkeln  $C_{DL}$  och normalen till  $BC$  genom  $K$ . Sträckan  $DM$  skär  $C_{DB}$  i  $N$ . Cirkeln  $C_{MN}$  är den sökta cirkeln.

*Bevis för konstruktion 1.* Cirkeln  $C_{MN}$  har konstruerats så att den tangerar normalen  $FG$  och cirkeln  $C_{DB}$ . För att visa att den även tangerar cirkeln  $C_{AB}$  inför jag följande längdbeteckningar:  $BC = 1$ ,  $BE = r$  och  $BF = a$ . Konstruktionen är inte beroende av relationen mellan  $r$  och  $a$ . För beviset hänvisas till Figur 3.

Då vinklarna  $BHE$  och  $BGC$  båda är räta (periferivinklar i halvcirklar) är  $HE$  och  $GC$  parallella och flera likformiga trianglar kan lätt identifieras. Man får då direkt att  $FG = \sqrt{a(1-a)}$  och att  $\frac{BH'}{BF} = \frac{BH}{BG} = \frac{HE}{GC} = \frac{BE}{BC}$ , som då ger  $BH' = ar$  och därmed  $HK = \frac{1}{2}(a - ar)$ . Av detta fås  $BM' = a - \frac{1}{2}(a - ar) = \frac{1}{2}(a + ar)$ . Av Pythagoras sats följer sedan att

$$MM'^2 = DM^2 - DM'^2 = \left(\frac{r}{2} + \frac{1}{2}(a - ar)\right)^2 - \left(\frac{1}{2}(a + ar) - \frac{r}{2}\right)^2 = ar(1 - a).$$



**Lemma 1.** *De två inskrivna cirkklarna i Figur 4 är tvillingcirkelar, dvs har samma diameter.*

*Bevis.* Dra sträckorna HE och SU, där U är skärningen mellan cirkeln  $C_{RC}$  och BC (se Figur 4). Dessa sträckor skär varandra i V. Fyrhörningen GHVS är en rektangel eftersom vinklarna BGC, BHE och USC är räta. Dra linjen genom H och S. Triangeln GHS är då likformig med triangeln GCB. Om Q' är den andra skärningspunkten mellan FG:s förlängning och cirkeln  $C_{DB}$  (och med  $C_{RC}$ ) är nämligen enligt kordasatsen

$$(1) \quad GS \cdot GC = GQ \cdot GQ' = GH \cdot GB,$$

som medför att

$$\frac{GS}{GH} = \frac{GB}{GC}.$$

Eftersom det finns en gemensam vinkel vid G följer likformigheten. Punkten V måste då ligga på FG då även trianglarna SVG och FCG är likformiga med GCB. Diagonalen HS till rektangeln GHVS delas då av FG på mitten, vilket innebär att punkterna H och S har samma vinkelräta avstånd till FG. Enligt ovan innebär detta att cirkklarna med medelpunkter i M respektive T har samma diametrar, dvs är tvillingcirkelar.  $\square$

Då punkterna E och U sammanfaller fås som ett specialfall de klassiska Arkimedes tvillingcirkelar.

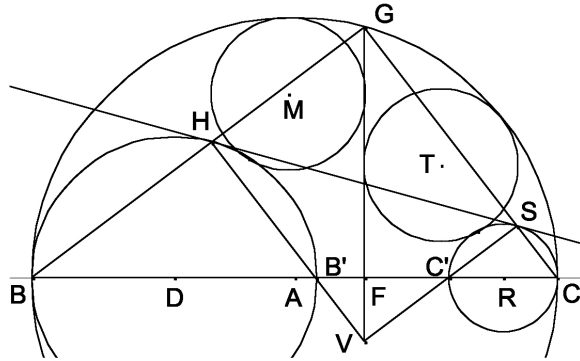
**Lemma 2.** *Linjen genom H och S är gemensam tangent till de båda cirkklarna  $C_{DB}$  och  $C_{RC}$ .*

*Bevis.* Vinkeln DHS är summan av vinklarna DHE och EHS. Men vinklarna DHE och DEH är lika och då enligt ovan lika med vinkeln BCG. Eftersom också vinklarna EHS och GBC är lika, så är vinkeln DHS lika stor som summan av vinklarna BCG och GBC, dvs rät. Analogt ses att vinkeln RSH är rät.  $\square$

Kordasatsen medför också utifrån (1) ovan att från punkten G (och från vilken annan punkt som helst på linjen genom F och G) är det lika långa tangenter till båda cirkklarna  $C_{DB}$  och  $C_{RC}$ . Linjen genom skärningspunkterna Q och Q' är potenslinjen till  $C_{DB}$  och  $C_{RC}$ . Potenslinjen kan också enkelt konstrueras då cirkklarna inte överlappar, vilket utgör det andra fallet av den generaliserade arbelosfigur jag kallar en öppen arbelos. Samma resultat för tvillingcirkellarna gäller även i detta fall, om FG är på denna potenslinje som i Figur 5. Detta följer också med samma argument där mellanledet i (1) då ersätts med de gemensamma längderna av tangenterna. Eftersom diagonalen HS i rektangeln GHVS delas på mitten av FG kan potenslinjens läge direkt konstrueras med hjälp av mittpunkten på HS (se fotnot 2 nedan).

Resultaten ovan kan sammanfattas i följande sats:

**Sats 1.** *I en öppen arbelos, dvs. den generaliserade arbelosfigur som fås då de mindre halvcirkklarna inte tangerar varandra och deras gemensamma tangent ersätts av deras potenslinje, är de inskrivna cirkklarna tvillingcirkelar (dvs cirkklarna med medelpunkter M respektive T i Figur 4 respektive 5).*



Figur 5: Tvillingcirklar vid potenslinjen.

För att bestämma potenslinjens läge  $BF$  och tvillingcirklarnas diameter använder jag följande beteckningar:  $BC = 1$ ,  $BB' = r_1$ ,  $BF = a$ ,  $BC' = r_2$ , och tvillingcirklarnas respektive radie  $r_M$  och  $r_T$ . Här är  $r_1$  och  $r_2$  båda mellan 0 och 1 och oberoende av varandra (dvs även fallet med de mindre cirklarna enligt Figur 4 är möjligt).

**Sats 2.** *Tvillingcirklarnas diameter är halva harmoniska medelvärdet av  $1 - r_1$  och  $r_2$  (dvs. sträckorna  $B'C$  och  $BC'$  i Figur 5), vilket kan uttryckas genom formeln*

$$r_M = r_T = \frac{r_2(1 - r_1)}{2(r_2 + 1 - r_1)}$$

.

*Bevis.* Med egenskapen att tangenten från  $G$  till respektive cirkel  $C_{DB}$  och  $C_{RC}$  är lika ger Pythagoras sats, efter förenklingar,<sup>1</sup> att

$$a = \frac{r_2}{r_2 + 1 - r_1}, \quad r_M = \frac{a(1 - r_1)}{2} \quad \text{och} \quad r_T = \frac{r_2(1 - a)}{2}.$$

Tillsammans ger detta även att

$$r_M = r_T = \frac{r_2(1 - r_1)}{2(r_2 + 1 - r_1)}.$$

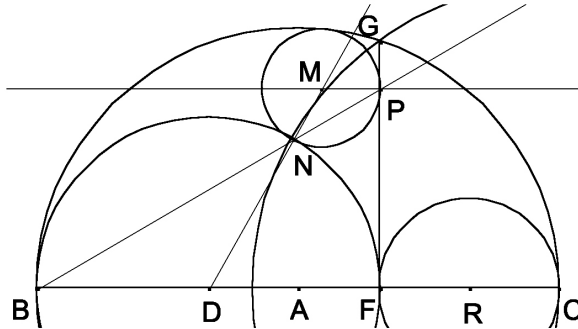
Med  $r_1 = r_2 = r$  fås fallet med arbelos (dvs.  $B'$  och  $C'$  sammanfaller med  $F$  i Figur 5) och formeln ovan visar att tvillingcirkelns diameter då är halva harmoniska medelvärdet av de givna inre cirklarnas diametrar.  $\square$

Konstruktionen ovan av tvillingcirklarna kan alltså genomföras även i arbelos. Jag visar emellertid i Figur 6 en enklare konstruktion av dessa.

<sup>1</sup>Se Appendix för detaljerna

**Konstruktion 2**

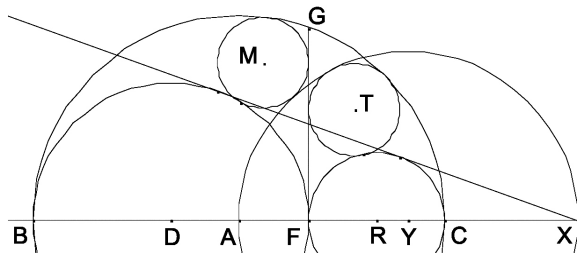
Genom att rita vad jag i [5] kallade den magiska cirkeln  $C_{CG}$  får man direkt tangeringspunkten  $N$  som skärningen mellan  $C_{CG}$  och  $C_{DB}$  (se även [4]). Förlängningen av  $BN$  skär  $FG$  i  $P$  och förlängningen av  $DN$  skär normalen till  $FG$  genom  $P$  i  $M$ , tvillingcirkelns medelpunkt. Tvillingcirkeln kan ritas. Konstruktionen av den andra tvillingcirkeln genomförs analogt med hjälp av den magiska cirkeln  $C_{BG}$ . För ett bevis av konstruktionens giltighet hänvisas till [5]



Figur 6: Konstruktion av en tvillingcirkel i arbelos.

**3 Ett tangeringsproblem**

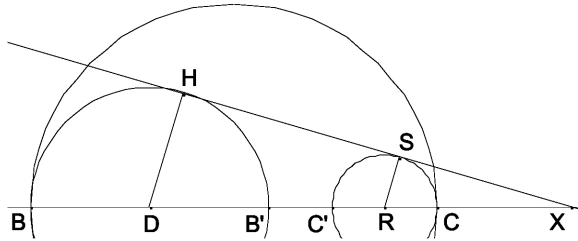
Konstruktioner och observationer som de som presenteras i denna artikel kan med fördel göras med hjälp av så kallade dynamiska geometriprogram som funnits på marknaden sedan 1980-talet, dvs. dataprogram där man kan rita och ”dra” i geometriska figurer för att undersöka deras egenskaper (se t.ex. [6]). En sådan observation är att om den gemensamma tangenten till cirkelarna  $C_{DB}$  och  $C_{RC}$  i arbelos skär  $BC$ :s förlängning i punkten  $X$ , så tangerar cirkeln med diameter  $AX$  de båda tvillingcirkelarna (se Figur 7). Vid en undersökning med ett dynamiskt geometripro-



Figur 7: Cirkeln med diameter  $AX$  tangerar tvillingcirkelarna i arbelos.

gram upptäcker man att denna tangeringsegenskap även gäller i en öppen arbelos. Jag formulerar detta som Sats 3.

Punkten X är den så kallade likställighetspunkten till cirklarna  $C_{DB}$  och  $C_{RC}$ . Figur 8 illustrerar denna punkt i en öppen arbelos. För att bestämma likställighetspunktens läge i detta fall är här  $r_1$  och  $r_2$  båda mellan 0 och 1 med  $r_1 + r_2 > 1$  men i övrigt oberoende av varandra. Detta innebär att båda fallen med de mindre cirklarna enligt Figur 1 är möjliga och att punkten X ligger till höger om cirklarna.



Figur 8: Likställighetspunkten X till cirklarna i en öppen arbelos.

**Lemma 3.** För likställighetspunkten X i Figur 8 är  $BX = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2 - 1}$  där  $r_1$  och  $r_2$  båda är mellan 0 och 1 och  $r_1 + r_2 > 1$ .

*Bevis.* Låt  $CX = x$ . Likformigheten av trianglarna RXS och DXH ger att  $\frac{(1-r_2)/2}{r_1/2} = \frac{x+(1-r_2)/2}{x+1-r_1/2}$ , som direkt ger resultatet då  $BX = 1 + x$ .  $\square$

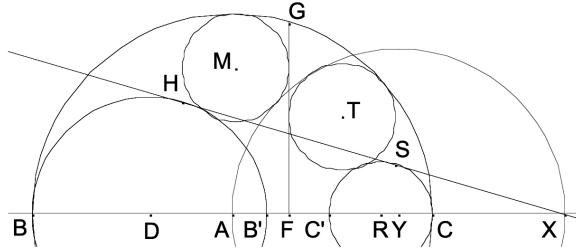
Då likställighetspunkten lätt kan konstrueras<sup>2</sup> kan den användas för att dra den gemensamma tangenten till cirklarna  $C_{DB}$  och  $C_{RC}$ . Med hjälp av dessa tangeringspunkter kan potenslinjen konstrueras då den måste passera mittpunkten mellan dessa tangeringspunkter (se Figur 5).

**Sats 3.** Den gemensamma tangenten till cirklarna  $C_{DB}$  och  $C_{RC}$  i en öppen arbelos skär BC:s förlängning i punkten X. Cirkeln med diameter AX tangerar då båda tvillingcirklarna (se Figur 9, där FG ligger på potenslinjen till  $C_{DB}$  och  $C_{RC}$ ).

*Bevis.* I Appendix visas att följande formler ger tvillingcirklarnas medelpunkter  $(x_M, y_M)$  och  $(x_T, y_T)$ :

$$\begin{aligned} (x_M, y_M) &= \left( \frac{r_2(1+r_1)}{2(r_2+1-r_1)}, \frac{\sqrt{r_1 r_2(1-r_1)}}{r_2+1-r_1} \right) \\ (x_T, y_T) &= \left( \frac{r_2(3-r_1)}{2(r_2+1-r_1)}, \frac{\sqrt{r_2(1-r_2)(1-r_1)}}{r_2+1-r_1} \right) \end{aligned}$$

<sup>2</sup>Normalerna till BC genom D respektive R skär  $C_{DB}$  i  $P_1$  och  $C_{RC}$  i  $P_2$  (dvs på övre halv-cirklarna). Linjen genom  $P_1$  och  $P_2$  skär då BC:s förlängning i X. Det finns också andra enkla konstruktioner av potenslinjen.



Figur 9: Cirkeln  $C_{YX}$  tangerar tvillingcirkelarna vid potenslinjen i en öppen arbelos. (Y är mittpunkten på sträckan AX.)

För tvillingcirkelarnas radie visas även där att

$$r_M = r_T = \frac{r_2(1 - r_1)}{2(r_1 + r_2 - 1)}.$$

Av Lemma 3 följer att cirkeln  $C_{YX}$  har radien

$$r_Y = \frac{r_1 r_2}{2(r_1 + r_2 - 1)} - \frac{1}{4}$$

och att punkten Y därmed har  $x$ -koordinaten

$$x_Y = \frac{1}{4} + \frac{r_1 r_2}{2(r_1 + r_2 - 1)}.$$

Med hjälp av Pythagoras sats på trianglarna  $MM'Y$  och  $TT'Y$  (se Figur 10) följer nu Sats 3 om likheterna

$$y_M^2 + (x_Y - x_M)^2 = (r_y + r_M)^2$$

och

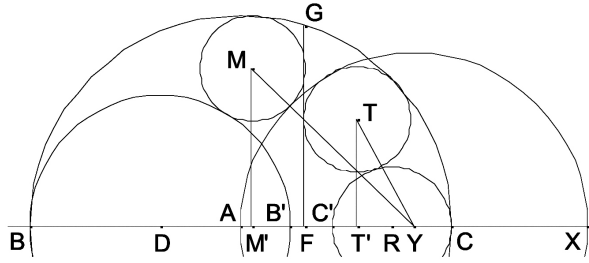
$$y_T^2 + (x_Y - x_T)^2 = (r_y - r_T)^2$$

är uppfyllda, vilket enkelt verifieras genom en direkt algebraisk kalkyl. □

Denna algebraiska kalkyl garanterar alltså resultatet att cirkeln  $C_{YX}$  tangerar båda tvillingcirkelarna men ger inte, som Descartes kanske skulle ha uttryckt det, någon insikt i varför det förhåller sig så. Kanske kan någon läsare hitta en rent geometrisk förklaring till detta resultat, dvs ett argument som inte bygger på algebraisk kalkyl.

Att tangeringsegenskapen i Sats 3 även gäller i en arbelos följer direkt genom att välja  $r_1 = r_2 = r$  med  $0 < r < 1$ . Att bevisa denna egenskap direkt i detta enklare fall med en arbelos kan vara en lämplig utmaning i en gymnasieklass.





Figur 10: Rätvinkliga trianglar  $MM'Y$  och  $TT'Y$  för beviset av Sats 3.

## Referenser

- [1] Ulin, B. *Pappus – en proportionernas jonglör*. Normat, 53 (2005), 13-20.
- [2] Ronaess, K. S. *Arkimedes' arbelos*. Normat, 55 (2007), 181-185.
- [3] Eide, M. *Tangerende sirklar og sirkelvektorer*. Normat, 56 (2008), 122-132.
- [4] Danneels, E. & van Lamoen, F. *Midcircles and the Arbelos*. *Forum Geometricorum*, 7 (2007), 53-65.
- [5] Bergsten, C. *Magic circles in the arbelos*. LiTH-MAT-R-2006-12, Department of Mathematics, Linköpings universitet.
- [6] Bergsten, C. *Euklides i nya kläder – om dynamiska geometriprogram*. *Medlemsutskicket, maj 2006*, Svenska matematikersamfundet.

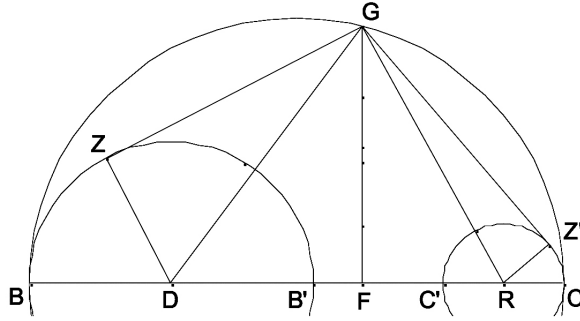
## Appendix

För att bestämma potenslinjens läge i den generaliserade arbelosfiguren används Pythagoras sats på de rätvinkliga trianglarna i Figur 11, där  $GZ = GZ' = d$  är lika långa tangenter från  $G$  till respektive cirkel. Då  $GD$  respektive  $GR$  är hypotenusa i två olika trianglar fås ekvationssystemet nedan med  $BC = 1$ ,  $BB' = r_1$ ,  $BF = a$ ,  $BC' = r_2$ , och att  $FG = \sqrt{a(1-a)}$ . Potenslinjens läge  $a$  kan där enkelt lösas ut till  $a = \frac{r_2}{r_2 + 1 - r_1}$ .

$$\begin{cases} \left(\frac{r_1}{2}\right)^2 + d^2 = \left(a - \frac{r_1}{2}\right)^2 + a(1-a) \\ \left(\frac{1-r_2}{2}\right)^2 + d^2 = \left(\frac{1+r_2}{2} - a\right)^2 + a(1-a) \end{cases}$$

För att bestämma tvillingcirkelnas diameter använder jag Pythagoras sats på de rätvinkliga trianglarna  $MM'D$  och  $MM'A$  respektive  $TT'R$  och  $TT'A$  i Figur 12. Detta ger direkt följande två ekvationssystem (det vänstra för den vänstra tvillingcirkeln, det högra för den högra). Här är  $y_M = MM'$  och  $y_T = TT'$ . Observera att samma ekvationssystem fås även då de mindre halvcirkelnas i den generaliserade arbelosfiguren skär varandra (som i Figur 4).

$$\begin{cases} \left(\frac{r_1}{2} + r_M\right)^2 = \left(a - r_M - \frac{r_1}{2}\right)^2 + y_M^2 \\ \left(\frac{1}{2} - r_M\right)^2 = \left(a - r_M - \frac{1}{2}\right)^2 + y_M^2 \end{cases} \quad \begin{cases} \left(\frac{1-r_2}{2} + r_T\right)^2 = \left(\frac{1+r_2}{2} - (a + r_T)\right)^2 + y_T^2 \\ \left(\frac{1}{2} - r_T\right)^2 = \left(a + r_T - \frac{1}{2}\right)^2 + y_T^2 \end{cases}$$



Figur 11: Potenslinjens läge.

Det vänstra ekvationssystemet ger att  $r_M = \frac{a(1-r_1)}{2}$  och det högra att  $r_T = \frac{r_2(1-a)}{2}$ . En insättning här av uttrycket för  $a$  ovan bekräftar att

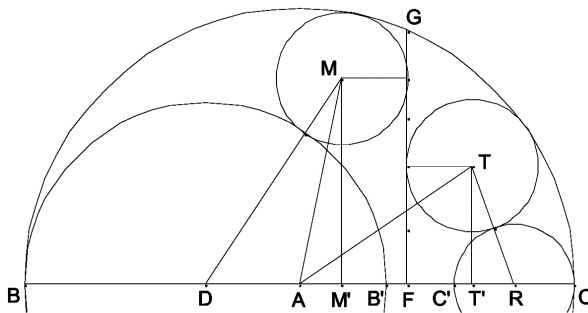
$$r_M = r_T = \frac{r_2(1 - r_1)}{2(r_2 + 1 - r_1)}.$$

Enligt ovan är  $MM' = r_1 a(1 - a)$ , vilket av symmetriskäl ger  $TT' = a(1 - a)(1 - r_2)$ . Medelpunkten M för den vänstra tvillingcirkeln får därför koordinaterna

$$\left( \frac{r_2(1 + r_1)}{2(r_2 + 1 - r_1)}, \frac{\sqrt{r_1 r_2(1 - r_1)}}{r_2 + 1 - r_1} \right)$$

och T i den högra

$$\left( \frac{r_2(3 - r_1)}{2(r_2 + 1 - r_1)}, \frac{\sqrt{r_2(1 - r_2)(1 - r_1)}}{r_2 + 1 - r_1} \right).$$



Figur 12: Rätvinkliga trianglar för bestämning av tvillingcirkelnas radie.