Normat **57**:2, 90–95 (2009)

Uppgifter

Uppgifterna 521, 522, 525 och 526 är hämtade från olympiadtävlingar i Ryssland, Vietnam och Japan.

521. Olikheten $\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \geq 2$ är uppfylld för vinklarna α, β och γ. Visa att $\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \sqrt{5}$.

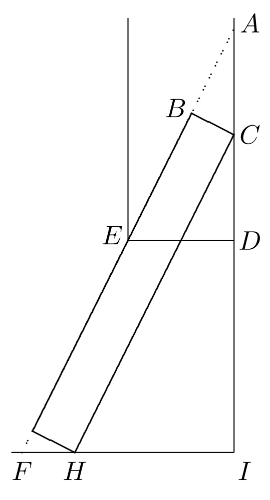
522. För tre icke-negativa reella tal a, b, c gäller att $ab + bc + ca + abc = 4$. Visa att

$$a + b + c \geq ab + bc + ca.$$

När inträffar likhet?

523. Låt a, m, n vara positiva heltal med $a > 1$. Antag att $a^m + 1$ är en delare till $a^n + 1$. Visa att m då måste vara en delare till n.

524. (Föreslaget av *Kent Holing, Trondheim, NO*) En del av en gammel prisoppgave i 1732 fra det kjente *Ladies' Diary* lyder som følger: Bestem den lengste sylindriske pålen med diameter $|BC| = 1$ fot som akkurat får plass oppe i en pipe med en kvadratisk åpning med side $|DE| = 4$ fot og som er $|DI| = 8$ fot over golvet. Se vedlagt figur! Vi generaliserer: Karakteriser alle slike problem der $|DE|$, $|DI|$, $|AF|$, $|CH|$ og $|BC|$ er heltallig! (Hint: Se løsning til oppgave 404b) i hefte 1 av Normat 2003, side 36.)



525. Låt n vara ett givet positivt heltal. Betrakta en permutation $(a_1, a_2, \dots, a_{2n})$ av heltalen $1, 2, \dots, 2n$ sådan att talen $|a_{i+1} - a_i|$ för $i = 1, 2, \dots, 2n-1$ alla är olika.
Visa att $a_1 - a_{2n} = n$ om och endast om $1 \leq a_{2k} \leq n$ för varje $k = 1, 2, \dots, n$.

526. Låt $\mathbb{Q}$ vara mängden av rationella tal. Betrakta en funktion $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ som uppfyller följande tre villkor:
1) $f(0) = 2$, $f(1) = 3$;
2) För alla rationella tal x och alla heltal n gäller

$$f(x+n) - f(x) = n\big(f(x+1) - f(x)\big);$$

3) För alla rationella tal $x \neq 0$ är $f(x) = f(\frac{1}{x})$.
Bestäm alla rationella tal x för vilka $f(x) = 2009$.

Lösningar skickas senast 15 december 2009 till:
Dag Jonsson, dag@math.uu.se
Box 480
Uppsala universitet, Matematiska institutionen
SE-75106 Uppsala

Anm. Vi välkomnar givetvis lösningar även efter angivet datum så länge inga andra lösningar har presenterats i tidskriften.

Lösningar till tidigare uppgifter i Normat

512. (*Erik Hansen, Kalundborg, DK*) To snit (evt. ét) vil altid kunne dele perlekæden på den ønskede måde.
Vi tænker os perlekæden foldet sammen til en cirkel, hvor perlerne sidder ækvidistant. Cirklen deles af en diameter (med en pil), således at halvdelen af perlerne er i den højre halvdel af cirklen.
Antallet af røde perler i højre halvdel af cirklen er $r + h$. Antag at h ikke er nul. (Ellers snittes efter diameteren.) Hver gang diameteren drejes en vinkel på $\frac{\pi}{r+s}$ i positiv omløbsretning, glider en perle ud og en ny kommer ind i højre halvdel; h ændres derved med en af værdierne -1, 0 eller 1. Efter at have drejet diameteren en halv omgang er h-værdien det modsatte tal af det oprindelige. Undervejs har h altså været 0 mindst engang og i en sådan position snittes efter diameteren. Dermed er den ønskede deling opnået. (Också löst av *Hans Kaas Benner* och *Ebbe Thue Poulsen*)

513. (*Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK*) Da udtrykket $a^2 + b^2 + c^2 + 4abc$ er symmetrisk i a, b og c, kan vi antage, at betegnelserne er valgt, så

$$a \le b \le c\,. \tag{1}$$

Da a, b og c er sider i en trekant, er

$$c < a + b\,, \tag{2}$$

og endvidere er det givet, at

$$a + b + c = 1\,. \tag{3}$$

Af (1), (2) og (3) følger dels, at

$$3c \ge a + b + c = 1$$

og

$$2c < a + b + c = 1\,,$$

der giver

$$\tfrac{1}{3} \le c < \tfrac{1}{2} \tag{4}$$

og dels, at

$$2a \le a + b = 1 - c$$

og

$$a = 1 - b - c \ge 1 - 2c\,,$$

der giver

$$1 - 2c \le a \le \tfrac{1}{2}(1 - c)\,. \tag{5}$$

Vi sætter $f(a,b,c) = a^2 + b^2 + c^2 + 4abc$, og omskriver med brug af (3):

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &= (a+b)^2 + c^2 - 2ab(1-2c) \\ &= (1-c)^2 + c^2 - 2a(1-c-a)(1-2c)\,. \end{aligned} \tag{6}$$

For fastholdt $c < \frac{1}{2}$ er højre side af (6) et andengradspolynomium i a med minimum for $a = \frac{1}{2}(1-c)$. Heraf følger, at betragtet som funktion af a antager højre side af (6) sin største værdi på intervallet $[1-2c, \frac{1}{2}(1-c)]$ for $a = 1-2c$. Altså er, pga (4),

$$\begin{aligned} f(a,b,c) &\le (1-c)^2 + c^2 - 2(1-2c)^2 c \\ &= \tfrac{1}{2} + 2\left(c - \tfrac{1}{2}\right)^2 - 2(1-2c)^2 c \\ &= \tfrac{1}{2} + 2\left(c - \tfrac{1}{2}\right)^2 (1-4c) < \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

(Också löst av *Erik Hansen*, *Con Amore Problemgruppe* och *Kåre Vedøy*)
Anm. Såväl *Erik Hansen* som *Con Amore Problemgruppe* påpekar (och visar) att under förutsättningarna i uppgiften gäller

$$\tfrac{13}{27} \le a^2 + b^2 + c^2 + 4abc < \tfrac{1}{2}.$$

Detta ger oss anledning att formulera följande *tilläggsuppgift:*
Visa att det för en triangel med sidlängderna a, b, c och omkretsen 1 gäller att

$$a^2 + b^2 + c^2 + 4abc \ge \tfrac{13}{27}.$$

När inträffar likhet?

514. (*Con Amore Problemgruppe, København, DK*) Vi skriver λ på formen $\lambda = re^{i\theta}$, hvor det er givet, at $r \ge 1$. Ved indsættelse i polynomiet fås så, idet vi sætter $\varepsilon = e^{-i\theta}$:

$$r^n\varepsilon^{-n} + a_{n-1}r^{n-1}\varepsilon^{-(n-1)} + \cdots + a_1 r\varepsilon^{-1} + a_0 = 0, \tag{1}$$

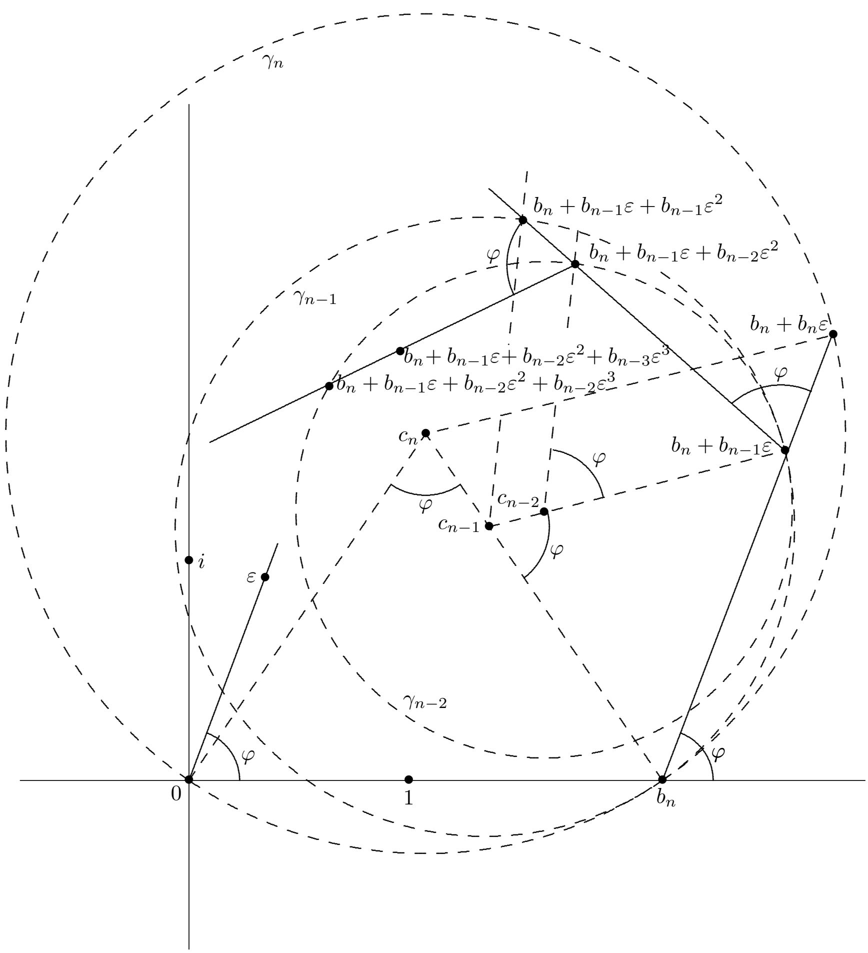
og videre, idet vi for korthedS skyld sætter $b_n = r^n, b_{n-1} = a_{n-1}r^{n-1}, \ldots, b_1 = a_1 r$ og $b_0 = a_0$ samt multiplicerer igennem med ε^n, at (1) er ensbetydende med

$$b_n + b_{n-1}\varepsilon + b_{n-2}\varepsilon^2 + \cdots + b_1\varepsilon^{n-1} + b_0\varepsilon^n = 0, \tag{2}$$

hvor

$$0 < b_0 \le b_1 \le \cdots \le b_{n-1} \le b_n. \tag{3}$$

Det fremgår let af (2), at ε ikke kan være 1, samt at hvis $\varepsilon = -1$, så må det gælde at $r = 1$ og n ulige, og dermed at $\lambda = -1$, og altså at $\lambda^{n+1} = 1$ som påstået.
Vi kan derfor nu forudsætte, at enhedsvektoren ε ligger överden reelle akse; thi med λ er jo også $\bar{\lambda}$ rod i polynomiet og kan derfor i givet fald betragtes i stedet for λ. Yderligere vil vi foreløbig forudsætte, at $\varepsilon^k \ne 1$ for $1 < k \le n$.
På nedenstående figur (hvor vi har benyttet φ som betegnelse for $-\theta$) har vi først fra punktet b_n afsat vektoren $b_{n-1}\varepsilon$.



Endepunktet for vektoren $b_n + b_{n-1}\varepsilon$ ligger ifølge (3) inden for eller på cirklen γ_n gennem punkterne 0, b_n og $b_n + b_n\varepsilon$. Fra punktet $b_n + b_{n-1}\varepsilon$ afsættes derefter vektoren $b_{n-2}\varepsilon^2$. Endepunktet for vektoren $b_n + b_{n-1}\varepsilon + b_{n-2}\varepsilon^2$ ligger tydeligvis inden for eller på cirklen γ_{n-1} gennem punkterne b_n, $b_n + b_{n-1}\varepsilon$ og $b_n + b_{n-1}\varepsilon + b_{n-1}\varepsilon^2$, som let ses att røre γ_n i b_n. Fra punktet $b_n + b_{n-1}\varepsilon + b_{n-2}\varepsilon^2$ afsættes derefter vektoren $b_{n-3}\varepsilon^3$. Endepunktet for vektoren $b_n + b_{n-1}\varepsilon + b_{n-2}\varepsilon^2 + b_{n-3}\varepsilon^3$ ligger tydeligvis inden for eller på cirklen γ_{n-2} gennem punkterne $b_n + b_{n-1}\varepsilon$, $b_n + b_{n-1}\varepsilon + b_{n-2}\varepsilon^2$ og $b_n + b_{n-1}\varepsilon + b_{n-2}\varepsilon^2 + b_{n-2}\varepsilon^3$, som let ses att røre γ_{n-1} i $b_n + b_{n-1}\varepsilon$. På den måde fortsættes, indtil vi har afsat vektoren

$$b_n + b_{n-1}\varepsilon + b_{n-2}\varepsilon^2 + b_{n-3}\varepsilon^3 + \cdots + b_1\varepsilon^{n-1} + b_0\varepsilon^n. \tag{4}$$

For cirklerne $\gamma_n, \gamma_{n-1}, \gamma_{n-2}, \ldots, \gamma_1, \gamma_0$ fremgår af ovenstående, at enhver af dem er indeholdt i den foregående, samt at γ_0 går gennem punkterne $b_n + b_{n-1}\varepsilon + b_{n-2}\varepsilon^2 + b_{n-3}\varepsilon^3 + \cdots + b_1\varepsilon^{n-1}$, $b_n + b_{n-1}\varepsilon + b_{n-2}\varepsilon^2 + b_{n-3}\varepsilon^3 + \cdots + b_1\varepsilon^{n-1} + b_0\varepsilon^n$ og $b_n + b_{n-1}\varepsilon + b_{n-2}\varepsilon^2 + b_{n-3}\varepsilon^3 + \cdots + b_1\varepsilon^{n-1} + b_0\varepsilon^n + b_0\varepsilon^{n+1}$, rører γ_1 i det første af de nævnte punkter, og hvor det næste punkt netop er (4). Det følger heraf, at (4) er 0, hvis og kun hvis det gælder at

$$b_n = b_{n-1} = b_{n-2} = \cdots = b_1 = b_0. \tag{5}$$

Idet $r_n = b_n = b_{n-1} = a_{n-1}r^{n-1}$ medfører, at $r = a_{n-1}$, og da $r \geq 1$ og $a_{n-1} \leq 1$, må disse to tal begge være 1; og altså må det gælde, at $\lambda = \varepsilon^{-1}$. Ved bortforkortning af b_n i (2) samt multiplikation med λ^n følger derfor, at

$$0 = \lambda^n + \lambda^{n-1} + \cdots + \lambda^2 + \lambda + 1 = \frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1},$$

og dermed, at $\lambda^{n+1} = 1$ også gælder i den her betragtede situation.
Tilbage står det tilfælde, hvor det for et vist naturligt tal k med $1 < k \leq n$ gælder, at $\varepsilon^k = 1$. Lad da d være det mindste sådanne naturlige tal. Vi godtgør først ganske som ovenfor, at $r = 1$, og videre at $b_n = b_{n-1} = \cdots = b_{n-d+1}$; thi i modsat fald "foregår alt det følgende"inden for γ_n, muligvis bortset fra et fra 0 forskelligt punkt, dvs. (4) kan ikke være 0. Det gælder derfor at

$$b_n + b_{n-1}\varepsilon + \cdots + b_{n-d+1}\varepsilon^{d-1} = b_n \cdot (1 + \varepsilon + \cdots + \varepsilon^{d-1}) = b_n \cdot \frac{\varepsilon^d - 1}{\varepsilon - 1} = 0,$$

og følgelig ved benyttelse af dette i (2) samt bortforkortning af ε^d at

$$b_{n-d} + b_{n-d-1}\varepsilon + b_{n-d-2}\varepsilon^2 + \cdots + b_1\varepsilon^{n-d-1} + b_0\varepsilon^{n-d} = 0.$$

Ved gentagelse af dette argument et vist antal gange fås sluttelig, at det for et naturligt tal r med $1 \leq r \leq d$ gælder at

$$0 = b_{r-1} + b_{r-2}\varepsilon + \cdots + b_1\varepsilon^{r-2} + b_0\varepsilon^{r-1} = b_{r-1} \cdot (1 + \varepsilon + \cdots + \varepsilon^{r-1}) = b_{r-1} \cdot \frac{\varepsilon^r - 1}{\varepsilon - 1},$$

hvoraf det følger at $\varepsilon^r = 1$, og altså ifølge valget af d at $r = d$. Hermed har vi godtgjort, at der findes et naturligt tal m sådan at $md = n + 1$, og følgelig at

$$\lambda^{n+1} = \varepsilon^{-(n+1)} = (\varepsilon^d)^{-m} = 1.$$