Uppgifter

532. Fyrhörningen $ABCD$ kan inskrivas i en cirkel. Visa att

$$|AC - BD| \leq |AB - CD|.$$

När gäller likhet?

533. Bestäm alla positiva heltal x och y som uppfyller ekvationen

$$x + y^2 + z^3 = xyz,$$

där z är den största gemensamma delaren till talen x och y.

534. (*Kent Holing, Trondheim, NO*) Gitt ligningen $x^6 + x^4 - 2x^2 - 1 = 0$ med Galois-gruppe G, rotkropp E og r en positiv rot.

a) Vis at $|G| = 12$ ved først å vise at gruppen $H = G(E/Q[r])$ er Z_2 (på isomorfi nær)!

b) Bestem G ved hjelp av H!

535. Låt $a_1, a_2, \dots, a_n$ vara en följd av reella tal som uppfyller

$$a_{i+j} \leq a_i + a_j \text{ för alla } i, j = 1, 2, \dots .$$

Visa att

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \frac{a_3}{3} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geq a_n$$

för alla positiva heltal n.

536. Låt $a \geq 1$ vara ett reellt tal och z ett komplext tal sådana att $|z + a| \leq a$ och $|z^2 + a| \leq a$. Visa att $|z| \leq a$.

(Uppgifterna 532 och 536 är olympiadproblem hämtade från tävlingar i Rumänien, uppgift 533 har föreslagits till IMO, medan uppgift 535 är hämtad från Asian Pacific-olympiaden.)

Lösningar skickas senast 1 oktober 2010 till:

Dag Jonsson, dag@math.uu.se
Box 480
Uppsala universitet, Matematiska institutionen
SE-75106 Uppsala

Anm. Vi välkomnar givetvis lösningar även efter angivet datum så länge inga andra lösningar har presenterats i tidskriften.

Lösningar till uppgifter i Normat 2009:2

521. (*Erik Hansen, Kalundborg, DK*)

$$\text{Lad } \overrightarrow{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\beta \\ \sin\beta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\gamma \\ \sin\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \\ \sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma \end{pmatrix}.$$

Da $\overrightarrow{a}$ er sum af tre enhedsvektorer, og da $a_2^2 \geq 4$ gælder at

$$a_1^2 = |\overrightarrow{a}|^2 - a_2^2 \leq 9 - 4 = 5,$$

og dermed er $-\sqrt{5} \leq a_1 = \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \leq \sqrt{5}$.
(Metoden kan anvendes til andre lignende opgaver.)
(Också löst av *Hans Kaas Benner, Con Amore Problemgruppe, Ebbe Thue Poulsen* och *Kåre Vedøy*)

522. (Efter *Hans Kaas Benner, Randers, DK*) Givet

$$ab + bc + ca + abc = 4, \quad \text{där} \quad a, b, c \geq 0, \tag{1}$$

gäller det att visa att

$$a + b + c \geq ab + bc + ca. \tag{2}$$

Av symmetriskäl kan vi anta att $0 \leq a \leq b \leq c$. Om $a = 0$ övergår (1) i $bc = 4$ och (2) i $b + c \geq 4$. Men $b + \frac{4}{b} \geq 4$ med likhet om och endast om $b = c = 2$. Symmetrin i a, b, c leder till likhet också för $(a, b, c) = (2, 2, 0)$ och $(2, 0, 2)$.
Om $a \geq 1$ måste vi ha $a = b = c = 1$ pga (1). Vi får då likhet i (2).
Antag att $0 < a < 1$. Av (1) får vi då

$$c = \frac{4 - ab}{a + b + ab}. \tag{3}$$

Insättning av (3) i (2) ger

$$(a + b)(a + b + ab) + 4 - ab \geq ab(a + b + ab) + (a + b)(4 - ab),$$

eller

$$(1 - a^2 + a)b^2 + (a - 4 + a^2)b + a^2 + 4 - 4a \geq 0\,. \tag{4}$$

Diskriminanten till detta andragradsuttryck i b är

$$\begin{aligned} &(a - 4 + a^2)^2 - 4(1 - a^2 + a)(a^2 + 4 - 4a) \\ &= 5a^4 - 18a^3 + 21a^2 - 8a = 5a(a - 1)^2(a - 8/5), \end{aligned}$$

som är < 0 för $0 < a < 1$. Eftersom koefficienten för b^2 i (4) är positiv för $0 < a < 1$ följer att vänsterledet i (4) är > 0 för nämnda a-värden. Olikheten (2) är därmed visad. (Också löst av *Con Amore Problemgruppe*)

523. (*Ole Somdalen, Oslo, NO*) Nå gjelder

$$a^m + 1 \mid a^n + 1 \Leftrightarrow a^n + 1 \equiv 0 \pmod{a^m + 1}.$$

Ved divisjonsteoremet har vi at $n = mq + r$, der q og r er entydige heltall med $0 \leq r < m$. Siden $a^m + 1 \equiv 0 \pmod{a^m + 1} \Leftrightarrow a^m \equiv -1 \pmod{a^m + 1}$, får vi at

$$a^n = a^{mq+r} \equiv (-1)^q a^r \equiv -1 \pmod{a^m + 1}.$$

Nå gir odde q at

$$-a^r \equiv -1 \pmod{a^m + 1} \Leftrightarrow a^r \equiv 1 \pmod{a^m + 1},$$

og dette betyr at $r = 0$ siden r er entydig. Dermed er $n = mq \Leftrightarrow m \mid n$. For jamne q får vi at

$$a^r \equiv -1 \pmod{a^m + 1} \Leftrightarrow a^r + 1 \equiv 0 \pmod{a^m + 1} \Leftrightarrow a^m + 1 \mid a^r + 1,$$

noe som er umulig siden $r < m$ og $a > 1$.
Som en liten digresjon har vi også at dersom $n = mq$ med q odde, så medfører det at $a^m + 1 \mid a^n + 1$, siden vi da har identiteten

$$a^n + 1 = a^{mq} + 1 = (a^m + 1)(a^{m(q-1)} - a^{m(q-2)} + a^{m(q-3)} - \cdots - a^m + 1).$$

(Också löst av *Con Amore Problemgruppe, Erik Hansen* och *Kåre Vedøy*)

525. (*Con Amore Problemgruppe, København, DK*) Vi vil kalde en permutation $(a_1, a_2, \ldots, a_{2n})$ af tallene $1, 2, \ldots, 2n$ for en *tilladt* permutation, hvis og kun hvis $|a_{i+1} - a_i|$ for $i = 1, 2, \ldots, 2n - 1$ er forskellige tal; og vil sige at en tilladt permutation er af type I, hvis og kun hvis $a_1 - a_{2n} = n$, og af type II, hvis og kun hvis $1 \leq a_{2k} \leq n$ for ethvert $k = 1, 2, \ldots, n$. Vi bemærker indledningsvis at det for en tilladt permutation gælder at

$$\sum_{i=1}^{2n-1} |a_{i+1} - a_i| = 1 + 2 + \cdots + 2n - 1 = (2n-1)n = 2n^2 - n.$$

Betragt nu først en permutation av type II. Idet vi sætter $d = a_1 - a_{2n} > 0$ samt medregner d i summen av alle numeriske differenser mellem to naboled (vi kan tænke os tallene $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ placeret ækvidistant på en cirkel i stedet for på et linjestykke), er den samlede sum s altså

$$s = 2n^2 - n + d.$$

Vi kan også beregne den samlede sum ved at bemærke at for en permutation af type II gælder at

$$
\begin{aligned}
s =&(a_1 - a_2) + (a_3 - a_2) + (a_3 - a_4) + (a_5 - a_4) + \dots \\
&\dots + (a_{2n-1} - a_{2n}) + (a_1 - a_{2n}) = \\
=&2\sum_{i=1}^{n} a_{2i-1} - 2\sum_{i=1}^{n} a_{2i} = 2\big((n+1) + (n+2) + \dots + 2n\big) - 2(1 + 2 + \dots + n) = \\
=&2n^2,
\end{aligned}
$$

som sammen med (2) fortæller at $n = d$, altså at permutationen også er af type I. Dernæst betragter vi en permutation af type I, dvs. en tilladt permutation for hvilken $d = a_1 - a_{2n} = n$; altså gælder at $a_1 > n$ og $a_{2n} \leq n$. Antag at permutationen ikke er af type II; for mindst ét k bland tallene $1, 2, \dots, n$ gælder da at $a_{2k-1} \leq n$ eller at $a_{2k} > n$. Lad nu k være det mindste sådanne tal. Vi bemærker så at hvis $a_{2k-1} \leq n$ (i hvilket tilfælde $k > 1$), så er $|a_{2k-1} - a_{2k-2}|$ differens mellem to tal som begge er mindre end eller lig med n; og hvis $a_{2k-1} > n$ og altså også $a_{2k} > n$, så er $|a_{2k} - a_{2k-1}|$ differens mellem to tal som begge er større end n. På den anden side fremgår af (1) i forbindelse med (3) at for at nå op på sum $2n^2$, må samtlige differenser være mellem et tal større end n og et tal mindre end n. Den betragtede permutation er således ikke en gang tilladt, hvilket er i modstrid med at den er af type I. En permutation af type I er altså også af type II.

Hermed er påstanden alt i alt bevist.

Anm. Denna uppgift uppgav vi vara hämtad från en vietnamesisk olympiadtävling, men detta är inte hela sanningen. *Torleiv Kløve* från universitetet i Bergen berättar att han skapade problemet 1995 för *American Mathematically Monthly* (oppgave 10460, vol. 102, nr. 6, side 553), så det känns följdriktigt att uppgiften efter sin rundresa nu har hamnat i *Normat.*

526. (*Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK*) Antag, at funktionen $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ opfylder

1) $f(0) = 2$, $f(1) = 3$,

2) for alle rationelle tal x og alle hele tal n gælder

$$f(x+n) - f(x) = n\,(f(x+1) - f(x)) \ ,$$

3) for alle rationale tal $x \neq 0$ er $f(x) = f\left(\frac{1}{x}\right)$.

Sætter vi $x = 0$ i 2), får vi af 1)

$$f(n) = n + 2 \quad \text{for alle hele tal } n. \tag{1}$$

Vi vil nu bevise, at der for vilkårlige hele tal p og q med $q > 0$ og $(p, q) = 1$ gælder

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = pq + 2\,. \tag{2}$$

Beviset føres ved induktion efter q.

For $q = 1$ følger (2) af (1).

Betragt et rationalt tal p/q, hvor $(p, q) = 1$ og $q > 1$, og antag (induktionsantagelsen), at (2) er opfyldt for alle rationale tal (brøker) med nævner $< q$. Vi skal bevise, at (2) er opfyldt for p/q.

Lad n være det mindste hele tal $> p/q$ og sæt $x = p/q - n$.

Så er $-1 < x < 0$, dvs $-q < p - nq < 0$, og af induktionsantagelsen og 3) følger, at

$$f(x) = f\left(\frac{p - nq}{q}\right) = f\left(\frac{-q}{nq - p}\right) = (p - nq)q + 2\,.$$

Analogt ses det, at

$$f(x + 1) = f\left(\frac{p - (n - 1)q}{q}\right) = (p - (n - 1)q)q + 2\,,$$

og altså

$$f(x + 1) - f(x) = q^2\,,$$

der indsat i 2) giver

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f(x + n) = f(x) + nq^2 = pq + 2\,, \quad \text{q.e.d.}$$

Det er let at eftervise, at den ved (2) definerede funktion har egenskaberne 1), 2) og 3).

For at finde samtlige løsninger $x = p/q$ til ligningen $f(x) = 2009$, skal vi se på ligningen $pq = 2007$. Da p og q skal være indbyrdes primiske, og 2007 har primfaktoriseringen $2007 = 3^2 \times 223$, ser vi, at løsningerne er

$$\frac{1}{2007}, \quad \frac{9}{223}, \quad \frac{223}{9}, \quad 2007\,.$$

(Också löst av *Con Amore Problemgruppe* och *Erik Hansen*)

Tillägg. I föregående nummer av Normat presenterade *Kent Holing* (namnet hade tyvärr fallit bort) lösningen till uppgift 506. Där fanns en hänvisning till uppgift 529a), men som rätteligen skulle ha varit 530a).