Jesus Guilleras formler för $1/\pi^2$ och superkongruenser

Gert Almkvist och Arne Meurman

Matematikcentrum
Lunds universitet
Gert.Almkvist@math.lu.se
Arne.Meurman@math.lu.se

1. Introduktion.

För nästan 100 år sedan fann Ramanujan 17 serier för $1/\pi$ där

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n(1/4)_n(3/4)_n}{n!^3}(26390n+1103)\frac{1}{99^{4n+2}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{2}}$$

är den mest spektakulära. Här är $(a)_0 = 1$ och $(a)_n = a(a+1)(a+2)...(a+n-1)$ för $n \geq 1$ Pochhammersymbolen. Formlerna bevisades långt senare av bröderna Borwein med hjälp av modulära former (se [5]). På 1980-talet fann bröderna Chudnovsky ([6]) formeln

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n(1/6)_n(5/6)_n}{n!^3}(545140134n+13591409)\frac{(-1)^n}{53360^{3n+2}} = \frac{3}{2\pi\sqrt{10005}}$$

vilken de använde för att beräkna π med drygt 1 miljard decimaler, vilket var världsrekord då. Beräkningarna utfördes på en hembyggd dator, som utvecklade så mycket värme att brödernas fruar flyttade ut från lägenheten.

Det väckte stor sensation då Jesus Guillera 2002 fann åtta liknande formler för $1/\pi^2$, t.ex.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n^3(1/4)_n(3/4)_n}{n!^5}(120n^2+34n+3)\frac{1}{16^n} = \frac{32}{\pi^2}$$

Han kunde bevisa tre av sina formler med WZ-metoden. De andra fann han genom att använda Maples PSLQ". Guillera är egentligen amatör men har nyligen disputerat i Zaragoza med Zudilin om biträdande handledare. Gourevich fann 2002 (utan bevis) formeln

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n^7}{n!^7}(168n^3+76n^2+14n+1)\frac{1}{64^n} = \frac{32}{\pi^3}$$

Genom att kvadrera formler för $1/\pi$ har Zudilin och den förstnämnde författaren producerat otaliga formler för $1/\pi^2$. Man kan också transformera Guilleras formler ([2],[3],[16],[17]). Men dessa formler är av lägre klass än Guilleras genuina formler.

Van Hamme oberverade 1996 att om man i Ramanujans formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1/2)_n^3}{n!^3}(4n+1)(-1)^n = \frac{2}{\pi}$$

i stället summerade till $p-1$ ($p>2$ primtal) så gällde

$$\sum_{n=0}^{p-1} \frac{(1/2)_n^3}{n!^3}(4n+1)(-1)^n \equiv p\Big(\frac{-1}{p}\Big) \mod p^3$$

Här är $\left(\frac{a}{p}\right)$ Legendresymbolen, dvs $\left(\frac{a}{p}\right)=1$ om a är en kvadrat $\mod p$, annars $\left(\frac{a}{p}\right)=-1$. Mortenson bevisade detta ([14]). Zudilin observerade att även andra av Ramanujans formler gav kongruenser, t.ex.

$$\sum_{n=0}^{p-1} \frac{(1/2)_n(1/4)_n(3/4)_n}{n!^3}(26390n+1103)\frac{1}{99^{4n+2}} \equiv 1103p\Big(\frac{-2}{p}\Big) \mod p^3 \text{ för } p>11$$

(inget bevis). Även Guilleras formler gav kongruenser. Genom att använda WZ-metoden lyckades Zudilin bevisa

$$\sum_{n=0}^{p-1} \frac{(1/2)_n^3(1/4)_n(3/4)_n}{n!^5}(120n^2+34n+3)\frac{1}{16^n} \equiv 3p^2 \mod p^5 \text{ för } p>2$$

Gourevichs formel ger (inget bevis)

$$\sum_{n=0}^{p-1} \frac{(1/2)_n^7}{n!^7}(168n^3+76n^2+14n+1)\frac{1}{64^n} \equiv p^3\Big(\frac{-1}{p}\Big) \mod p^7 \text{ om } p>2$$

2. Guilleras bevis.

WZ-metoden är ”named after two complex variables”, påstår de modesta uppfinnarna Herb Wilf och Doron Zeilberger (jämför med Banachs B-rum !). Den föregicks av Bill Gospers ”creative telescoping” (Zudilin anger att metoden fanns redan 1859 hos G.Bauer [4]). Vi visar hur den fungerar i Guilleras bevis för en av hans formler

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)_n^3(1/4)_n(3/4)_n}{n!^5}(120n^2+34n+3)\frac{1}{16^n}=\frac{32}{\pi^2}$$

Först visar vi hur man med hjälp av PSLQ i Maple kan hitta formeln. Beräkna

$$H(k)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1/2)_n^3(1/4)_n(3/4)_n}{n!^5}n^k\frac{1}{16^n}$$

för $k=0,1,2$ med, säg 20 decimaler. Sedan ger

PSLQ([H(2),H(1),H(0),evalf(1/Pi^2)]);

svaret

[120,34,3,-32]

Vi har

$$\frac{(1/2)_n}{n!}=4^{-n}\binom{2n}{n}$$

och

$$\frac{(1/4)_n(3/4)_n}{n!^2}=2^{-6n}\binom{2n}{n}\binom{4n}{2n}$$

Det följer

$$\frac{(1/2)_n^3(1/4)_n(3/4)_n}{n!^5}=2^{-12n}\binom{2n}{n}^4\binom{4n}{2n}$$

Så Guillera gissar funktionen

$$G(n,k)=\frac{(-1)^k}{2^{16n+4k}}(120n^2+84nk+34n+10k+3)\frac{\binom{2k}{k}^3\binom{2n}{n}^4\binom{4n-2k}{2n-k}}{\binom{2n}{k}\binom{n+k}{n}^2}$$

Zeilbergers imaginäre medarbetare EKHAD ger kompanjonen

$$F(n,k)=512\frac{(-1)^k}{2^{16n+4k}}\frac{n^3}{4n-2k-1}\frac{\binom{2k}{k}^3\binom{2n}{n}^4\binom{4n-2k}{2n-k}}{\binom{2n}{k}\binom{n+k}{n}^2}$$

så att

$$F(n+1,k)-F(n,k)=G(n,k+1)-G(n,k)$$

denna identitet verifieras lättast genom att dividera båda sidor med $F(n,k)$ och använda ”expand” och ”simplify”.

Vi får

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k+1) - \sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = \lim_{n\to\infty}(F(n+1,k) - F(0,k) = 0$$

ty

$$F(n,k) \to 0 \;\text{ då }\; n \to \infty$$

Vi har

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{4^n}{\sqrt{\pi n}}$$

då $n \to \infty$. Det följer

$$\frac{\binom{2k}{k}^3 \binom{2n}{n}^4 \binom{4n-2k}{2n-k}}{\binom{2n}{k}\binom{n+k}{n}^2} \le \binom{2k}{k}^3 \binom{2n}{n}^4 \binom{4n-2k}{2n-k}$$

$$\sim \frac{4^{3k}}{(\pi k)^{3/2}} \frac{4^{4n}}{(\pi n)^2} \frac{4^{2n-k}}{\sqrt{\pi(2n-k)}} \sim \frac{2^{12n+4k}}{\pi^4 \sqrt{2} k^{3/2} n^{5/2}} \quad \text{för } \; n >> k$$

Alltså

$$|F(n,k)| \le \frac{32\sqrt{2}}{\pi^4} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{k^{3/2}} \frac{1}{16^n} \to 0 \;\text{ då }\; n \to \infty$$

Det följer att

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = A = \text{konstant oberoende av } \; k.$$

Utvidga $G(n,z)$ till komplexa z genom

$$G(n,z) = \frac{\cos(\pi z)}{2^{16n+4z}}(120n^2 + 84nz + 34n + 10z + 3) \frac{\binom{2z}{z}^3 \binom{2n}{n}^4 \binom{4n-2z}{2n-z}}{\binom{2n}{z}\binom{n+z}{n}^2}$$

och sätt

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n,z) - A$$

Vi skall nu använda följande sats av Fritz Carlson:

Låt $H(z)$ vara en hel funktion sådan att $H(z) = 0$ för $z = 0, 1, 2, ...$ och $H(z) = O(\exp(c\,|z|))$ då $\mathrm{Re}(z) \ge 0$ där $c < \pi$. Då är $H(z) \equiv 0$.

Observera att det är väsentligt att $c < \pi$. Om $c = \pi$ är $\sin(\pi z)$ ett motexempel. Vi behöver

$$|\Gamma(x+iy)| \sim \sqrt{2\pi}\, |y|^{x-1/2} \exp(-\frac{\pi}{2}\,|y|) \quad \text{då } \; |y| \to \infty$$

Det följer

$$\left|\binom{2z}{z}\right| = \left|\frac{\Gamma(2x+1+2iy)}{\Gamma(x+1+iy)}\right| \sim \frac{4^x}{\sqrt{\pi\,|y|}} \;\; \text{ då } \; |y| \to \infty$$

$$\left|\binom{n+z}{n}\right| = \left|\frac{\Gamma(n+x+1+iy)}{n!\Gamma(x+1+iy)}\right| \sim \frac{|y|^n}{n!}$$

$$\left|\binom{2n}{z}\right| = \left|\frac{(2n)!}{\Gamma(x+1iy)\Gamma(2n-x+1+iy)}\right| \sim \frac{(2n)!\exp(\pi\,|y|)}{|y|^{2n+1}}$$

Vi får

$$|\cos(\pi z)| \sim \frac{1}{2}\exp(|y|)$$

$$\left|\binom{2k}{k}^3\binom{2n}{n}^4\binom{4n-2k}{2n-k}\right| \sim \frac{4^{3x}}{(\pi\,|y|)^{3/2}}\frac{4^{4n}}{(\pi n)^2}\frac{4^{4n-2x}}{(2\pi\,|y|)^{1/2}} \quad \text{då} \quad |y| \to \infty$$

$$\left|\binom{n+z}{n}^2\binom{2n}{z}\right| \sim \frac{|y|^{2n}}{n!^2}\frac{(2n)!\exp(\pi\,|y|)}{|y|^{2n+1}}$$

Alltså

$$|G(n,z)| = O(4^{-n-x}n^{-3/2}\,|y|^{-1/2}) = O(\exp(c\,|z|) \;\text{ för alla }\; 0 < c < \pi$$

Så vi kan använda Carlsons sats och får

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = A$$

för alla $k > 0$. Sätt $k = 1/2$. Då blir $G(n, 1/2) = 0$ för $n \geq 1$ och vi får

$$A = \lim_{k\to 1/2}(G(0,k) = \frac{32}{\pi^2}$$

För att visa detta behöver vi

Lemma 1.

$$\Gamma(-n+\varepsilon) = \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{\varepsilon} + O(1)$$

(för ett bevis se [1]).

Vi får

$$\cos(\pi(\frac{1}{2}+\varepsilon))\binom{-2(\frac{1}{2}+\varepsilon)}{-(\frac{1}{2}+\varepsilon)} = -\sin(\pi\varepsilon)\frac{\Gamma(-2\varepsilon)}{\Gamma(1/2-\varepsilon)^2}$$

$$= -(\pi\varepsilon + O(\varepsilon^3))(\frac{-1}{2\varepsilon} + O(1))\frac{1}{(\sqrt{\pi})^2} = \frac{1}{2} + O(\varepsilon)$$

och

$$\binom{1}{1/2} = \frac{1}{\Gamma(3/2)^2} = \frac{4}{\pi}$$

$$\binom{0}{1/2} = \frac{1}{\Gamma(3/2)\Gamma(1/2)} = \frac{2}{\pi}$$

vilket avslutar beviset.

Anmärkning.

Det gäller ju

$$\sum_{n=0}^{\infty} G(n,k) = \frac{32}{\pi^2}$$

för alla heltal $k > 0$ Men för $n < k/2$ måste man i $G(n,k)$ ersätta

$$\frac{\binom{4n-2k}{2n-k}}{\binom{2n}{k}} \quad \text{med} \quad \frac{\binom{k}{2n}}{\binom{2k-4n}{k-2n}}$$

Detta visas lätt med hjälp av Lemma 1.

3. Wadim Zudilins bevis för en superkongruens.

Sats:

$$\sum_{n=0}^{p-1} \frac{(1/2)_n^3 (1/4)_n (3/4)_n}{n!^5} (120n^2+34n+3) \frac{1}{16^n} \equiv 3p^2 \quad \mod p^5 \text{ där } p > 2 \text{ är primtal.}$$

Bevis:

Först observerar vi att

$$(1/4)_n (3/4)_n = 4^{-n} (1/2)_{2n}$$

så vi skall bevisa

$$\sum_{n=0}^{p-1} \frac{(1/2)_n^3 (1/2)_{2n}}{n!^5} (120n^2 + 34n + 3) \frac{1}{64^n} \equiv 3p^2 \quad \mod p^5$$

Fallet $p = 3$ kontrolleras lätt, så antag att $p \geq 5$. Zudilin använder inte samma F och G som vi hade tidigare. Låt

$$F(n,k) = (120n^2 - 84nk + 34n - 10k + 3) \frac{(1/2)_n^3 (1/2)_{2n+k}}{2^{6n} n!^3 (n-k)!^2 (1/2)_k^3}$$

och

$$G(n,k) = \frac{(1/2)_n^3 (1/2)_{2n+k-1}}{2^{6n-8} (n-1)!^3 (n-k)!^2 (1/2)_k^3}$$

där $F(n,k) = G(n,k) = 0$ om $n < k$. Man visar lätt

$$F(n,k-1) - F(n,k) = G(n+1,k) - G(n,k)$$

Det följer

$$\sum_{n=0}^{p-1} F(n,k-1) - \sum_{n=0}^{p-1} F(n,k) = G(p,k) - G(0,k) = G(p,k)$$

Nu gäller

$$G(p,k) = \frac{(1/2)_p^3 (1/2)_{2p+k-1}}{2^{6p-8}(p-1)!^3 (p-k)!^2 (1/2)_k^3} \equiv 0 \quad \mod \ p^5 \ \text{ då } \ k = 1,2,3..,(p-1)/2$$

ty

$$(1/2)_p = \frac{1}{2}\frac{3}{2}...(\frac{1}{2}+p-1) = \frac{1}{2^p}\cdot 1\cdot 3\cdot ...\cdot(2p-1) \equiv 0 \quad \mod \ p$$

och

$$(1/2)_{2p+k-1} = \frac{1}{2}\frac{3}{2}...(\frac{1}{2}+2p+k-2) = \frac{1}{2^{2p+k-1}}\cdot 1\cdot 3\cdot ...\cdot(4p+2k-3) \equiv 0 \quad \mod p^2$$

$$(1/2)_k = \frac{1}{2}\frac{3}{2}...(\frac{1}{2}+k-1) = \frac{1}{2^k}\cdot 1\cdot 3\cdot ...\cdot(2k-1) \not\equiv 0 \quad \mod \ p$$

Det följer

$$\sum_{n=0}^{p-1} F(n,0) \equiv \sum_{n=0}^{p-1} F(n,\frac{p-1}{2}) \quad \mod \ p^5$$

Vidare har vi

$$ord_p(F(n,\frac{p-1}{2}) = ord_p \frac{(1/2)_n^3 (1/2)_{2n+(p-1)/2}}{2^{6n-8} n!^3 (n-(p-1)/2)!^2 (1/2)_{(p-1)/2}^3}$$

$$\geq ord_p((1/2)_n^3 (1/2)_{2n+(p-1)/2}) \geq ord_p((1/2)_{(p+1)/2}(1/2)_{p+1+(p-1)/2}) = 5$$

för $n = (p+1)/2, (p+3)/2, .., p-1$ ty

$$(1/2)_{(p+1)/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot ....\cdot(\frac{1}{2}+\frac{p+1}{2}-1) = \frac{1}{2^{(p+1)/2}} 1\cdot 3\cdot ...\cdot p \equiv 0 \quad \mod \ p$$

och

$$(1/2)_{p+1+(p+1)/2} = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot ....\cdot(\frac{1}{2}+p+1+\frac{p+1}{2}-1)$$

$$= \frac{1}{2^{p+1+(p+1)/2}} 1\cdot 3\cdot ...\cdot(3p+2) \equiv 0 \quad \mod \ p^2$$

Detta ger

$$\sum_{n=0}^{p-1} F(n,0) \equiv \sum_{n=(p-1)/2}^{p-1} F(n,\frac{p-1}{2}) \equiv F(\frac{p-1}{2},\frac{p-1}{2}) \quad \mod \ p^5$$

Nu får vi

$$F(\frac{p-1}{2},\frac{p-1}{2}) = \frac{3p(3p-2)}{2^{3p-3}((p-1)/2)!^3}\frac{(3p-3)!}{((3p-3)/2)!2^{3p-3}}$$

$$= \frac{3p}{2^{6p-6}}\frac{(3p-2)!}{((p-1)/2)!^3((3p-3)/2)!} \equiv 3p^2 \mod p^5$$

vilket följer från

Lemma 2.

Sätt $n=(p-1)/2$. Om $p \geq 5$ är ett primtal så gäller

$$\frac{(6n+1)!}{(3n)!n!^3} \equiv 2^{12n}p \mod p^4$$

Bevis:

Vi har

$$\frac{(6n+1)!}{(3n)!} = \frac{(6n+2)!}{2(3n+1)!} = \frac{(3p-1)!}{2((3p-1)/2)!}$$

$$= \frac{4n+2}{2}\prod_{j=1}^{n}(3p-j)(2p+j)(2p-j)$$

$$= pn!^3\prod_{j=1}^{n}(1-\frac{2p}{j})(1+\frac{2p}{j})(1-\frac{3p}{j})$$

$$= pn!^3\prod_{j=1}^{n}(1-\frac{3p}{j}+\frac{4p^2}{j^2}+O(p^3))$$

$$= pn!^3\left\{1-3pH_n+\frac{9p^2}{2}(H_n^2-H_n')-4p^2H_n'+O(p^3)\right\}$$

där

$$H_n = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j} \quad \text{och} \quad H_n' = \sum_{j=1}^{n}\frac{1}{j^2}$$

Men $H_n' \equiv 0 \mod p$ ger

$$\frac{(6n+1)!}{(3n)!n!^3} \equiv p\left\{1-3pH_n+\frac{9}{2}p^2H_n^2\right\} \mod p^4$$

För att avsluta beviset behöver vi

Sats (Emma Lehmer 1938)

Definera Fermatkvoten

$$q_2 = \frac{2^{p-1}-1}{p}$$

Då gäller

$$H_{(p-1)/2} \equiv -2q_2 + pq_2^2 \mod p^2$$

Jämför med Wolstenholmes sats

$$H_{p-1} \equiv 0 \mod p^2$$

som är lätt att bevisa. Emma Lehmers bevis är synnerligen invecklat. I ett Appendix ger vi ett förenklat bevis.

Vi får

$$q_2 \equiv -\frac{H_n}{2} + \frac{p}{2}q_2^2 \equiv -\frac{H_n}{2} + \frac{p}{8}H_n^2 \mod p^2$$

vilket ger

$$2^{p-1} \equiv 1 - \frac{p}{2}H_n + \frac{p^2}{8}H_n^2 \mod p^3$$

Upphöj denna kongruence till 6

$$2^{12n} \equiv 1 - 3pH_n + \frac{9}{2}p^2H_n^2 \mod p^3$$

och

$$\frac{(6n+1)!}{(3n)!n!^3} \equiv 2^{12n}p \mod p^4$$

Anmärkning 1.

Guillera fann nyligen en formel av ett annat slag, nämligen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1/2}\binom{2n}{n}^2\binom{4n}{2n}^3(672n^3+472n^2+78n+\frac{9}{2})\frac{1}{2^{22n}} = \frac{64\sqrt{2}}{\pi^2}$$

Det finns också en medföljande superkongruens

$$\sum_{n=0}^{p-1} \frac{1}{n+1/2}\binom{2n}{n}^2\binom{4n}{2n}^3(672n^3+472n^2+78n+\frac{9}{2})\frac{1}{2^{22n}} \equiv 9\Big(\Big(\frac{2}{p}\Big)p^2\Big) \mod p^5$$

Det finns inga bevis.

Anmärkning 2.

Guillera har lyckats bevisa ytterligare två identiteter (se [11])

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^4\frac{8n^2+8n+1}{(n+1)^2}\frac{1}{2^{8n}} = \frac{16}{\pi^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^4\binom{3n}{n}(74n^2+27n+3)\frac{1}{2^{12n}} = \frac{48}{\pi^2}$$

Båda leder till superkongruenser $\mod p^5$. Vidare har han tillsammans med Zudilin funnit och bevisat följande (se [12])

$$\sum_{n=0}^{p-1}(-1)^n\binom{2n}{n}^5(10n^2+6n+1)\frac{1}{2^{8n}} \equiv p^2 \mod p^5$$

Observera att serien

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\binom{2n}{n}^5(10n^2+6n+1)\frac{1}{2^{8n}}$$

divergerar, men kan ges värdet $4/\pi^2$. Låt $\theta = x\frac{d}{dx}$. Då kan man beräkna summan i Maple genom att substituera $x=-4$ i

$$(10\theta^2+6\theta+1)_5F_4(1/2,1/2,1/2,1/2,1/2;1,1,1,1;x)$$

som ger svaret 0.405284734569 som är nära $4/\pi^2$.

Genom att använda PSLQ fann vi den märkliga formeln

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{2n}{n}^4\binom{3n}{n}\frac{74n^3+135n^2+69n+6}{(n+1)^3}\frac{1}{2^{12n}} = \frac{64}{\pi^2}$$

med kongruensen

$$\sum_{n=0}^{p-1}\binom{2n}{n}^4\binom{3n}{n}\frac{74n^3+135n^2+69n+6}{(n+1)^3}\frac{1}{2^{12n}} \equiv 6p^2 \mod p^3$$

Appendix. Ett bevis för Emma Lehmers Sats.

Vi definierar Bernoullital, B_n genom den exponentiella genererande funktionen

$$\frac{t}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n\frac{t^n}{n!}$$

och Bernoullipolynom, $B_n(x)$ genom

$$\frac{te^{xt}}{e^t-1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!}$$

Övning 1:

Visa

(a) $B_n(0) = B_n$

(b) $B_{2n-1} = 0$ om $n > 1$ Ledning;

$$\frac{t}{e^t - 1} = -\frac{t}{2} + \frac{t}{2}\coth(\frac{t}{2})$$

(c) $B_n(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j x^{n-j}$

(d) $B_n'(x) = nB_{n-1}(x)$

(e) $B_n(1/2) = (2^{1-n} - 1)B_n$ Ledning:

$$\frac{te^{t/2}}{e^t - 1} = 2\frac{t/2}{e^{t/2} - 1} - \frac{t}{e^t - 1}$$

(f) $B_{k+1}(x+1) - B_{k+1}(x) = (k+1)x^k$

(g) $\sum_{j=0}^{n} j^k = \frac{1}{k+1}\{B_{k+1}(n+1) - B_{k+1}\}$ Ledning: Teleskopsumma!

(h) $B_{2k} = T/N$ där N är produkten av alla primtal p sådana att $p-1$ delar $2k$. Detta är Clausen-von Staudts sats (för ett bevis se [7]).

(i) $\sum_{j=0}^{(p-1)/2} j^{2k} \equiv p(2^{-2k} - 2^{-1})B_{2k} \mod p^3$ om $p-1$ inte delar $2k-2$
Ledning:

$$B_{2k+1}(\frac{1}{2} + \frac{p}{2}) = B_{2k+1}(\frac{1}{2}) + \frac{p}{2}B_{2k+1}'(\frac{1}{2}) + ...$$

(j) $\sum_{j=0}^{(p-1)/2} j^{2k-1} \equiv k^{-1}(2^{-2k} - 1)B_{2k} \mod p^2$ om $p-1$ inte delar $2k-2$.

Definition: (a) $q_j = (j^{p-1} - 1)/p$ Fermatkvoten, ett heltal enligt Fermats lilla sats

(b) $\omega_p = ((p-1)! + 1)/p$ Wilsonkvoten, ett heltal enligt Wilsons sats.

Övning 2:

Visa

(a) $q_{ab} \equiv q_a + q_b \mod p$

(b) $\sum_{a=1}^{p-1} q_a \equiv \omega_p \mod p$ Ledning: VL= $q_{(p-1)!}$ och $(p-1)! = -1 + p\omega_p \mod p$

(c) $p - 1 + pt\omega_p \equiv pB_{t(p-1)} \mod p^2$ Ledning: $r^{t(p-1)} \equiv 1 + ptq_r \mod p^2$

Bevis för Emma Lehmer's sats.

Vi har

$$1 \equiv 1 - (pq_r)^2 = 1 - (r^{p-1} - 1)^2 = 2r^{p-1} - r^{2p-2} \mod p^2$$

Det följer

$$S = \sum_{r=1}^{(p-1)/2} \frac{1}{r} \equiv \sum_{r=1}^{(p-1)/2} \frac{1}{r}(2r^{p-1} - r^{2p-2}) = \sum_{r=1}^{(p-1)/2} (2r^{p-2} - r^{2p-3})$$

Använder vi **1** (j) får vi

$$S \equiv \frac{4}{p-1}(2^{1-p}-1)B_{p-1} - \frac{1}{p-1}(2^{2-2p}-1)B_{2p-2}$$

Med **2** (c) och $2^{p-1} = 1 + pq_2$ får vi

$$S \equiv \frac{4}{p-1}\frac{1-2^{p-1}}{p2^{p-1}}(p-1+p\omega_p) - \frac{1}{p-1}\frac{1-2^{2p-2}}{p2^{2p-2}}(p-1+2p\omega_p)$$

$$= -\frac{4q_2}{(p-1)(1+pq_2)}(p-1+p\omega_p) - \frac{(1-(1+pq_2)^2)}{p(p-1)(1+pq_2)^2}(p-1+2p\omega_p)$$

$$\equiv -\frac{4q_2}{1+pq_2} + 4pq_2\omega_p + \frac{2q_2+pq_2^2}{(1+pq_2)^2} + \frac{2p\omega_p}{p-1}\frac{2q_2+pq_2^2}{(1+pq_2)^2}$$

$$\equiv -4q_2(1-pq_2) + 4pq_2\omega_p + 2q_2(1-2pq_2) + pq_2^2 - 4p\omega_p q_2$$

$$= -2q_2 + pq_2^2 \quad \mod p^2$$

Övning (Don Zagier):

Efter allt detta om Bernoullital kan vi inte avhålla oss från att visa på ett magiskt arbete av Zagier.

Definiera de modifierade Bernoullitalen

$$B_n^* = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+j}{n-j}\frac{B_j}{j}$$

(a) Upptäck att B_n^* för n udda antar bara fyra värden, nämligen $\pm 1/4$ och $\pm 3/4$. Vidare gäller $B_{n+12}^* = B_n^*$ om n är udda.

(b) Definiera

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{n} x^n$$

som divergerar för alla $x \neq 0$ (förr blev man mobbad i Lund om man skrev upp en sådan serie på tavlan).

Visa

$$F(-x) = F(x) + x \quad \text{och} \quad F\Big(\frac{x}{1-x}\Big) = F(x) + x + \log(1-x)$$

(c) Definiera

$$F_\lambda(x) = F\Big(\frac{x}{1-\lambda x + x^2}\Big) - \log(1-\lambda x + x^2)$$

Då är

$$F_2(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_j}{j} \frac{x^j}{(1-x)^{2j}} - 2\log(1-x) = 2\sum_{n=1}^{\infty} B_n^* x^n$$

Visa att

$$F_{\lambda+1}(x) = F_\lambda(x) + \frac{x}{1-\lambda x + x^2} = F_{-\lambda}(-x)$$

Ledning:

$$\frac{x}{1-(\lambda+1)x+x^2} = \frac{\frac{x}{1-\lambda x+x^2}}{1-\frac{x}{1-\lambda x+x^2}}$$

(d) Avsluta med

$$4\sum_{n=1}^{\infty} B_{2n-1}^* x^{2n-1} = F_2(x) - F_2(-x)$$

$$= F_2(x) - F_1(x) + F_1(x) - F_0(x) + F_0(x) - F_{-1}(x) = \frac{3x - x^3 - x^5 + x^7 + x^9 - 3x^{11}}{1-x^{12}}$$

(observera att $F_2(-x) = F_{-1}(x)$).

(e) För B_n^* där n är jämnt gäller följande asymptotiska formel

$$B_{2n}^* = (-1)^n \pi \left\{Y_{2n}(4\pi) + Y_{2n}(8\pi) + Y_{2n}(12\pi) + ...\right\}$$

där Y_{2n} är en Besselfunktion (se [15]).

Referenser

[1] G.Almkvist, The art of finding Calabi-Yau differential equations, to appear in Contempary Math., arXiv AG/0902.4786

[2] G.Almkvist, Ramanujan-like formulas for $1/\pi^2$ á la Guillera and Zudilin and Calabi-Yau differential equations, Computer Science J. of Moldova, 17 (2009), 1-21.

[3] G.Almkvist, Transformations of Jesus Guillera's formulas for $1/\pi^2$, arXiv NT/0911.4849

[4] G.Bauer, Von den Coefficienten der Reihen von Kugelfunktionen einer Variablen, J.Reine Angew.Math. 56 (1859) 101-121.

[5] J.M.Borwein, P.B.Borwein, Pi and the AGM, Wiley Interscience, 1987.

[6] D.V.Chudnovsky, G.V.Chudnovsky, Approximations and complex multiplication according to Ramanujan, in Ramanujan revisited", Ed. G.E.Andrews, B.C.Berndt, R.A.Rankin, Academic Press 1987.

[7] H.Cohen, Number Theory, Vol II, Analytic and modern tools, Springer Verlag, 2007

[8] J.Guillera, Series de Ramanujan: Generalizaciones y conjeturas (Spanska), Thesis, Zaragoza 2007.

[9] J.Guillera, Some binomial series obtained by the WZ-method, Adv. in Appl. Math. 29 (2002), 599-603.

[10] J.Guillera, Hemsida, http://personal.auna.com/guillera

[11] J.Guillera, A new Ramanujan-like series for $1/\pi^2$, arXiv, NT/1003.1915.

[12] J.Guillera, W.Zudilin, "Divergent" Ramanujan-type supercongruences, preprint 2010.

[13] E.Lehmer, On congruences involving Bernoulli numbers and the quotients of Fermat and Wilson, Ann. of Math.,39 (1938) 350-360.

[14] E.Mortenson, A p-adic supercongruence conjecture of van Hamme, Proc. Amer. Math. Soc. 136 (2008) 4321-4328.

[15] D.Zagier, A modified Bernoulli number, Neuw Archief voor Wiskunde, 16 (1998) 63-72.

[16] W.Zudilin, Quadratic transformations and Guillera's formulae for $1/\pi^2$, Math. Notes, 81 (2007) 297-301.

[17] W.Zudilin, More Ramanujan-type formula for $1/\pi^2$, Uspeki Mat. Nauk 62 (2007)

[18] W.Zudilin, Ramanujan-type formulae for $1/\pi$: A second wind? in Modular forms and string duality, Ed. N.Yui, H.Verrill, C.F.Doran, AMS, Providence 2008

[19] W.Zudilin, Ramanujan-type supercongruences, J.Number Theory, 129 (2009) 1848-1857.