Uppgifter

527. (*Ole Somdalen, Oslo, NO.*) Gitt en likebeint trekant ABC, der $AC = BC$, og en sirkel s_1 som tangerer AB, AC og BC. La det videre være gitt sirkler s_i slik at s_i tangerer AC, BC og s_{i-1} for $i \geq 2$.
Vis at radiene i sirklene s_i danner en geometrisk tallfølge.

528. Betrakta en likbent triangel ABC med $|AB| = |AC|$ och låt AD, BE och CF vara triangelns bisektriser med D, E och F på BC, AC och AB resp. Visa att $\cos(\angle EDF) < \frac{3}{5}$.

529. För ett heltal $n > 1$ och ett primtal p gäller att n är en delare till $p - 1$ och p en delare till $n^3 - 1$. Visa att $4p - 3$ är en heltalskvadrat.

530. (*Kent Holing, Trondheim, NO*) Polynomligningene i denne oppgaven antas å ha heltallskoeffisienter og være moniske og irredusible. La x_1 og x_2 være to forskjellige røtter av en slik av grad minst 3.

a) Vis at for tredjegradsligningen er verken $x_1 + x_2$ eller $x_1 - x_2$ (klassisk) konstruerbar.

Gjelder det tilsvarende som i a) for

b) fjerdegradsligningen,

c) femtegradsligningen og

d) sjettegradsligningen?

531. Låt A_n beteckna mängden av ord av längd n bildade av bokstäverna a, e och t, men med inskränkningen att två vokaler av samma slag inte får förekomma intill varandra (för $n = 3$ är t.ex. *ett*, *tea* och *ata* tillåtna, men inte *tee* och *aat*). Låt vidare B_n beteckna mängden av ord av längd n bildade av bokstäverna a, e och t, men med inskränkningen att det bland tre bokstäver i följd bara får förekomma två olika bokstäver (dvs bokstavsföljden *aet* jämte dess permutationer får inte finnas någonstans i ordet). Visa att $|B_{n+1}| = 3|A_n|$ för alla $n \geq 1$.

(Uppgifterna 528, 529, 531 är olympiadproblem hämtade från tävlingar i Estland, Polen och Rumänien.)

Lösningar skickas senast 1 augusti 2010 till:
Dag Jonsson, dag@math.uu.se
Box 480
Uppsala universitet, Matematiska institutionen
SE-75106 Uppsala

Anm. Vi välkomnar givetvis lösningar även efter angivet datum så länge inga andra lösningar har presenterats i tidskriften.

Lösningar till tidigare uppgifter i Normat

506. All teori som brukes i løsningen er velkjent og finnes i lærebøker som David A. Cox *Galois Theory*, Wiley 2004 og Jean-Pierre Escofier: *Galois Theory*, Springer-Verlag 2001.

Vi innser at oppgaven følger hvis vi kan vise påstandene nedenfor. (Merk at 2) brukes til å vise at $R(y)$ er irredusibel i 3).)

1) Ligningene $Q(x) = 0$ og $R(y) = 0$ har samme Galois gruppe.

2) For $i \neq j$ og $3 \leq i, j \leq 5$ er $x_i - x_j$ aldri klassisk konstruerbar.

3) $R(y)$ er et monisk irredusibelt sjettegrads polynom med heltallskoeffisienter.

4) $R(y)$ faktoriserer fullstendig over $Q[r]$ hvis og bare hvis $|G| = 6$.

5) Med d og d_3 lik diskriminanten til henholdsvis $Q(x)$, og $q(x)$ er Galois-gruppen G til $Q(x) = 0$ lik S_3 hvis d er et kvadrattall; ellers er $G = Z_6$ hvis d_3 er et kvadrattall, og $G = D_6$ hvis ikke.

At 1) er riktig følger lett da ligningene har samme rotkropp. Videre, siden $q(x)$ er irredusibel, følger 2) av oppgave 529a) fra Normat (hefte 4, 2009). Dette er en direkte følge av at rotkroppen til en irredusibel tredjegradsligning er gitt ved $Q[x_i - x_j]$ for $x_i \neq x_j$ røtter av ligningen.

Vi viser så påstand 3): At $R(y)$ er et monisk polynom med heltallskoeffisienter kan vises direkte ut fra definisjonen av $R(y)$, men det enkleste er å innse at $R(y) = Res(p(t), q(y-t))$ der Res er den såkalte resultanten.[1] At $R(y)$ er et polynom i $Z[y]$ følger da av velkjente egenskaper til resultanten.

Hvorfor er $R(y)$ irredusibel?[2] Først, hvis det ikke er tilfelle, må $R(y)$ være produktet av to moniske irredusible kubiske polynomer med heltallskoeffisienter (hvorfor?). La (den samlede) koeffisienten foran y^2 i den irredusible kubiske faktoren som har y_1 som rot være lik C. Da er C heltallig hvis $R(y)$ er redusibel. Vi skal se at dette alltid gir en selvmotsigelse: For eksempel, hvis røttene i faktoren er y_1, y_2 og y_3, gir C heltallig at x_1 er heltallig, som ikke er mulig da $q_2(x)$ er irredusibel. Videre, hvis røttene i faktoren er y_1, y_2 og y_4, gir C heltallig at $x_3 - x_5$ er konstruerbar, som heller ikke er mulig i følge 2). Tilsvarende vil alle andre mulige kombinasjoner av røtter av denne faktoren gi enten at x_1 eller x_2 er heltallig eller at $x_i - x_j$ for $i \neq j$ og $3 \leq i, j \leq 5$ er konstruerbar, noe som ikke er tilfelle. Det overlates til leseren å fylle ut de manglende detaljer. Så $R(y)$ er irredusibel.

Videre, følger påstand 4) av standard Galois teori og 3) da det for irredusible polynomligninger av grad n med rasjonale koeffisienter og Galois gruppe G gjelder at $|G| = n$ hvis og bare hvis rotkroppen til ligningen er $Q[r]$ for r en vilkårlig rot. Dette er lett å vise: La ligningen være $f(x) = 0$ med E som rotkropp. Anta at $|G| = n$. Er $f(r) = 0$ har kroppsutvidelsen $Q[r]$ grad n over Q da $f(x)$ er irredusibel over Q. Nå er $Q \subsetneq Q[r] \subset E$, og da gir $[Q[r] : Q]\,[E : Q[r]] = [E : Q]$ at

[1] For en kortfattet innføring i begrepet resultanten til to polynomer, se http://mathworld.wolfram.com/Resultant.html.

[2] I det generelle tilfelle er ikke $Res(p(t), q(x-t))$ minimalpolynomet for $a + b$ for $p(x)$ og $q(x)$ minimalpolynomet for henholdsvis a og b. (Dette påpekes i referansen i forrige fotnote.) Dvs. at resultantpolynomet er ikke generelt irredusibelt. Derfor må det vises at $R(y)$ er irredusibel.

$[E : Q[r]] = 1$ da $[E : Q] = |G| = n$. Så, $Q[r]$ er rotkroppen til ligningen. Omvendt, hvis ligningen faktoriserer fullstendig over $Q[r]$ for en rot r, er $|G| = [Q[r] : Q] = n$.

For til slutt å vise påstand 5) trenger vi noe mer notasjon: La d_2 være lik diskriminanten til $p(x)$, og la rotkroppene til $Q(x)$, $p(x)$ og $q(x)$ være E, E_2 og E_3. De to siste er gitt ved $E_2 = Q[\sqrt{d_2}\,]$ og $E_3 = Q[\sqrt{d_3}\,][r]$ for r en vilkårlig rot av ligningen. Til slutt, lar vi Galois-gruppene til ligningene $Q(x) = 0$, $p(x) = 0$ og $q(x) = 0$ være G, G_2 og G_3.

For å komme videre trenger vi først å vise en hjelpesetning:

Observasjon

Hvis d er et kvadrattall så er $E = E_3$; hvis ikke så er $E_2 \cap E_3 = Q$.

Bevis

Da $d = d_2\, d_3\, Res(p, q)^2$; og $Res(p, q)$, d_2 og d_3 alle er forskjellig fra null, er d et kvadrattall hvis og bare hvis $d_2\, d_3$ er et kvadrattall. (Er $Res(p, q) = 0$ vil tredjegradsligningen $q(x) = 0$ ha en konstruerbar rot (x_1 eller x_2), noe som ikke er mulig da $q(x)$ er irredusibel.)

La $S = Q[\sqrt{d_3}\,]$, og merk at $S = E_2$ hvis og bare hvis $d_2\, d_3$ er et kvadrattall.

Først, for d et kvadrattall er $E_3 = S[r] = E_2[r]$. Siden r ikke er konstruerbar ($q(x)$ er irredusibel) er $E_2 \subsetneq E_2[r] = E_3$ så $E = E_3$.

Videre, hvis $E_2 \cap E_3 \neq Q$, så er $x = a + b\,\sqrt{d_2} = c_1 + c_2\, r + c_3\, r^2$ for a og b rasjonale tall og med c_1, c_2 og c_3 i S for et reelt eller komplekst tall x (hvorfor?). Nå er $b \neq 0$ (x er ikke rasjonal) og $c_2 = c_3 = 0$ (hvis ikke, er r konstruerbar). Men, da er $\sqrt{d_2} = (c_1 - a)/b \in S$. Så $d_2\, d_3$ er et kvadrattall, og derfor er d et kvadrattall. Dvs., hvis d ikke er et kvadrattall er $E_2 \cap E_3 = Q$, hvilket skulle bevises.

Så tilbake til påstand 5)!

Først, hvis d er et kvadrattall har vi $G = G_3 = S_3$ siden $E = E_3$ og d_3 ikke er et kvadrattall. (Husk at $d_2\, d_3$ er et kvadrattall, men at d_2 ikke er det.)

Sist, la d ikke være et kvadrattall slik at $E_2 \cap E_3 = Q$ og $G = G_2 \times G_3$. Nå er $G_2 = Z_2$ siden d_2 ikke er et kvadrattall. Hvis d_3 er et kvadrattall så er $G_3 = Z_3$, og derfor $G = Z_2 \times Z_3 = Z_6$. Og, endelig, hvis d_3 ikke er et kvadrattall, er $G_3 = S_3$ og $G = Z_2 \times S_3 = D_6$.

513. Tillägg. (se 2009:2) (*Sten Herlitz, Uppsala, SE*) Givet är att a, b, c är kantlängder i en triangel med omkrets 1. Med beteckningarna $b + c - a = 1 - 2a = x$, $1 - 2b = y$, $1 - 2c = z$ fås

$$\begin{aligned} 4(a^2 + b^2 + c^2) + 16abc &= (1-x)^2 + (1-y)^2 + (1-z)^2 + 2(1-x)(1-y)(1-z) \\ &= 3 + 2 - 4(x+y+z) + (x+y+z)^2 - 2xyz. \end{aligned}$$

Här är $x, y, z > 0$, $x+y+z = a+b+c = 1$ och $xyz \leq \frac{1}{27}$ enligt AM-GM-olikheten, vilket ger

$$(a^2 + b^2 + c^2) + 4abc \geq \tfrac{1}{4}(2 - \tfrac{2}{27}) = \tfrac{13}{27}.$$

Vi har likhet om och endast om $x = y = z = a = b = c = \frac{1}{3}$. (Som tidigare har nämnts har detta tillägg föreslagits och visats av *Erik Hansen* och *Con Amore Problemgruppe.*)

Lösningar till uppgifter i Normat 2009:1

516. (*Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK*) Det er klart, at $(x, y) = (1, 1)$ er en løsning til

$$x^{y^2} = y^{x+2}\,. \tag{1}$$

For enhver anden løsning er $x > 1$ og $y > 1$, og enhver primfaktor i x er også primfaktor i y og omvendt.
Lad nu p være en primfaktor i x og y. Så kan x og y skrives på formen

$$x = ap^{\alpha} \quad \text{hhv.} \quad y = bp^{\beta}\,,$$

hvor $\alpha \geq 1$, $\beta \geq 1$, og p ikke er divisor i a eller b.
På venstre side af (1) optræder p i potensen $y^2\alpha = b^2p^{2\beta}\alpha$, og på højre side i potensen $(x + 2)\beta = (ap^{\alpha} + 2)\beta$, hvoraf ses, at

$$b^2p^{2\beta}\alpha = (ap^{\alpha} + 2)\beta\,. \tag{2}$$

Antag først, at $p > 2$. Så går p ikke op i $ap^{\alpha} + 2$, og det følger af (2), at $p^{2\beta} \mid \beta$, hvilket er i modstrid med den elementære ulighed

$$p^n \geq 1 + n(p-1)\,. \tag{3}$$

Den eneste mulige primdivisor i x og y er altså $p = 2$, hvorefter $a = b = 1$, og (2) får udseendet

$$2^{2\beta}\alpha = (2^{\alpha} + 2)\beta = 2(2^{\alpha-1} + 1)\beta\,,$$

der er ensbetydende med

$$2^{2\beta-1}\alpha = (2^{\alpha-1} + 1)\beta\,. \tag{4}$$

Antag nu, at $\alpha > 1$. Så går 2 ikke op i $2^{\alpha-1}+1$, og det følger af (4), at $2^{2\beta-1} \mid \beta$, hvilket igen er i modstrid med (3).
Antag sluttelig, at $\alpha = 1$. Så får (4) udseendet

$$2^{2\beta-1} = 2\beta\,,$$

og det ses let, at denne ligning har den entydigt bestemte løsning $\beta = 1$.
Den givne ligning har altså løsningerne $(x,y) = (1,1)$ og $(x,y) = (2,2)$, og ikke andre. (Också löst av *Kåre Vedøy*)

517. (*Ebbe Thue Poulsen*) Hvis s er det største af tallene

$$\frac{a_1}{1+a_1},\quad \frac{a_2}{1+a_1+a_2},\quad \cdots \quad,\frac{a_n}{1+a_1+\cdots+a_n}\,,$$

er det klart, at $0 < s < 1$.
Lad os sætte

$$A_i = 1 + \sum_{j=1}^{i} a_j\,,\quad i = 1,2,\ldots,n\,,$$

så er

$$\frac{A_i - A_{i-1}}{A_i} \le s\,,$$

dvs.

$$A_i \le \frac{A_{i-1}}{1-s}\,,$$

for $i = 1,2,\ldots,n$, og altså

$$A_n \le \frac{A_0}{(1-s)^n}\,.$$

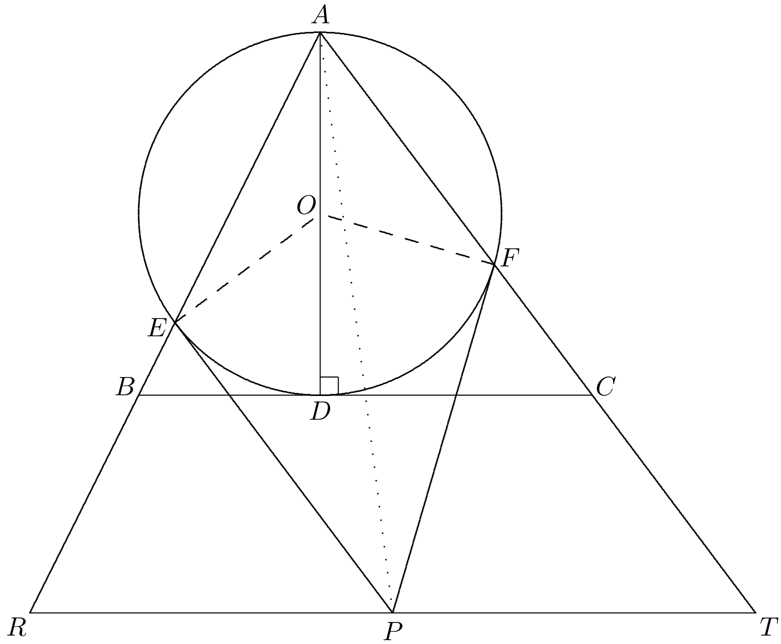
Da $A_0 = 1$, $A_n = 2$, er $1 - s \le 2^{-1/n}$, dvs. $s \ge 1 - 2^{-1/n}$.

Det er let at se, at det er muligt at vælge $a_1,\ldots,a_n$ således, at der gælder lighedstegn i samtlige ovenstående uligheder. Vi kan nemlig vælge $A_i = 2^{i/n}$, $a_i = 2^{i/n} - 2^{(i-1)/n}$. Med dette valg af a_i fås $s = 1 - 2^{-1/n}$.

Dette er altså den mindste værdi, som s kan antage, (Också löst av *Hans Kaas Benner, Randers, DK*)

518. (*Efter Kåre Vedøy, Fyllingsdalen, NO*) Låt P vara tangenternas skärningspunkt och drag genom P en linje, l, parallell med sidan BC. Förlängningarna av sidorna AB och AC skär l i punkterna R och T resp. Triangeln ART är likformig med triangeln ABC och det följer att P ligger på medianen genom A i triangeln ABC om och endast om P är mittpunkt på RT.
Om $\angle BAD = \alpha$ är $\angle ABD = \angle ERP = \pi/2 - \alpha$. Eftersom tangenten EP bildar rät vinkel med radien EO, gäller det att $\angle REP = \pi - \angle AEO - \angle OEP = \pi/2 - \alpha$. Det betyder att triangeln EPR är likbent med $|EP| = |RP|$. På analogt sätt kan man visa att att triangeln FPT är likbent med $|FP| = |TP|$. Påståendet följer nu av att P ligger på lika avstånd från tangeringspunkterna E och F.

Vi förutsatte att triangeln ABC var spetsvinklig. Detta medför dels att punkten D ligger på BC mellan B och C, dels att A och P måste ligga på skilda sidor om linjen BC. Det gäller nämligen att $\angle EOF = 2 \cdot \angle EAF < \pi$



(Också löst av *Hans Kaas Benner*)

519. (*Con Amore Problemgruppe, København, DK*) Vi bemærker først at for $p = 2$ er ingen af de to kongruenser løsbar. Vi lader derfor i det følgende p være et ulige primtal. Af omskrivningen (hvor k er et vilkårligt helt tal)

$$x^2 + x + k \equiv 0 \Leftrightarrow 4x^2 + 4x + 4k \equiv 0 \Leftrightarrow (2x+1)^2 \equiv 1 - 4k \pmod{p}$$

fremgår, at en kongruens af form $x^2 + x + k \equiv 0 \pmod{p}$ er løsbar, hvis og kun hvis $1 - 4k$ er et kvadrat modulo p. For henholdsvis $k = 3$ og $k = 25$ bestemmer vi først de p for hvilke $1 - 4k \equiv 0 \pmod{p}$, og finder følgende:
For $k = 3$ er $1 - 4k \equiv 0 \pmod{p}$ opfyldt, hvis og kun hvis $p = 11$; og for $k = 25$ er $1 - 4k \equiv 0 \pmod{p}$ opfyldt, hvis og kun hvis $p = 3$ eller $p = 11$.

For $p = 11$ er altså $1 - 4k \equiv 0$ for såvel $k = 3$ som $k = 25$ (og 0 er jo et kvadrat).

For $p = 3$ er $1 - 4k \equiv 0$ for $k = 25$, men ikke for $k = 3$; imidlertid gælder for $k = 3$ at $1 - 4k \equiv 1 \pmod{3}$, dvs. at $1 - 4k$ er et kvadrat modulo 3 i begge tilfælde.

Indtil nu har vi indset at opgavens påstand gælder for primtallene 2, 3, 11; så i det følgende betragter vi et fra disse tre forskelligt primtal p. Modulo ethvert sådant primtal er hvarken -11 eller -99 kongruent med 0; dvs. disse to tal er hverken især enten en kvadratisk rest eller en kvadratisk icke-rest modulo p.

Opgavens påstand er altså ensbetydende med at de enten begge er kvadratisk rest eller begge er kvadratisk icke-rest modulo p; og dette er igen ensbetydende

med at deres produkt er kvadratisk rest modulo p. Påstandens rigtighet fremgår derfor af at $(-11)(-99)$ jo er kvadrattallet $(3 \cdot 11)^2$, og dermed specielt kvadratisk rest modulo p.
(Också löst av *Ebbe Thue Poulsen, Kåre Vedøy, Ole Somdalen, Oslo*)

Anm. Vi vill komplettera listan i 2009:2 över läsare som sänt in korrekta lösningar till uppgifter:
Uppgift 512 har förutom *Erik Hansen* också lösts av *Peter Kierkegaard*, *Eike Petermann*, *Con Amore Problemgruppe* och *Ebbe Thue Poulsen.*
Uppgift 513 har jämte *Ebbe Thue Poulsen* också lösts av *Hans Kaas Benner*, *Erik Hansen*, *Peter Kierkegaard* och *Eike Petermann.*
Uppgift 514 har utöver *Con Amore Problemgruppe* också lösts av *Hans Kaas Benner*, *Peter Kierkegaard* och *Eike Petermann.*