 Normat **57**:4, 180–182 (2009)

Oktahedergruppen och dess generaliseringar I

Ulf Persson.

Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola och
Göteborgs Universitet
ulfp@chalmers.se

Betrakta alla ortogonala 3×3 matriser med endast heltalselement. Dessa är slutna under multiplikation, men även under invers, ty determinanten av en ortogonal matris är ju ± 1. Således utgör de dessutom en grupp (G). Eftersom normen (summan av kvadrater av elementen) av en rad eller kolonn är 1 för en ortogonal matris, är de enda möjligheterna för elementen att vara $\pm 1, 0$ således har vi endast ett ändligt antal möjligheter, och gruppen är följaktligen ändlig. Gör vi en mera ingående betraktelse inser vi att varje rad och varje kolonn innehåller precis ett element av formen ± 1. Omvänt medför detta även att rader och kolonner kommer att vara ortogonala och därmed matrisen automatiskt ortogonal. En matris med egenskapen att varje rad och kolonn innehåller exakt en etta och resten nollor, kallas som bekant en permutationsmatris. En sådan uppkommer som basbytesmatris vid en permutation av ordningen av givna baselement. Dessa utgör en delgrupp S till G isomorf med den symmetriska gruppen S_3 av permutationer av tre element. Den har som bekant sex element. Elementen i G fås genom att ge godtyckliga tecken till ettorna i en permutationsmatris. Detta kan uppenbarligen göras på $2^3 = 8$ olika sätt. Således är ordningen $|G|$ på gruppen lika med $8 \times 6 = 48$. Vi kan gå vidare. G innehåller en annan naturlig delgrupp, nämligen diagonalmatriserna. Dessa utgör en abelsk delgrupp D av formen $\mathbf{Z}_2^3$ (som förväntat med åtta element). Vi inser lätt att D och S är disjunkta i den meningen att snittet bara består av identitetsmatrisen. Permutations matriser opererar på diagonalmatriser via konjugering. Konjugatet med en permutationsmatris är helt enkelt motsvarande permutation av diagonalelementen. Detta kan antigen lätt verifieras för hand, eller genom att inse att konjugering med permutationsmatriser motsvaras av ett basbyte via omordning av baselementen. Speciellt inser vi att D är en normal undergrupp, och att kvoten G/D är isomorf med S. Man säger att G är en halv-direkt produkt av grupperna D och S och gruppstrukturen är given av konjugatverkan av S på D.

I allmänhet låt A verka på gruppen B genom en homomorfism $\phi : A \to Aut(B)$ där $Aut(B)$ utgöres av gruppautomorfismerna av B. Vi 'låtsas' sedan att $aba^{-1} = \phi(a)(b)$. Detta tillåter oss att vända på ab via $ab = \phi(a)(b)a$ och som konsekvens att forma produkten av två produkter a_1b_1 och a_2b_2 via

$$(a_1b_1)(a_2b_2) = a_1(b_1a_2)b_2 = a_1(a_2\phi(a_2^{-1}))b_2 = (a_1a_2)(\phi(a_2^{-1})b_2)$$

Den läsare som är obekant med detta kan lätt formalisera förfarandet genom att introducera en lämplig gruppprodukt på $A \times B$

Vi har även en naturlig tolkning av homomorfin $G \to S$ genom att reducera varje element modulo två. (D.v.s. avbilda nollor på nollor och ± 1 på 1). Denna avbildning visar sig enkelt vara en homomorfi. Kärnan till den blir även den D vilket ögonblickligen inses. Vidare kan vi betrakta delgruppen G_0 av matriser med determinanten 1 i G. Genom avbildningen $G \to \{1, -1\}$ given av determinanten inser vi att denna består av hälften av elementen. Den har således ordningen $48/2 = 24$. Vidare har vi på samma sätt som tidigare en homomorfi $G_0 \to S_3$, men i detta fall består kärnan av den hälft av matriserna i D som har determinant 1. Dessa utgör en delgrupp D_0 av D av formen $\mathbf{Z_2^2}$, d.v.s. Kleins fyrgrupp. Frågan är nu om G_0 också utgör en halv-direkt produkt av i detta fall de naturliga faktorerna D_0 och S_3. En permutationsmatris har determinanten 1 precis när den motsvaras av en jämn permutation. S_3 har således ingen naturlig inklusion i G_0. Genom att ändra en etta till minus ett kan vi förvandla en permutationsmatris till en med determinanten ett. Frågan är om vi kan göra detta på ett konsekvent sätt, d.v.s. slutet under multiplikation. De udda permutationerna i S_3 utgöres av involutionerna, d.v.s. de med exakt en fix-punkt. Detta motsvaras av permutationsmatriser med precis en etta på diagonalen. Det är frestande att utbyta denna etta mot en minus etta. Men kommer de att vara slutna under multiplikation och bilda en delgrupp S? Ett ögonblicks eftertanke visar att vid multiplikation från vänster (höger) multiplikation med minus ett endast kommer att påverka en enda rad (kolonn) och därmed inses att inga problem uppstår. G_0 är således den halv-enkla produkten mellan S_3 och Kleins fyrgrupp, där S_3 opererar på de tre icke-triviala elementen i den senare via permutation. G_0 kan i själva verket identifieras med den symmetriska gruppen S_4.

Allt vad vi har gjort, med undantaget av det allra sista kan direkt generaliseras till godtycklig dimension. Om dimensionen är n betraktar vi S_n och $\mathbf{Z_2^n}$ istället, och G består nu av $2^n n!$ element och G_0 följaktligen av $2^{n-1}n!$ element. I fallet $n = 2$ har G åtta element och är isomorf med den dihedrala gruppen D_4, medan G_0 blir isomorf med den cykliska gruppen $\mathbf{Z_4}$. Det är lätt att skriva ner samtliga element och notera att G utgör alla isomorfier av kvadraten med hörnen $(\pm 1, \pm 1)$ inklusive alla speglingar, medan G_0 utgöres av de fyra vridningarna. Detta kan generaliseras till godtyckliga hyperkuber $(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1)$ med 2^n hörn och dess duala hyperoktahedrar vars $2n$ hörn ges av basvektorerna $\pm e_k$. I denna första del skall vi kortfattat återknyta bekantskapen med fallet $n = 3$ - oktahedergruppen, för att i nästa del, betrakta i detalj fallet $n = 4$ och en grupp med 192 element.

Oktahedergruppen

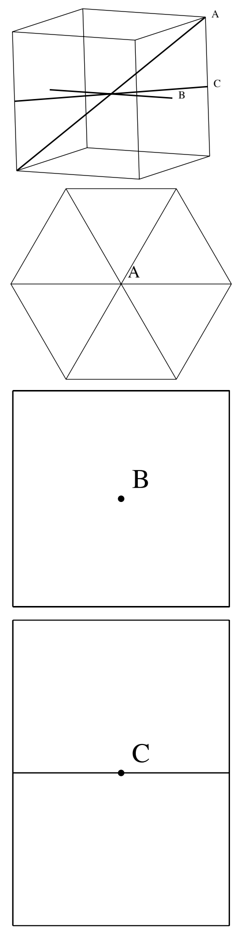
Givet en matris A vill vi gärna skriva ner dess karaktäristiska ekvation. Om A är ortogonal med egenvärde λ gäller $|\lambda| = 1$. Vidare om A är reell följer att egenvärdena är slutna under konjugering. Vi inser då att inversen till en rot är en rot ur vilket följer att ekvationen är palindromisk (byt ut x mot $1/x$!). Speciellt om $\det(A) = 1$ följer att ekvationen är av formen $X^3 - aX^2 + aX - 1 = 0$ där a är spåret av A. (Om $\det(A) = -1$ har vi istället $X^3 - aX^2 - aX + 1 = 0$) Vi kan ställa upp följande tabell för elementen i G_0.

S_3-permutation	antal	spår	ekvation	θ	ordning	S_4-permutation
()	1	3	$x^3 - 3x^2 + 3x - 1$	0	1	()
	3	-1	$x^3 + x^2 - x - 1$	π	2	(ab)
(ab)	6	1	$x^3 - x^2 + x - 1$	$\pm\pi/2$	4	(abcd)
	6	-1	$x^3 + x^2 - x - 1$	π	2	(ab)(cd)
(abc)	8	0	$x^3 - 1$	$\pm 2\pi/3$	3	(abc)

En ortogonal 3×3 matris med determinanten 1 kan skrivas under formen

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

och har spåret $1 + 2\cos\theta$ vilket ger vridningvinkeln i tabellen. Dessa kan ses som symmetrier av kuben (och dess dual -oktahedern). De åtta elementen av ordning tre, korresponderar mot de fyra rymd-diagonalerna som rotationsaxlar, var och en korresponderar mot de två vridningarna $\pm 2\pi/3$. På liknande sätt hittar vi sex element av ordning fyra som korresponderar mot de tre axlarna genom motstående sidors mittpunkter; medan elementen av ordning två är av två olika typer. Dels tre stycken givna av rotationer givna av de föregående axlarna, och sex stycken korresponderande mot de axlar som går genom motstående kanters mitt-punkter. (En liknande klassificering via oktahedern göres lätt.)



Presentationen av oktahedergruppen såsom S_4 göres genom att betrakta permutationen av de fyra rymd-diagonalerna, och S_3 genom att betrakta verkan på de tre axlarna genom motstående sidors mittpunkter (basvektorerna). Kärnan av denna avbildning göres av diagonalgruppen D_0 som består precis av elementen i de två översta raderna i tabellen, och motsvaras av π-vridningar av dessa axlar (eller ekvivalent speglingar i dessa).

Oktaheder gruppen innehåller en intressant delgrupp av index två, nämligen den som består av matriser med ett jämnt antal -1:or. Två olika tetrahedrar kan inskrivas i en kub, genom att utnyttja de tolv sido-diagonalerna. Denna delgrupp bevarar var och en av dem, och dess sidoklass permuterar dem. Delgruppen benämnes tetrahedergruppen och utgöres av alla element i tabellen utom de mellersta raderna.

Slutligen den som är bekant med grupprepresentationer inser från tabellen ovan att representationen av S_4 är irreducibel $\left(1 \times 3^2 + 3 \times (-1)^2 + 6 \times 1^2 + 6 \times (-1)^2 + 8 \times 0^2 = 24\right)$.