Antalet egenvärden under en stor gräns

Lars Gårding [a] ***och Per-Anders Ivert*** [b]

[a]Matematikcentrum, Lunds universitet, Box 118, 221 00 LUND
lars.garding@math.lu.se
[b]Dag Hammarskjölds väg 5i, 224 64 LUND
pa.ivert@gmail.com

1 Klassiskt om den svängande strängen

En svängande sträng avger en ton, ett faktum som ligger till grund för funktionssättet hos många musikinstrument. En ton karaktäriseras i första hand av sin *frekvens*, d.v.s. antalet svängningar per tidsenhet (mäts i Herz (Hz), antalet svängningar per sekund). I allmänhet är en ton en överlagring av en *grundton* (grundfrekvens) och en svit av *övertoner*. Förhållandet mellan intensiteterna hos grundtonen och de enskilda övertonerna ger den sammansatta tonen dess *klangfärg*. Att analysera rörelsen hos en svängande sträng är en uppgift som tidigt möter dem som studerar *Fourieranalys*. Man härleder då från fysikaliska grundprinciper (Newtons lagar) den partiella differentialekvation som beskriver strängens rörelse:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \ \ t > 0,$$

där x representerar en punkt på strängen, intervallet $x \in [0, L]$, $t = 0$ representerar strängens viloläge och $u(x,t)$ anger avvikelsen av punkten x från sitt viloläge vid tidpunkten t. Konstanten c har den fysikaliska dimensionen av hastighet, och dess kvadrat är kvoten mellan strängens spänning och dess densitet. Man finner att lösningar till ekvationen kan genereras som funktionsserier

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} X_k(x) T_k(t),$$

där funktionerna X_k och T_k satisfierar var sin ordinär differentialekvation

$$X_k''(x) + \lambda_k X_k(x) = 0, \quad T_k''(t) + c^2 \lambda_k T_k(t) = 0$$

Talen $c\sqrt{\lambda_k}$ är just frekvenserna för grundtonen ($k = 1$) och de enskilda övertonerna ($k = 2, 3, \dots$). De kallas strängens *egenfrekvenser*, och talen λ_1, λ_2, …, för vilka vi nedan använder benämningen egenvärden, beror på strängens längd L och på ändpunktsvillkoren; strängens ändpunkter kan till exempel vara fixerade (varvid $\lambda_k = k\pi/L$), eller den ena eller båda kan tillåtas löpa fritt i vertikalled. I vilket fall som helst är denna endimensionella situation relativt enkel, och i de modellproblem som möter studenten kan allt räknas ut explicit. Den tvådimensionella motsvarigheten till en svängande sträng är en *membran*, och ur matematikens synpunkt finns det inga tvingande skäl att stanna vid ett visst dimensionstal.

2 En antalsformel

Klassiska arbeten av Hermann Weyl (1913), Richard Courant (1924), Torsten Carleman (1934) och Lars Hörmander (1985) har utvecklat en intressant formel för antalet egenvärden hos en allmän, lineär och elliptisk vibration hos en membran M som täcker en öppen, begränsad del B av R^n. Membranens avvikelse från ett viloläge beskrivs av en reell funktion $u(x)$ med små funktionsvärden (små utslag), och dess energi av av en kvadratisk form $E(u, u)$ i derivatorna av u av ordning $\leq m$ med koefficienter beroende av x. Om $(u, v) = \int u(x)\overline{v(x)}dx$ är skalärprodukten för kvadratiskt integrerbara funktioner och u, v är snälla (tillräckligt reguljära) funktioner, den ena med kompakt stöd i B, kan man genom partiella integrationer ge energin $E(u, v)$ formen (Pu, v) där $P = P(x, D)$ med $D_k = \partial/\partial x_k$ är en differentialoperator och mera precist en lineärkombination av derivatorna av u av ordning högst $2m$ vars koefficienter är snälla funktioner av x. Delsumman av de högsta derivatorna kallas operatorns principaldel $p(x, D)$. Ersätter man varje D_k med en komponent ξ_k av en reell variabel ξ, dual till x, får man av $p(x, D)$ ett homogent polynom $p(x, \xi)$ i ξ av grad $2m$ med koefficienter beroende av x, kallat operatorns karaktäristiska polynom. Att operatorn P är elliptisk betyder att $p(x, \xi)$ är jämförbar med $|\xi|^{2m}$ då $|\xi|$ är stort. Exempel: Summan Δ av kvadraterna av derivatorna $\partial/\partial x_k$ är en elliptisk differentialoperator med det karaktäristiska polynomet $\xi_1^2 + ... + \xi_n^2$.

Vår antalsformels huvuddel säger att

$$N(\lambda) \sim (2\pi)^{-n} \iint_{x \in B,\ p(x,\xi) < \lambda} dx d\xi.$$

där $\xi \in R^n$ och $p(x, \xi)$ är det karaktäristiska polynomet till $p(x, D)$. Vänster sida betyder antalet egenvärden hos P mindre än λ. Satsen säger att kvoten mellan de båda sidorna går mot 1 för stora λ. För stora ξ varierar x fritt över membranens volym B i formelns integrationsområde. Det betyder att antalsformeln kan förenklas till

$$N(\lambda) \sim (2\pi)^{-n} b \int_{p(\cdot,\xi) < \lambda} dx,$$

där b är membranens volym och $p(\cdot, \xi) = (1/b) \int_B p(x, \xi) dx$ är ett medeltal av $p(x, \xi)$ över membranen. Till slut en anmärkning om den återkommande faktorn $(2\pi)^{-n}$, ett arv från Fouriertransformen, som man kommer bort ifrån genom att ta $(2\pi)^n$ som volymsenhet i frekvensrummet. Satsen säger då att membranen har lika många egenfrekvenser under ett stort λ som det finns volymsenheter i frekvensrummet $p(x, \xi) < \lambda$.

3 Strängen igen

Låt I vara intervallet (0,1) och $H = L^2(I)$ rummet av kvadratiskt integrerbara reella funktioner u från I med skalärprodukten $(u,v) = \int_I (u(x)v(x)dx$ och låt H' vara rummet av funktioner vilkas derivator ligger i H. En liten reell funktion $u(x)$ med $u' \in H$ kan tänkas beskriva läget hos en elastisk sträng spänd över I. Vi tar den variabla delen av längdelementets kvadrat, $1 + u'(x)^2$, som en energitäthet så att den spända strängens energi blir $E(u,u) = (u',u')$.
Vi ska betrakta minima av kvoten $K = E(u,u)/(u,u)$ i olika lineära underrum av H och ger först ett exempel där minimum tas över alla funktioner u som försvinner i ändpunkterna $0,1$ (vilket betyder att strängens ändpunkter har fixerats). Om minimum λ uppnås för $u(x)$ och $v(x)$ är vilken som helst funktion i H som försvinner i $0,1$ får man med ett litet tal t:

$$(u' + tv', u' + tv') \geq \lambda(u + tv, u + tv)$$

Utvecklar vi och integrerar partiellt $((u,v') = -(u',v))$ så får vi

$$t^2\Big((v',v') - (v,v)\Big) - 2t\Big(\lambda(u,v) + (u'',v)\Big) + (u',u') - \lambda(u,u)$$

$$= t^2\Big((v',v') - (v,v)\Big) - 2t\Big(\lambda(u,v) + (u'',v)\Big) \geq 0$$

för varje v, och med likhet för $t = 0$. Att olikheten ska gälla för alla (små) reella tal t betyder att koefficienten för t är noll, vilket ger differentialekvationen

$$u''(x) + \lambda u(x) = 0,$$

vars allmänna lösning är en lineärkombination av $\cos \mu x$ och $\sin \mu x$ med $\mu^2 = \lambda$. Ska den försvinna i ändpunkterna måste $u = C \sin \mu x$ med $\mu = k\pi$ vara en heltalsmultipel av π. Alltså är $u(x) = C \sin k\pi x$, varav $\lambda = (k\pi)^2$, och om detta skall vara ett minsta värde, utan att vara noll, är $k = 1$. Alltså är den minsta energin i vårt fall lika med π^2 med motsvarande egenfunktion $u(x) = \sin \pi x$. I det följande ger vi nu ett antal uträknade minima i liknande situationer. Först tänker vi oss att strängens ändpunkter inte är fixerade, utan tillåts löpa friktionsfritt i var sin vertikal skåra.

Det visar sig att vi genom att ta successiva minima av kvoten $K = E(u,u)/(u,u)$, enligt beskrivning nedan, får både differentialoperatorns $P = -(d/dx)^2$ egenvärden $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots$ och motsvarande egenfunktioner $u_1(x), u_2(x), \ldots$, med $Pu_k = \lambda_k u_k, k = 1, 2, \ldots$, en ekvation som förutsätter att $u''(x)$ finns, men som kan tas i meningen att $E(u_k, v) = \lambda_k(u_k, v)$ för alla v med $v' \in L^2(I)$. Närmare bestämt är $\lambda_k = \pi^2(k-1)^2$ och $u_k(x) = \sqrt{2}\cos(k-1)\pi x$. Alla dessa egenfunktioner är normerade till $(u_j, u_j) = 1$ och är ortogonala mot varandra i meningen att $(u_j, u_i) = 0$ då $i \neq j$. Allt detta betyder att egenfunktionen u_k delar in strängen i k lika delar som om man knäpper på dem svänger i takt med varandra, d.v.s. med samma tidsperiod. Denna strängens rörelse i tid och rum kan simuleras av funktionen $f(x,t) = u_k(x)\cos(k-1)\pi t$, beskrivande strängens avvikelse från sitt viloläge.

Det är omedelbart klart att minimum av kvoten K är noll och att minimum uppnås för konstanta funktioner. Alltså är $\lambda_1 = 0$. Övriga egenvärden får man successivt genom att λ_k är minimum av K för funktioner $u(x)$ ortogonala mot $u_1, ..., u_{k-1}$, dvs sådana att $(u, u_j) = 0$ då $j = 1, 2, ..., k-1$. Denna definition av λ_k kan göras oberoende av de tidigare egenfunktionerna genom att λ_k visar sig vara största minimum av $E(u, u)$ i rummet V av element i H som är ortogonala mot $k-1$ godtyckliga funktioner $v_1, ..., v_{k-1}$ i H. Ty detta rum V innehåller åtminstone en linjärkombination $u = c_1u_1 + ... + c_ku_k$ av de första k egenfunktionerna där kvadratsumman av koefficienterna är 1 så att $(u, u) = 1$. Man får ögonblickligen

$$K = E(u, u) = \lambda_1 c_1^2 + ... + \lambda_k c_k^2 \geq \lambda_k,$$

med likhetstecken om V alstras av $u_1, ..., u_k$. Denna sats gäller allmänt då både H och E är kvadratiska former för vilka $K = E/H$ har successiva minima, upptäcktes först av Weyl och kallas max-min principen. Den visar omedelbart att varje egenvärde är en monoton funktion av energin $E(u, u)$. Om man, till exempel, i det föregående inskränker minima över alla funktioner till minima över funktioner med derivata i $L^2(I)$ som försvinner på randen av I får man större minima och också större egenvärden $\lambda_k = \pi^2 k^2$ med egenfunktioner $\sqrt{2} \sin k\pi x$.

Om strängen inte är homogen utan har en variabel massa $a(x)$ per längdenhet, och totalmassan därmed är $\int_I a(x)dx$, blir svängningsenergin $\int_I u'(x)a(x)u'(x)dx$. I detta fall får vi egenvärden och egenfunktioner till operatorn $-d/dx\big(a(x)d/dx\big)$, men vi kan inte ange dem i så explicit form som ovan. Dock kan man säga att egenvärdet med nummer k kommer att ligga mellan $a_1\pi^2 k^2$ och $a_2\pi^2 k^2$ om $a_1 < a(x) < a_2$ då $x \in I$.

Vi kan också använda den i början citerade antalsformeln. Vår principaldels karaktäristiska polynom är nu $p(x, \xi) = a(x)\xi^2$ med $a(x) > 0$ och långsamt varierande. I den andra varianten av antalsformeln används medeltalet $a = \int_I a(x)dx/b$ av $a(x)$ där b nu är strängens längd. Med dessa storheter insatta i formeln blir den

$$N(\lambda) \sim (1/2\pi)b \int_{a\xi^2 < \lambda} d\xi = (b/\pi)\sqrt{\lambda/a}$$

med integration över $|\xi| < \sqrt{\lambda/a}$. Med $a = a(x) = 1, b = 1$ är detta resultat känt från den svängande strängen. Ju större a desto större och samtidigt glesare egenvärden.

Vi kan också få formeln att ge en asymptotik för stora egenvärden λ_k genom att helt enkelt kalla $N(\lambda)$ för k och vända på formeln vilket ger $\lambda_k \sim ab^{-2}\pi^2 k^2$, vilket är oss bekant då $a = b = 1$.

4 En generaliserad sträng

För användning av Fouriertransformen, låt $D = (D_1, D_2, \ldots, D_n)$ $= 1/i(\partial/\partial x_1, \partial/\partial x_2, \ldots, \partial/\partial x_n)$ betyda den imaginära gradienten i R^n, och låt

$$D^\alpha u(x) = D_1^{\alpha_1} ... D_n^{\alpha_n} u(x)$$

beteckna en derivata av ordningen $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$. Med $B \in R^n$ ett öppet begränsat område, m ett positivt heltal och $u(x)$ och $v(x)$ snälla komplexvärda funktioner, betrakta formen

$$Q(u,v) = \int_B \sum_{|\alpha|\leq m} D^\alpha u(x)\overline{D^\alpha v(x)}dx$$

Höljet av snälla funktioner med konvergens given av $Q(u,u)$ är ett Hilbertrum $H_m(B)$ med denna normkvadrat. Om vi inskränker oss till höljet av snälla funktioner som försvinner vid randen av B, får vi ett mindre Hilbertrum $H'_m(B)$. Då $m = 0$ får vi rummet $L^2(B)$ av kvadratiskt integrerbara funktioner från B med skalärprodukten $(u,v) = \int_B u(x)\overline{v(x)}dx$.
Vi kan nu konstruera en vibration från området B genom att göra det till en vibrerande membran M med hjälp av en differentialoperator av ordningen $2m$:

$$P(x,D) = \sum D^\beta a_{\alpha,\beta}(x)D^\alpha,$$

med $x \in B$, $|\alpha|, |\beta| \leq m$ och $a_{\alpha,\beta} = \overline{a_{\beta\alpha}}$. Integralen $\int P(x,D)\overline{v(x)}dx$ har då integranden

$$E(u,v,x) = \sum a_{\alpha,\beta}(x)D^\alpha u(x)\overline{D^\beta v(x)}$$

som är en reell energitäthet då $u = v$. Koefficienterna $a_{\alpha,\beta}(x)$ antas vara m gånger kontinuerligt deriverbara och huvuddelen av P, d.v.s. det karaktäristiska polynomet

$$p(\xi) = \sum_{|\alpha|+|\beta|=2m} a_{\alpha,\beta}(x)\xi^{\alpha+\beta}$$

antas vara reellt och begränsat uppåt och nedåt av positiva konstanter gånger $|\xi|^{2m}$ vilket betyder att operatorn P är elliptisk. Energin av en funktion $u(x)$ som beskriver strängens avvikelse från ett nolläge antas vara $E(u) = \int_B E(u(x), u(x), x)dx$.

För att få egenvärden och egenfunktioner av P ska vi nu efter mönster av den svängande strängen ta successiva minima av kvoten $E(u)/(u,u)$ för u i delrum av $H^m(B)$. Eftersom vårt problem är att undersöka dessa egenvärden ser vi dem här som till existensen bevisade och har alltså en svit av egenfunktioner $u_1, u_2, \ldots$ i $H^m(B)$ med motsvarande reella egenvärden $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$, sådana att $Pu_k(x) = \lambda_k u_k(x)$, en ekvation som kan tolkas så att

$$E(u_k, v) = \lambda_k(u_k, v)$$

för alla $v \in H^m(B)$. Om energitätheten ökar eller minskar för alla tillåtna funktioner u minskar respektive ökar alla egenvärden. Denna princip upptäcktes, som nämnts ovan, en gång av Herman Weyl. Man får att klassiskt exempel genom att genomgående ta alla successiva minima för funktioner som är noll vid randen av B eller är utan villkor. För egenvärdenas sviter (λ_j) och (μ_k) i de två fallen gäller att $\mu_j < \lambda_j$ för alla j.

5 Fouriertransform

Egenfunktionerna u_j kan normeras så att $(u_j, u_j) = 1$ för alla j och bildar då ett normerat, fullständigt ortogonalsystem av kvadratiskt integrerbara funktioner över B. Koefficienterna i utvecklingen

$$e^{ix\xi} = \sum \overline{U_j(\xi)} u_j(x)$$

med $x \in B$ är Fouriertransformerna

$$U_k(\xi) = \int_B e^{-ix\xi} u_k(x) dx, \quad \text{där} \quad \int |U_k(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^n,$$

vilket man inser genom att multiplicera likheten med $\overline{u_k(x)}$ och integrera över B. Fouriertransformerna är hela, analytiska funktioner definierade på frekvensrummet och går mot noll i oändligheten, Motsvarande energitätheter $w_j(\xi) = (2\pi)^{-n}|U_j(\xi)|^2$ har alla frekvensmassan 1 och går mot noll för stora ξ. Vi har också Parsevals formel (multiplicera med $e^{-ix\xi}$ och integrera över B)

$$b = \int_B |e^{-ix\xi}|^2 dx = \sum |U_j(\xi)|^2 = (2\pi)^n \sum w_j(\xi)$$

som visar att frekvensenergierna $w_j(\xi)$ har summan $(2\pi)^{-n}b$ för varje ξ. De adderas alltså över frekvensrummet till en skiva av tjockleken $(2\pi)^{-n}b$.

6 Konstanta koefficienter

Vi antar i fortsättningen att koefficienterna $a_{\alpha,\beta}(x)$ av operatorn P är konstanta så att nu $P(x, D) = P(D) = \sum a_{\alpha,\beta} D^{\alpha+\beta}$. I så fall är $E(u, v, x) = E(u, v)$ oberoende av x och att $E(u_j, v) = \lambda_j(u_j, v)$ betyder, då $v = u_j$, att

$$\int P(\xi) w_j(\xi) d\xi = \lambda_j$$

Denna formel som också kan skrivas som $\int (P(\xi) - \lambda_j) w_j(\xi) d\xi$. Den svängande strängens invecklade svängningsmönster med allt tätare noder förenklas av Furiertransformen till en stigande rad frekvenser λ_k i frekvensrummet. Var och en är centrum i en våg $w_k(\xi)$ med massan 1 som går mot noll i oändligheten. Eftersom $P(\xi)$ är större utanför ytan $P(\xi) = \lambda_j$ än innanför visar formeln ovan att den större delen av måttet $w_j(\xi)$ ligger innanför det (generaliserade) klot $K(\lambda_j)$ där $P(\xi) < \lambda_j$. Allmänt låter vi $K(\lambda)$ vara klotet $P(\xi) < \lambda$ och $V(\lambda)$ vara dess volym. Då j är fix, medan k (och därmed också λ_k) går mot oändligheten, kommer klotet $K(\lambda_k)$ att innehålla en allt större del av massan w_j. Följande lemma preciserar detta.

Lemma: *Låt* $f_j(k) = \int_{P(\xi)>\lambda_k} w_j(\xi)d\xi$ *vara massan av* w_j *utanför klotet* $K(\lambda_k)$. *Summan*

$$S = f_1(k) + ... + f_k(k)$$

som är massan av $W_k = w_1 + ... + w_k$ *utanför klotet* $K(\lambda_k)$ *är högst* $o(k)$ *för stora* k.

Vi motiverar lemmat med följande heuristiska resonemang: Låt $S = S_1 + S_2$, där

$$S_1 = f_1(k) + ... + f_j(k)$$

med $j < k$ termer som växer med j och

$$S_2 = f_{j+1}(k) + ... + f_k(k)$$

Med k gående mot oändligheten, välj nu $j < k$ så att $k - j$ går mot oändligheten samtidigt som $k - j = o(k)$. Vi kan till exempel välja $j = k - [\sqrt{k}]$ där parentesen betyder heltalsdel. Då är S_1 mindre än j gånger den sista termen $f_j(k)$, som går mot noll för stora k, beroende på att $k - j$ går mot oändligheten, medan massan av w_j allt mera koncentreras kring randen av $K(\lambda_k)$. De rigorösa uppskattningar som bekräftar detta finns i [5]. Alltså är $S_1 = o(k)$. Det är också klart att $S_2 = o(k)$ eftersom denna summa består av $k - j = o(k)$ likformigt begränsade termer. Massan S av W_k utanför klotet $K(\lambda_k)$ är alltså $o(k)$.

Inledningens antalsformel beror på att $\int_{K(\lambda_k)} W_k(\xi)d\xi$ för stora k blir mer och mer lik samma integral över hela rummet som är $(2\pi)^n k$ eller $bV(\lambda_k)$. Enligt Lemmat går båda mot 1 för stora k om de divideras med $\int_{K(\lambda_k)} W_k(\xi)d\xi$ vilket ger en antalsformel i form av följande uppskattning av antalet $N(\lambda)$ av egenvärden $< \lambda$,

$$N(\lambda_k) \sim (2\pi)^{-n} b \int_{P(\xi)<\lambda_k} d\xi$$

för alla k med innebörd att kvoten mellan leden går mot 1. Detta innebär i sin tur att formeln är sann för alla λ. Om $p(\xi)$ är huvuddelen av $P(\xi)$ går kvoten $P(\xi)/p(\xi)$ mot 1 för stora ξ vilket innebär att antalsformeln är sann också för p.

7 Det allmänna fallet

Då koefficienterna i $P(x, D)$ inte är konstanta får man inledningens antalsformel av formeln ovan om man ersätter koefficienterna i P med deras medelvärden över B,

$$a_{\alpha,\beta} = (1/b)\int_B a_{\alpha,\beta}(x)dx, \quad p(\cdot, \xi) = (1/b)\int_B p(x, \xi)dx$$

där b är membranens volym. Följden är att man kan förenkla den intuitiva analysen till operatorer med konstanta koefficienter. Integralen av höger led i introduktionens antalsformel kan också förenklas till $b\int_{p(\cdot,\xi)<\lambda} d\xi$ vilket ger en antalsformel

$$N(\lambda) \sim (2\pi)^{-n} b \int_{p(\cdot,\xi)<\lambda} d\xi$$

lika med den som vi använt i fallet konstanta koefficienter.

De argument för övergången från konstanta till variabla koefficienter som vi använt är bara formella men kan ändå preciseras och bevisas genom att efter klassiskt mönster dela upp membranen i små delar med medföljande strålningar. I de små delarna är $p(x, \xi)$ praktiskt taget konstant vilket gör strålningen beräkningsbar och ger till slut huvudtermen i Hörmanders antalsformel. Men detta ska inte göras i detta arbete vars mål är begränsat till att ge en insikt i en analys av antalet egenvärden under en stor gräns.

Referenser

[1] H. Weyl : Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichung (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung). Math. Ann. 71, 441-479 (1913).

[2] R. Courant: Courant-Hilbert: Methoden der mathematischen Physik, vol.1, 2d edition 1931, Chap. 6 par.4.

[3] T. Carleman: Propriétés asymptotiques des fonctions fondamentales des membranes vibrantes, Comptes rendues du VIII Congrès des Mathématiciens Scandinaves, Stockholm 1934.

[4] Über die asymptotische Verteilung der Eigenwerte partieller Differentialgleichungen. Berichten der mathematischen-physischen Klasse der Akademie der Wissenschaften zu Leipzig LXXXVIII. Band (1936)

[5] L. Hörmander: The Analysis of Linear Partial Differential operators III, IV. Springer 1985.

[6] H. Weyl : Ramifications, old and new, of the eigenvalue problem. Bulletin of the American Mathematical Society 56, 115-139 (1950).