Abelprisen 2010 –John Tate

Loren D. Olson

Department of Mathematics and Statistics
University of Tromsø
N-9037 Tromsø, Norway
loren.olson@uit.no

John Tate ble født i 1925 i Minneapolis, Minn., USA. Han tok sin bachelorgrad på Harvard og senere doktorgraden på Princeton med den berømte Emil Artin som veileder. Doktoravhandlingen fra 1950 var helt bemerkelsesverdig. Den ga et nytt syn på bruk av Fourier analyse i tallteori. Tates doktoravhandling ga opphav til mye fruktbart matematisk arbeid. Avhandlingen sirkulerte i mange år i form av kopier og til slutt ble den publisert i 1967 ([1]). Her introduserte han bruk av L-funksjoner på adeleringer. Dette har senere utviklet seg til et stort og produktivt felt.

John Tate ble professor på Harvard i 1954. Blant det som han publisert fram til da, var det en artikkel ([2]) som var så oppsiktsvekkende at han ble belønnet med Coleprisen i 1956. Dette er en pris som bare ble delt ut av AMS (=American Mathematical Society) hvert 5te år for den beste artikkelen i tallteori de 6 foregående år. I den berømte artikkelen finner vi Tates helt fundamentale bidrag til klassekroppsteori via kohomologigrupper.

I tillegg har han fått en rekke andre utmerkelser som: Steele Prize (fra AMS) i 1995 for Lifetime Achievement, og Wolf Prize for 2002/3.

1 Personlig Bemerkning

Jeg var undergraduate student på Harvard fra 1960 til 1964. Jeg var så heldig å få Tate som lærer i tre kurs i matematikk: “Calculus, Complex analysis” og et lesekurs i Nagatas bok “Local Rings”. Tate var inspirerende, intens og dypt opptatt av matematikk. Uansett om det var en forelesning for 80-90 studenter eller et lite møte på hans kontor, var det tydelig for oss alle hvilken kraft han hadde som matematiker. Kjærligheten til matematikken var alltid merkbar og alle forsto hvilken betydningfull matematiker han var.

Da jeg var graduate student på Columbia, dukket det opp et brev fra Tate til Cassels (datert 25 sept 1965). En stor del av dette brevet er senere blitt publisert som: ([3]) i 1973. På midten av 60-tallet var det et strev å få kopiert artikler. Dette brevet var gull verdt for en student som meg som drev med elliptiske kurver. Siden jeg var på Columbia og Serge Lang også var tilstede den gangen, fikk jeg hjelp av ham fra tid til annen. (Lang var ikke min veileder, det var det Heisuke Hironaka som var). En dag stakk Lang til meg noe som het "Galois cohomology of abelian varieties over p-adic fields" med kommentaren: "Her, les dette!". Det var noe som Tate hadde gjort, men som Lang hadde skrevet opp ([4]). Bortsett fra å formidle en personlig erfaring med Tate som professor, er det et poeng for meg her å vise at Tates resultater var kjente og sirkulerte i student- og forskermiljøet i lang tid før de ble allment kjente og publiserte. Arbeidet hans var kjent og benyttet allerede fra 50-tallet.

2 Elliptiske kurver

La k være en kropp.

Definisjon 2.1. En *elliptisk kurve* E definert over en kropp k er en ikke-singulær kurve av genus 1 samt et k-rasjonalt punkt e på E.

La $E(k)$ være mengden av alle k-rasjonale punkter på E. $E(k)$ har en gruppestruktur med e som identitetselement. $E(k)$ kalles for *Mordell-Weil gruppa til E*. Det er svært vanlig å beskrive elliptiske kurver ved en *Weierstrassligning*:

$$Y^3 + a_1XY + a_3Y = X^3 + a_2X^2 + a_4X + a_6$$

der $a_i \in k$ og der man krever at diskriminanten $\Delta \neq 0$. Dette er ekvivalent med å si at kurven er ikke-singulær. Vi tar punktet $(0, 1, 0) = e$ i det projektive planet som identitetselementet for gruppestrukturen.

Teorem 2.2. ***Mordell-Weil****. La k være en algebraisk tallkropp. $E(k)$ er endelig generert.*

Skriv $E(k) \cong E(k)_{tors} \oplus \mathbb{Z}^r$ der r er *rangen* til $E(k)$. $E(k)_{tors}$ er grei å beregne. Verre er det å beregne r og et sett generatorer for $E(k)$. For å komme videre med å få tak i r og presise resultater om de såkalte *L-funksjoner* har vi bruk for et nytt begrep som Tate tildels er ansvarlig for.

3 Tate-Šafarevič grupper

Tar vi utgangspunkt i en gitt elliptisk kurve E kan vi studere ikke-singulære kurver D av genus 1 som har E som Jacobivarietet. Slike har følgende struktur:
(1.) $\mu : D \times E \longrightarrow D$ over k slik at $\mu(y, e) = y$ og $\mu(\mu(y, x_1), x_2) = \mu(y, x_1 + x_2)$ og
(2.) $\nu : D \times D \longrightarrow E$ over k slik at $\mu(y_1, x) = y_2 \iff \nu(y_2, y_1) = x$.

D kalles for et *prinsipalt homogent rom* over (E, e). Vi kan innføre en ekvivalensrelasjon på disse. Weil (1955) definerte en gruppestruktur på disse ekvivalensklassene og vi får $WC(E, k)$, *Weil-Châtelet gruppa*. Det er viktig å legge merke til at en ekvivalensklasse i $WC(E, k)$ er $0 \iff$ kurvene D som representerer klassen har et k-rasjonalt punkt.

Dersom K/k er en kroppsutvidelse, så har vi en homomorfi
$WC(E, k) \longrightarrow WC(E, K)$. Spesielt for k en algebraisk tallkropp og k_v en komplettering mht. en tallverdi v, har vi $WC(E, k) \longrightarrow WC(E, k_v)$.

Definisjon 3.1. La (E, e) være en elliptisk kurve over en algebraisk tallkropp k.

$$Ш = Ш(E) = \cap_v \ ker(WC(E, k) \longrightarrow WC(E, k_v))$$

kalles for *Tate-Šafarevič gruppa til E.*

I 1958 publiserte Lang og Tate ([6]) en artikkel der de relaterer prinsipale homogene rom til den 1-ste kohomologigruppa til en abelsk varietet A over en kropp k. Da blir $Ш(E)$ definert ved den eksakte sekvensen

$$0 \longrightarrow Ш(E) \longrightarrow \cap_v \ ker(H^1(G, E(\bar{k})) \longrightarrow H^1(G, E(\bar{k_v}))$$

Dette er den vanlige definisjonen idag.

Selmers kurve $3X^3 + 4Y^3 + 5Z^3$ er (dvs. representerer) et ikke-trivielt element i $Ш(E)$ der E er den elliptiske kurven gitt ved $X^3 + Y^3 = 60Z^3$. Den blir ofte nevnt som et eksempel i denne sammenheng. La G være Galoisgruppen til den algebraiske tillukning til $\mathbb{Q}$. Denne kurven tilsvarer et element i $H^1(G, E)$ der E er Jacobimangfoldigheten til C. C har et punkt i alle p-adiske kropper. Orden til C i $H^1(G, E)$ er faktisk lik graden til den minste utvidelsen K av $\mathbb{Q}$ av $\mathbb{Q}$ der C har et K-rasjonalt punkt. Ved å benytte Galois kohomologi som Tate, gjør kan man utvide dette resultatet til prinsipale homogene rom der man tillatter C å ha et p-adisk punkt for ett primtall p ([5]).

4 Birch-Swinnerton-Dyer formodningen

For å forenkle presentasjonen, begrenser vi oss til tilfellet $k = \mathbb{Q}$. Vi trenger flere begrep knyttet til elliptiske kurver. La E være en elliptisk kurve definert over $\mathbb{Q}$ ved en Weierstrassligning med koeffisienter i $\mathbb{Z}$. Vi kan også anta diskriminanten Δ er minimal blant alle isomorfe kurver på denne formen. Vi kan betrakte Weierstrassligningen modulo p for alle primtall p. For alle p slik at $p \not| \Delta$ får vi en elliptisk kurve $E(p)$ over $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/\mathbb{Z}$. La A_p være antall $\mathbb{F}_p$-punkter på $E(p)$ og sett $t_p = 1 + p - A_p$. La

$$L_p(s) = (1 - t_p p^{-s} + p^{1-2s})^{-1}$$

for $s \in \mathbb{C}$.

Dersom $p \mid \Delta$, setter vi

$$L_p(s) = (1 - t_p p^{-s})^{-1}$$

for $s \in \mathbb{C}$.

Definisjon 4.1. *L-funksjonen til E* er

$$L_E(s) = \prod_p L_p(s)$$

Dette produktet konvergerer for $Res > 3/2$ og kan fortsettes analytisk over hele $\mathbb{C}$.

Ω er definert som $\int_{E(\mathbb{R}} \omega$ der $\omega = dx/(2y + a_1 x + a_3)$.

La $< \quad >$ være den *Néron-Tate høydeparingen.* Den er kvadratisk og definert for punkter i $E(\mathbb{Q})$.

Vi har nå en samling av både analytiske og aritmetiske data om vår elliptiske kurve E. Legg merke til at to av disse bærer Tates navn. Vi er nå i stand til å formulere en av de mest vidtrekkende formodningene innenfor teorien for elliptiske kurver.

Formodning 4.2. (**Birch-Swinnerton-Dyer**)
1.) Ordenen til nullpunktet til $L_E(s)$ i $s = 1$ er lik rangen r til $E(\mathbb{Q})$.
2.) La $P_1, \ldots, P_r$ være r lineært uavhengige punkter i $E(\mathbb{Q})$. La B være den frie abelske undergruppe i $E(\mathbb{Q})$ som de generer. Så er

$$\lim_{s \to} 1 \frac{L_E(s)}{(s-1)^r} = \alpha[\text{Ш}] det < P_i, P_j > \prod_{p|\Delta} c_p$$

der c_p er sm positive heltall som kan regnes ut eksplisitt fra Weierstrassligningen.

Tate har gjort banebrytende arbeid på mange områder. Det med Galois kohomologi er et av disse som jeg personlig har hatt glede av. Hvor mye av dette skyldes Tate ser vi fra følgende sitater fra Serre ([8]): “La presque totalité des résultats des 1,2,3,4 est due à Tate” og “La situation est tout à fait analogue à celle du Chapitre I: presque tous les résultats sont dus à Tate.”

Bemerkning 4.3. Tate og Serre samarbeidet mye, noe som det foregående gir et lite pekepinn om. Et annet arbeid som de hadde sammen handlet om god reduksjon av abelske varieter ([9]). Det er interessant å merke seg at Serre også mottok Abelprisen (i 2003).

Prof. John Tate mottar Abelprisen 2010 for sitt betydningsfulle og mangfoldige virke innenfor tallteori og aritmetisk algebraisk geometri. Han har påvirket flere store matematiske fagfelt over lang tid. Prisen er i det store og hele en personlig hyllest til en stor forsker, men den er også en inspirasjon til matematikere som skal videreføre fagfeltene. Normat gratulerer!

Referanser

[1] Tate, J. *Fourier analysis in number fields and Hecke's zeta-functions.* In: Algebraic Number Theory, J.W.S. Cassels and A. Fröhlich, eds. (1967).

[2] Tate, J. *The higher dimensional cohomology groups of class field theory.* Annals of Mathematics, Series 2, volume 56 (1952).

[3] Lang, S. *Elliptic Functions, Addison-Wesley.* (1973).

[4] Tate, J. *Galois cohomology of abelian varieties over p-adic fields.* Mimeographed notes by Serge Lang. (1959).

[5] Olson, L. *Galois cohomology of cycles and applications to elliptic curves.* American Journal of Mathematics, Vol. XCII, No. 1, January, 1970.

[6] Lang, S. and Tate, J. *Principal homogeneous spaces over abelian varieties.* American Journal of Mathematics, Vol. 80, No. 1, 1970.

[7] Selmer, S. *The diophantine equation* $ax^3 + by^3 + cz^3 = 0$. Acta Math., 85 (1951).

[8] Serre, J-P. *Cohomologie Galoisienne*, Lecture Notes in Mathematics 5. 1965.

[9] Serre, J-P. and Tate, J. *Good Reduction of Abelian Varieties.* Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 88 (1968).