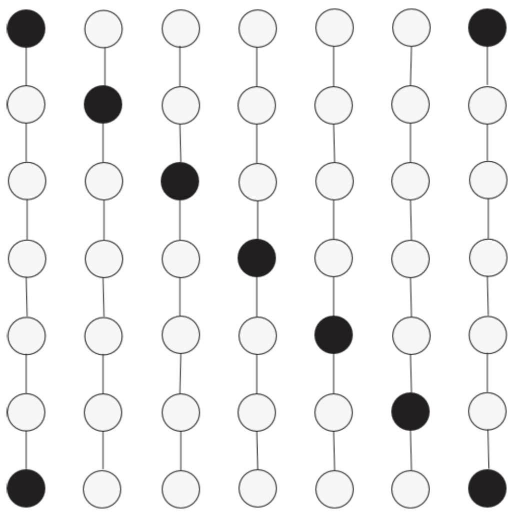
Normat **57**:4, 170–172 (2009)

Et kombinatorisk kuriosum

Olav Gebhardt [a] *and Marius Overholt* [b]

[a]Marikåpeveien 24, 9100 Kvaløysletta
[b]Institutt for Matematikk og Statistikk
Universitetet i Tromsø, 9037 Tromsø
marius.overholt@uit.no

Vi tenker oss n perlekjeder, satt sammen av sorte og hvite perler. Alle kjedene har lengde k. Forutsett at hvert par av kjeder stemmer overens i farge minst $m \geq 0$ flere steder enn de ikke stemmer overens. (Kjedene er lagt parallelle på et bord). Forutsett også at i hver tverrad er det høyst d flere perler av en farge enn av den andre. Eksempelet under har $n = 7$, $k = 7$, $m = 1$ og $d = 5$.



Prøving og feiling med små n og k indikerer at det ikke er så lett å finne ikketrivielle mønstre av dette slaget. Derfor bør vi kunne utlede restriksjoner på n, m, k og d som utelukker eksistens. Å bevise restriksjonen

$$mn^2 + (k - m)n \leq kd^2$$

er en oppgave som har en viss didaktisk interesse, fordi den kan løses på to helt forskjellige måter; ved et kombinatorisk telleresonnement eller ved enkel lineæralgebra.

I det kombinatoriske beviset starter vi med å feste oppmerksomheten på et vilkårlig valgt par av perlekjeder. Betegn antall overenstemmelser for paret med a; da er antall uoverensstemmelser lik $k - a$. Etter forutsetning er $a - (k - a) \geq m$ så $a \geq$

$(m+k)\ \ 2$. Siden antall par av kjeder som kan dannes er lik binomialkoe sienten $n(n-1)\ \ 2$ vil det totale antall overensstemmelser for alle par av kjeder være større enn eller lik

$$\frac{n(n-1)}{2}\frac{m+k}{2}$$

Så flytter vi oppmerksomheten til tverradene. I en vilkårlig valgt tverrad betegner vi antall perler av den farge som det er flest av med s. Hvis det er like mange av hver farge, betegner s dette felles antallet. Antall perler av motsatt farge i den samme tverraden blir da $n-s$. Etter forutsetning er $s-(n-s) \leq d$ så $s \leq (n+d)\ \ 2$. Antall overensstemmelser i denne tverraden blir da

$$\frac{s(s-1)}{2}+\frac{(n-s)(n-s-1)}{2}=\frac{n^2-n}{2}-s(n-s)$$

Fordi $s \geq n\ \ 2$ så vokser dette uttrykket når s vokser, og oppnår sin største verdi når s antar sin største tillatte verdi, som er $s=(n+d)\ \ 2$. Innsetting gir da ulikheten

$$\frac{s(s-1)}{2}+\frac{(n-s)(n-s-1)}{2} \leq \frac{n^2+d^2-2n}{4}$$

hvor høyre side altså er det høyest mulige antall overensstemmelser mellom par av perler i en tverrad. Siden det er k tverrader, blir det totale antall overensstemmelser høyst lik $k(n^2+d^2-2n)\ \ 4$. Dermed følger ulikheten

$$\frac{n(n-1)}{2}\frac{m+k}{2} \leq k\frac{n^2+d^2-2n}{4}$$

som vi kan forenkle til $mn^2+(k-m)n \leq kd^2$.

I det andre beviset bruker vi prikkproduktet i $\mathbb{R}^k$. Vi skal utlede den ønskede restriksjonen fra en ulikhet i lineæralgebra: Hvis $\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_n$ er vektorer i $\mathbb{R}^k$ slik at $\mathbf{x}_i\ \mathbf{x}_j \geq \quad \mathbf{x}_i \quad \mathbf{x}_j$ for $1 \leq i\ \ j \leq n$ med en ikkenegativ konstant , så gjelder ulikheten

$$\mathbf{x}_1 + \quad + \mathbf{x}_n\ {}^2 \geq (1- \quad)(\ \mathbf{x}_1\ {}^2 + \quad + \ \mathbf{x}_n\ {}^2) + \quad (\ \mathbf{x}_1\ + \quad + \ \mathbf{x}_n\ )^2$$

Vi utsetter beviset for denne lineæralgebra-ulikheten og bruker den til å utlede restriksjonen ovenfor på nytt.

Perlekjedene representeres ved vektorer $\mathbf{x}_j \quad \mathbb{R}^k$ for $1 \leq j \leq n$. Komponentene i vektorene er lik 1 eller -1 etter som den tilsvarende perlen er sort eller hvit, respektive. Etter forutsetning er $\mathbf{x}_i\ \mathbf{x}_j \geq m$ for $1 \leq i\ \ j \leq n$. Siden $\ \mathbf{x}_i\ = \ \mathbf{x}_j\ = \ \overline{k}$ følger

$$\mathbf{x}_i\ \mathbf{x}_j \geq \quad \mathbf{x}_i \quad \mathbf{x}_j$$

med $\ = m\ \ k$. Videre er hver komponent til vektoren $\mathbf{x}_1 + \quad + \mathbf{x}_n$ lik overvekten av en farge over den andre i den tilsvarende tverraden, med positivt fortegn hvis det er overvekt av sorte perler, med negativt fortegn hvis det er overvekt av hvite perler. Etter forutsetning er da

$$\mathbf{x}_1 + \quad + \mathbf{x}_n\ {}^2 \leq kd^2$$

og dermed følger

$$\left(1-\frac{m}{k}\right)kn+\frac{m}{k}(n \quad \bar{k})^2 \le kd^2$$

ved innsetting i lineæralgebra-ulikheten ovenfor. Forenkling gir så den ønskede restriksjonen $mn^2+(k-m)n \le kd^2$.

Det står igjen å vise ulikheten som er brukt. Vi har

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1 + \quad + \mathbf{x}_n \;\;^2 &= \left(\sum_{1\le i\le n}\mathbf{x}_i\right)\left(\sum_{1\le j\le n}\mathbf{x}_j\right) = \sum_{1\le i,j\le n}\mathbf{x}_i\,\mathbf{x}_j \\
&= \;\mathbf{x}_1\;\;^2 + \quad + \;\mathbf{x}_n\;\;^2 + \sum_{i\neq j}\mathbf{x}_i\,\mathbf{x}_j \\
&\ge \;\mathbf{x}_1\;\;^2 + \quad + \;\mathbf{x}_n\;\;^2 + \sum_{i\neq j}\quad\mathbf{x}_i\quad\mathbf{x}_j \\
&= (1- \quad)(\;\mathbf{x}_1\;\;^2 + \quad + \;\mathbf{x}_n\;\;^2) + \quad(\;\mathbf{x}_1\; + \quad + \;\mathbf{x}_n\;)^2
\end{aligned}$$

ved velkjente regneregler for norm og prikkprodukt. Merk at hvis nesten er så stor som 1 så sier ulikheten at hvis alle vektorene $\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_n$ peker i nesten samme retning så er lengden til vektoren $\mathbf{x}_1 + \quad + \mathbf{x}_n$ nesten like stor som summen av lengdene til $\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_n$.