Normat **57**:1, 34–39 (2009)

Uppgifter

Uppgifterna 516-518 är hämtade från olympiadtävlingar i Taiwan och Ryssland.

516. Bestäm alla par (x, y) av positiva tal som uppfyller

$$x^{y^2} = y^{x+2}.$$

517. Låt $a_1, a_2, \ldots, a_n$ vara positiva reella tal som uppfyller $\sum_{i=1}^n a_i = 1$ och låt s vara det största av talen

$$\frac{a_1}{1+a_1}, \quad \frac{a_2}{1+a_1+a_2}, \quad \ldots \quad , \frac{a_n}{1+a_1+\cdots+a_n}.$$

Vilket är det minsta möjliga värdet som s kan anta?

518. Höjden AD i en spetsvinklig triangel utgör diameter i en cirkel S som skär sidorna AB och AC i punkterna E resp. F. Tangenterna till cirkeln dras genom punkterna E och F. Visa att tangenterna skär varandra i en punkt som är belägen på den median till triangeln ABC som passerar genom A.

519. Låt p vara ett godtyckligt primtal. Visa att kongruensen $x^2+x+3 \equiv 0 \pmod p$ är lösbar om och endast om $x^2+x+25 \equiv 0 \pmod p$ är lösbar.

520. Varför fungerar det korttrick som Martin Gardner beskriver i detta nummer av Normat, s. 32-33?

Lösningar skickas senast 1 september 2009 till:
Dag Jonsson, dag@math.uu.se
Box 480
Uppsala universitet, Matematiska institutionen
SE-75106 Uppsala

Anm. Vi välkomnar givetvis lösningar även efter angivet datum så länge inga andra lösningar har presenterats i tidskriften.

Lösningar till tidigare uppgifter i Normat

509. (*Con Amore Problemgruppe, København, DK.*) Ethvert element i M kan fremstilles på formen

$$2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}7^{\delta}11^{\epsilon}\cdot K, \tag{1}$$

hvor $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon\in\{0,1\}$, og K er et kvadrattal. Vi kan derfor danne en afbildning f af M ind i mængden af ordnede 5-sæt, hvis komponenter alle tilhører $\{0,1\}$, ved for et element af formen (1) at sætte

$$f(2^{\alpha}3^{\beta}5^{\gamma}7^{\delta}11^{\epsilon}\cdot K)=(\alpha,\beta,\gamma,\delta,\epsilon).$$

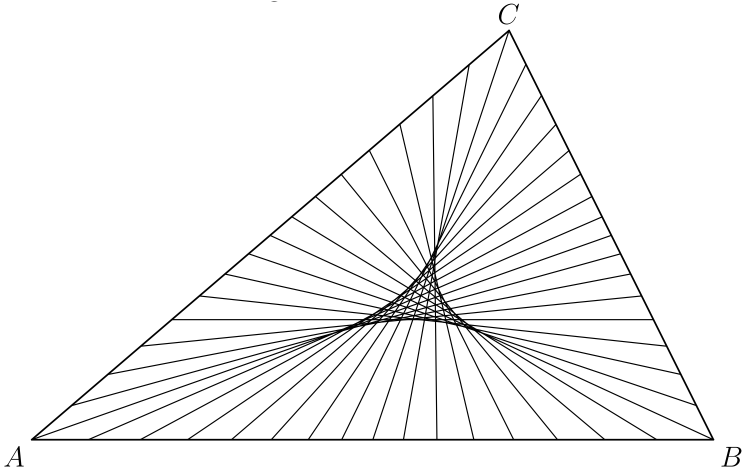
Da f ikke kan være injektiv (dispositionsmængden har jo kun 32 ($=2^5$) elementer), må der være mindst to elementer i M, som har samme f-billede. Produktet af to sådanne elementer har form

$$2^{2\alpha}3^{2\beta}5^{2\gamma}7^{2\delta}11^{2\epsilon}\cdot K_1K_2$$

og er følgelig et kvadrattal.

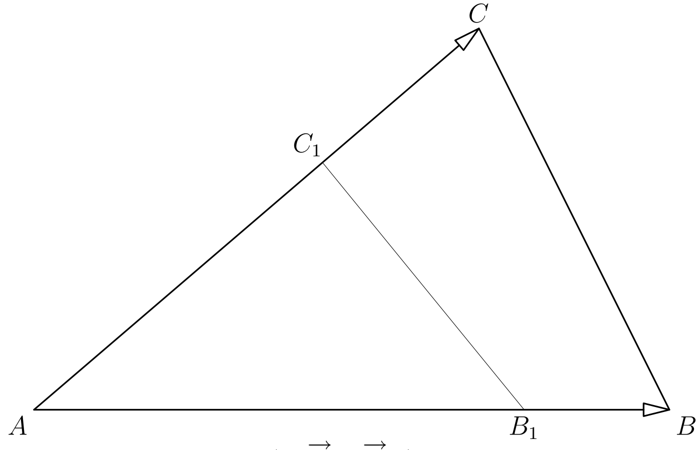
Det er klart, at ovenstående uden videre kan generaliseres til den situation, hvor der er givet en mængde P af n forskellige primtal og en mængde bestående af (mindst) 2^{n+1} naturlige tal, hvis primfaktorer alle tilhører P.

Tillægsopgave i Normat 55 (2007), side 191. (*Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK.*)
Det ses let, at hvis P er et punkt på en af trekantens sider eller udenfor trekanten, går der præcis én arealhalveringslinje gennem P. Figuren nedenfor viser nogle af dem.



Figur 1: Skaren af arealhalveringslinjer.

Arealhalveringslinjen gennem en af vinkelspidserne er åbenbart medianen til den modstående side, og enhver anden arealhalveringslinje skærer to af trekantens sider i indre punkter. Lad os betragte en sådan linje, som skærer AB og AC i de indre punkter B_1 og C_1, og altså $\overrightarrow{AB_1} = \lambda\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC_1} = \mu\overrightarrow{AC}$ med $0 < \lambda < 1$ og $0 < \mu < 1$.



Figur 2: Koordinatsystemet $(A, \vec{A}B, \vec{A}C)$ og en arealhalveringslinje B_1C_1.

Man viser let, at linjen B_1C_1 er en arealhalveringslinje, hvis og kun hvis $\lambda\mu = \frac{1}{2}$, og vi vil nu undersøge, hvor mange sådanne linjer, der går gennem et givet indre punkt af $\triangle ABC$. Dertil indfører vi koordinatsystemet med begyndelsespunkt A og grundvektorer $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

I dette koordinatsystem har arealhalveringslinjen gennem B_1 og C_1 ligningen

$$\alpha x + \beta y = 1 \tag{1}$$

med $\alpha = 1/\lambda$ og $\beta = 1/\mu$, og altså

$$\alpha > 1, \quad \beta > 1, \quad \text{og} \quad \alpha\beta = 2\,. \tag{2}$$

Betragt nu et vilkårligt indre punkt P i $\triangle ABC$. Dets koordinater (x, y) opfylder

$$x > 0, \quad y > 0, \quad \text{og} \quad x + y < 1\,,$$

og til hvert talpar (α, β), der opfylder (1) og (2) svarer der en arealhalveringslinje fra AB til AC gennem P. Af symmetrigrunde kan vi antage $x \geq y$, og af (1) og (2) får vi

$$x\alpha + \frac{2y}{\alpha} = 1 \quad \text{samt} \quad 1 < \alpha < 2\,. \tag{3}$$

Funktionen $f(\alpha) = x\alpha + \frac{2y}{\alpha}$, $\alpha > 0$, er aftagende for $0 < \alpha < \alpha_0 = \sqrt{2y/x}$ og voksende for $\alpha > \alpha_0$; f har minimum for $\alpha = \alpha_0$, og minimumsværdien er $f(\alpha_0) = 2\sqrt{2xy}$.

Vi observerer først, at $\alpha_0 \leq \sqrt{2} < 2$, og diskuterer derefter følgende tre tilfælde hver for sig:
(a) $xy > \frac{1}{8}$, (b) $xy = \frac{1}{8}$, og (c) $xy < \frac{1}{8}$.
(a) Hvis $xy > \frac{1}{8}$, er $f(\alpha) > 1$ for alle $\alpha > 0$, og (3) har ingen løsninger.
(b) Hvis $xy = \frac{1}{8}$, har ligningen $f(\alpha) = 1$ den ene løsning α_0, og α_0 opfylder (3), hvis og kun hvis $\alpha_0 > 1$, dvs. hvis og kun hvis $2y > x$.
(c) Hvis $xy < \frac{1}{8}$, har ligningen $f(\alpha) = 1$ to løsninger α_- og α_+, hvor betegnelserne vælges således, at $\alpha_- < \alpha_0 < \alpha_+$.

Idet vi udnytter, at $\alpha_0 < 2$ og $f(\alpha_0) < 1$, ses det, at α_- opfylder (3), hvis og kun hvis $\alpha_0 > 1$ og $f(1) > 1$, dvs hvis og kun hvis

$$2y > x \quad \text{og} \quad x + 2y > 1\,. \tag{4}$$

Hvis $\alpha_0 > 1$, altså $2y > x$, ses det, at α_+ opfylder (3), hvis og kun hvis $f(2) > 1$, dvs hvis og kun hvis

$$2x + y > 1\,. \tag{5}$$

Hvis derimod $\alpha_0 \leq 1$, altså $2y \leq x$, ses det, at α_+ opfylder (3), hvis og kun hvis $f(1) < 1$ og $f(2) > 1$, dvs hvis og kun hvis

$$x + 2y < 1 \quad \text{og} \quad 2x + y > 1\,. \tag{6}$$

Lad os sætte

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 |\ x > 0 \ \wedge\ y > 0 \ \wedge\ x + y < 1 \ \wedge\ x \geq y\}\,.$$

Af (b), (4), (5), og (6) følger, at der for $(x, y) \in H$ gælder:

α_0 opfylder (3), hvis og kun hvis (x, y) tilhører mængden

$$\begin{aligned} &\{(x, y) \in H|\ xy = \frac{1}{8} \ \wedge\ 2y > x\} \\ =&\{(x, y) \in H|\ y = 1/8x \ \wedge\ \sqrt{2}/4 \leq x < \frac{1}{2}\}\,; \end{aligned}$$

α_- eksisterer og opfylder (3), hvis og kun hvis (x, y) tilhører mængden

$$\{(x, y) \in H|\ xy < \tfrac{1}{8} \ \wedge\ 2y > x \ \wedge\ x + 2y > 1\}\,, \tag{7}$$

og α_+ eksisterer og opfylder (3), hvis og kun hvis (x, y) tilhører mængden

$$
\begin{aligned}
&\{(x,y) \in H|\ xy < \tfrac{1}{8} \wedge\ 2y > x\ \wedge\ 2x + y > 1\} \cup \\
&\{(x,y) \in H|\ xy < \tfrac{1}{8} \wedge\ 2y \leq x\ \wedge\ x + 2y < 1\ \wedge\ 2x + y > 1\} \\
= &\{(x,y) \in H|\ xy < \tfrac{1}{8} \wedge\ 2y > x\ \wedge\ 2x + y > 1\ \wedge\ x + 2y > 1\} \cup \\
&\{(x,y) \in H|\ xy < \tfrac{1}{8} \wedge\ 2y > x\ \wedge\ 2x + y > 1\ \wedge\ x + 2y = 1\} \cup \\
&\{(x,y) \in H|\ xy < \tfrac{1}{8} \wedge\ 2y > x\ \wedge\ 2x + y > 1\ \wedge\ x + 2y < 1\} \cup \\
&\{(x,y) \in H|\ xy < \frac{1}{8} \wedge\ 2y \leq x\ \wedge\ x + 2y < 1\ \wedge\ 2x + y > 1\} \\
(8) \qquad = &\{(x,y) \in H|\ xy < \tfrac{1}{8} \wedge\ 2y > x\ \wedge\ x + 2y > 1\} \cup \\
&\{(x,y) \in H|\ y = (1-x)/2\ \wedge \tfrac{1}{3} < x < \frac{1}{2}\} \cup \\
(9) \qquad &\{(x,y) \in H|\ 2x + y > 1\ \wedge\ x + 2y < 1\}\,,
\end{aligned}
$$

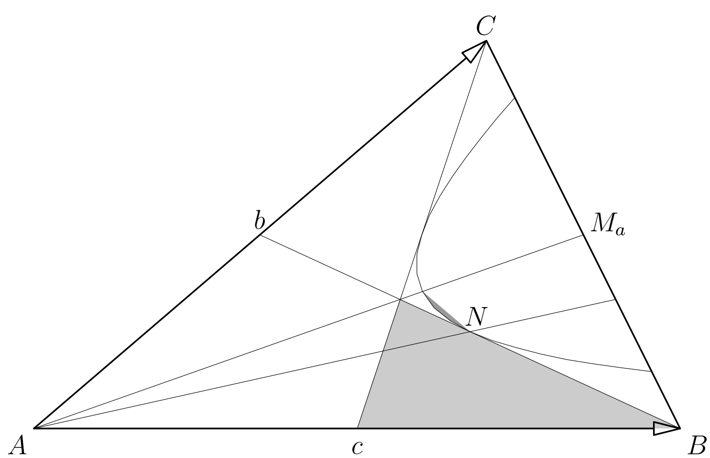
hvor vi har udnyttet, at der for $(x, y) \in H$ gælder
$x \geq y \wedge x + 2y > 1 \Rightarrow 2x + y = (x + 2y) + (x - y) > 1\,,$
$x < 2y \wedge\ x + 2y = 1 \Rightarrow x < \tfrac{1}{2} \wedge\ xy = \tfrac{1}{2}x(1 - x) < \tfrac{1}{8}\,,$ samt
$x + 2y < 1 \Rightarrow xy < \tfrac{1}{8}\,.$

I Figur 3 er mængden bestemt ved (7) = (8) markeret med mørkegråt, og mængden (9) med lysegråt. Endvidere er vist medianerne

$$m_a\ :\ y = x\,,\quad m_b\ :\ x + 2y = 1\,,\quad m_c\ :\ 2x + y = 1\,,$$

samt linjen $y = x/2$, der går gennem midtpunktet N af medianen m_b.

Kurven med ligningen $xy = \tfrac{1}{8}$ er en hyperbel med A som centrum og linjerne AB og AC som asymptoter. Den går gennem N, og m_b er dens tangent i N. Hyperblen går iøvrigt også gennem midtpunktet for medianen m_c.



Figur 3: Mængden af punkter i $\triangle ABM_a$, hvorigennem der går mindst én arealhalveringlinje fra b til c.

Lad D betegne den lukkede kurve bestående af tre hyperbelbuer med hhv A, B, og C som centrer og trekantsidernes forlængelser som asymptoter, og gående fra medianmidtpunkt til medianmidtpunkt.

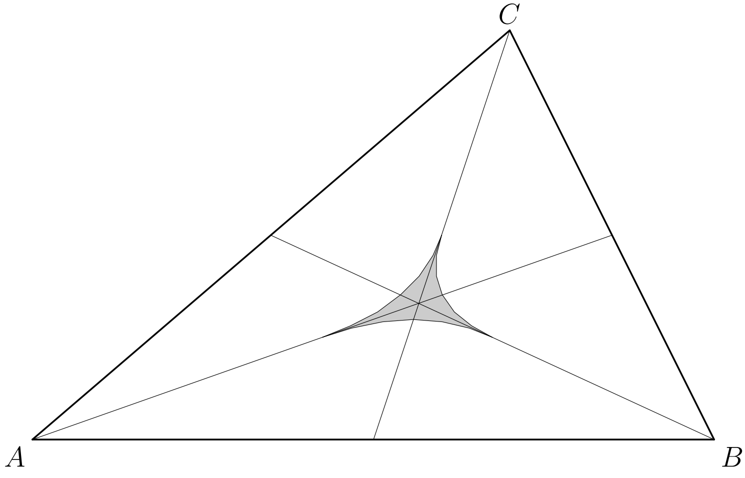
Kombinerer vi det foregående med de udsagn,vi får ved at permutere A, B og C, får vi, idet vi også bruger, at medianerne er arealhalveringslinjer:

Gennem hvert indre punkt i området begrænset af D går der tre arealhalveringslinjer. Området er markeret med gråt i Figur 4.

Gennem hvert indre punkt af de tre hyperbelbuer går der to arealhalveringslinjer, hvoraf den ene er tangent til hyperblen.

Gennem alle andre punkter i $\triangle ABC$ går der én arealhalveringslinje. Dette gælder specielt medianmidtpunkterne.

Det bemærkes, at kurven D er indhyllingskurve for skaren af arealhalveringslinjer.



Figur 4: Mængden af punkter i $\triangle ABC$, hvorigennem der går mindst to arealhalveringlinjer.

(Även löst av *Peter Kirkegaard, Gentofte, DK*)