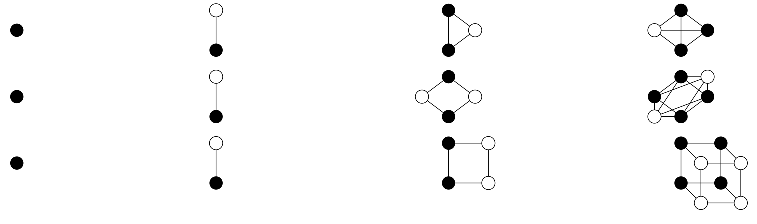
 Normat **58**:2, 76–92 (2010)

Oktahedergruppen och dess generaliseringar II - Hyperkuben och dess dual

Ulf Persson.

Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola och
Göteborgs Universitet
ulfp@chalmers.se

Tre regelbundna polytoper existerar i alla dimensioner. Konstruktionen av dessa är enkel och kan beskrivas rekursivt. Vi betecknar dem preliminärt med T_n, K_n, O_n. Med start $T_0 = K_0 = O_0$ lika med en punkt. (Den triviala 0-dimensionella). Första konstruktionen gäller T-serien. Tag en punkt P utanför T_n och sammanbind den med alla hörn till T_n, detta ger nya kanter. På motsvarande sätt får vi nya sidor genom att bilda trianglar med kanterna till T_n. Den uppkomna figuren betecknar vi med $T_{(n+1)}$. För att få regelbundenhet måste vi välja punkten P med viss omsorg. Uppenbarligen är T_n n-simplexet. I den andra konstruktionen väljer vi $O_1 = T_1$ och två punkter P, Q på ömse sidor om O_n och sammanbinder var och en av dessa med hörnen till O_n. Och slutligen den tredje konstruktionen tar vi två parallella kopior av K_n och förbinder motsvarande punkter. De första fallen visas nedan.



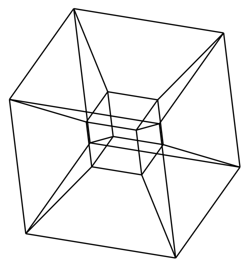
Uppenbarligen rör det sig om tetrahedrar, oktahedrar och kuber i högre dimensioner. I de två senare fallen är det lätt att ge ko-ordinater för hörnen, medan det är något mera involverat i det första fallet. Vi skall nu koncentrera oss på hyperkuben K_4 och dess dual O_4.

Hyperkuben

Låt oss betrakta hyperkuben i $\mathbf{R^4}$. Den är generaliseringen av kvadraten och kuben till 4 -dimensioner. Den kallas även för 8-cell, ty den begränsas av åtta kuber. Ett annat populärt namn är tesserakten. Vi kan bilda den från två kuber i två parallella hyperplan, genom att sammanbinda motsvarande hörn. Vi kan låta den vara given av de sexton hörn som kan skrivas på formen $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$. Dessa ligger på sfären S^3 med radien 2 i $\mathbf{R^4}$. Det minimala avståndet mellan två distinkta hörn är givetvis lika med kantlängden 2. Varje hörn är förbundet med fyra andra hörn via kanter. Dessa hörn fås genom att ändra tecknet på en enda ko-ordinat. Således finns $16 \times 4/2 = 32$ olika kanter (ty varje kant har två hörn). Kanterna är givna av snittet av tre hyperplan av formen $x_i = \pm$ för tre val av ko-ordinater x_i. Det finns givetvis 32 mittpunkter på kanter, dessa är givna av formen $\pm 1, \dots 0 \cdots \pm 1$ med en enda nolla given av någon ko-ordinat x_i. Det kan vara lämpligt att introducera termen standard punkt. Detta är en punkt (a, b, c, d) där ko+ordinaterna är antingen noll eller av formen ± 1. En kantmittpunkt är således en standardpinkt med precis en nolla. Alla sådana mittpunkter ligger på en sfär av radien $\sqrt{3}$. Givet två kanter som möts i ett hörn, bestämmer dessa en kvadrat. Diagonalen i denna kvadrat är given av två hörn som skiljer sig med precis två ko-ordinater. En sådan diagonal har givetvis längden $2\sqrt{2}$ och kan benämnas en kort diagonal. Det finns $\binom{4}{2} = 6$ olika korta diagonaler från ett givet hörn. Således finns det $16 \times 6/2 = 48$ korta diagonaler. Eftersom varje kvadrat har två diagonaler finner vi 24 kvadrater. En kvadrat är given av formen $x_i = \pm$ för två val av ko-ordinater x_i. Mittpunkten på en kvadrat är given av en standardpunkt med precis två nollor. Sådana mittpunkter ligger på en sfär med radien $\sqrt{2}$. Två kvadrater är angränsande om de har en gemensam kant. Tre kvadrater som är angränsande två och två bestämmer en kub. Kuben är bestämd av sin rymddiagonal vilken har längden $2\sqrt{3}$. En sådan diagonal kommer vi helt enkelt att kalla en diagonal. Två hörn bestämmer en diagonal om de skiljer sig bara på en ko-ordinat. Genom ett givet hörn kan man således finna fyra diagonaler. Vi finner därmed $16 \times 4/2 = 32$ diagonaler. Eftersom varje kub har fyra rymddiagonaler sluter vi att det finns 8 kuber. Varje kub är utskuren av ett hyperplan $x_i = \pm 1$. Kubernas mittpunkter är standardpunkter med precis tre nollor. Dessa ligger på en sfär med radien 1. Slutligen ligger hyperkubens mittpunkt i origo. Den har 8 rymddiagonaler, som vi kan kalla långa diagonaler. Dessa har längden 2 och förbinder antipodala hörn på kuben. De utgör de längsta avstånden mellan två hörn.

Tillsammans har vi fyrtio olika riktningar, detta inses lätt genom att dessa är givna av (a, b, c, d) där $a, b, c, d = 0, \pm 1$ och vi utesluter $(0, 0, 0, 0)$. Varje ko-ordinat har således tre val, varvid vi får $(3^4 - 1)/2 = 40$ möjligheter ty en vektor $-v$ ger samma riktning som v. (Vi betraktar således riktningarna som punkter i det reella projektiva rummet RP^3 och (a, b, c, d) skall ses som homogena ko-ordinater).

Om vi betraktar den alternerade summan av antalet hörn, kanter, kvadrater och kuber, d.v.s. $16 - 32 + 24 - 8$ erhåller vi noll. Detta är inte en tillfällighet utan är identiskt med euler-karaktäristiken av den 3-dimensionella sfären. Man kan renormalisera alla standardpunkter så att de alla ligger på en fix sfär. Dessa utgör då en intressant konfiguration på denna.



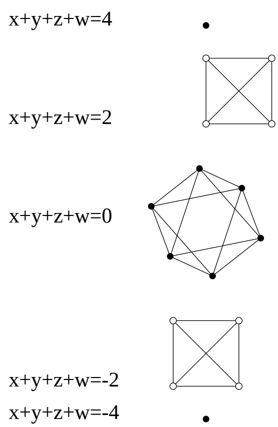
Hyperkuben kan projiceras in i rummet på ett antal olika sätt. Vidstående bild visar en perspektivprojicering av kuben från punkten $(0,0,0,2)$ till hyperplanet $x_4 = 0$. Denna ges av

$$(x,y,z,w) \mapsto (\frac{x}{2-w}, \frac{x}{2-w}, \frac{x}{2-w})$$

Kuben given av $w = 1$ avbildas 'identiskt' medan kuben $w = -1$ avbildas med en skalning av $1/3$.

Hyperkubens projektioner

Låt oss nu betrakta projektionen i riktning $(1,1,1,1)$. Denna projicerar de två antipodala hörnen $(1,1,1,1), (-1,-1,-1,-1)$ till origo.



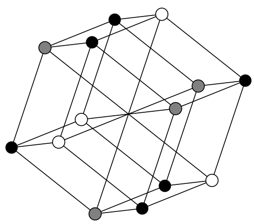
Med avseende på dessa två hörn kan vi gruppera de övriga i tre olika nivåer. Sex av hörnen ligger på det centrala hyperplanet $x+y+z+w=0$. Dessa kommer att vara vinkelräta mot de två givna hörnen. Sedan har vi fyra hörn på hyperplanet $x+y+z+w=2$ vilka bildar vinkeln $\pi/3, (2\pi/3)$ med $(1,1,1,1)((-1,-1,-1,-1))$ och fyra återstående hörn på $x+y+z+w=-2$ där vinklarna är omvända. Projektionen är ortogonal på det hyperplan som är ortogonalt mot riktningen. De sex mittersta punkterna bildar en regelbunden oktaheder, medan de återstående åtta punkterna utgöres av två tetrahedrar. De kanter vi ser utritade är inte kanter på tesserakten, utan vad vi ovan benämnde 'korta diagonaler'. Den ortogonala projektionen ges av

$$(x,y,z,w) \mapsto (\frac{3x-y-z-w}{4}, \frac{3y-x-z-w}{4}, \frac{3z-y-x-w}{4}, \frac{3w-y-z-x}{4})$$

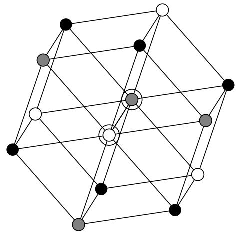
och genom att välja en lämplig ortonormerad bas för det centrala hyperplanet kan vi ge projektionen

$$(x,y,z,w) \mapsto (\frac{x-y}{\sqrt{2}}, \frac{w-z}{\sqrt{2}}, \frac{(x+y)-(z+w)}{2})$$

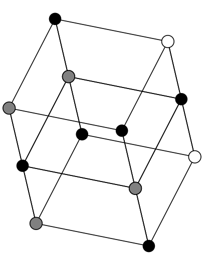
I bilden nedan kommer de antipoda hörnen $(1,1,1,1), (-1,-1,-1,-1)$ avbildas på origo. De sex ortogonala hörnen bildar en oktaheder och är givna i svart, medan punkterna med vinkelavstånd $\pi/3$ från $(1,1,1,1)$ är givna i vitt och bildar en tetraheder, precis som dess antipoder som ges av grått.



Notera att de tre parallella hyperplanen avbildas isometriskt in i $\mathbf{R}^3$. Oktahedern ligger på en sfär med radien 2 medan de två tetrahedrarna ligger på en sfär med radien 1. Notera i figuren att dessa tetrahedrar utgör varandras antipoder.



På motsvarande sätt betraktar vi nu projektionen i riktning $(1,1,1,0)$ på hyperplanet $x+y+z=0$ vilken ges av: $(x,y,z,w)\mapsto\frac{1}{\sqrt{3}}(x-y+w,x-z-w,y-z+w)$. Punkterna $(1,1,1,1),(-1,-1,-1,1)$ avbildas båda på $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,1)$, medan punkterna $(1,1,1,-1),(-1,-1,-1,-1)$ avbildas på $\frac{1}{\sqrt{3}}(-1,1,-1)$. Dessa punkter är speciellt utmärkta i figuren. Notera också att den projekterade bilden består av två plana figurer. Dessa är helt enkelt projektioner av kuberna $(\pm1,\pm1,\pm1,1)$ och $(\pm1,\pm1,\pm1,-1)$ via långa diagonaler, vars ändpunkter hamnar i 'mitten'.



Projektionen i riktningen $(1,1,0,0)$ på planet $x+y=0$ ges av: $(x,y,z,w)\mapsto\frac{1}{\sqrt{2}}(x-y,z+w,z-w)$. Punkterna $(1,1,a,b),(-1,-1,a,b)$ hamnar på samma punkt $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,a+b,a-b)$. Således åtta av hyperkubesn punkter kollapsar till fyra. Dessa utgör två kvadrater som avbildas på samma kvadrat, nämligen den mittersta.

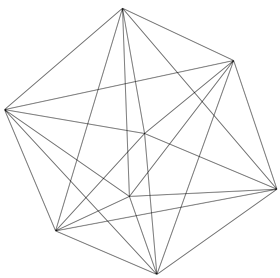
Och slutligen projektionen i riktningen $(1,0,0,0)$ ges uppenbarligen av $(x,y,z,w)\mapsto(y,z,w)$ och avbildar hyperkuben på en kub i vilken de 16 hörnen avbildas i par på de åtta hörnen av kuben.

Den duala hyperkuben

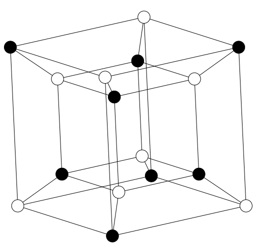
Den duala hyperkuben fås genom att betrakta de åtta hörnen

$$(\pm1,0,0,0)\ldots(0,0,0,\pm1).$$

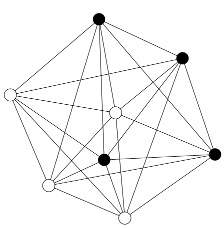
Ett hörn sammanbindes med alla andra hörn utom sin antipod. D.v.s. två hörn sammanbindes om dess korresponderande vektorer är vinkelräta, d.v.s. vinkelavståndet på sfären är $\pi/2$. Genom varje hörn går således 6 kanter, vilket ger $8 \times 6/2 = 24$ kanter. Tre hörn som är ömsesidigt vinkelräta bildar en triangel. Det uppkommer $8 \times 6 \times 4/6 = 32$ trianglar. Slutligen fyra ömsesidigt vinkelräta hörn bildar en tetraheder. Av dessa har vi $8 \times 6 \times 4 \times 2/24 = 16$. Som förväntat spegelvänds talserien från hyperkuben. En annan benämning är 16-cellen, ty den består av 16 tetrahedrar. Dessa tetrahedrar får genom att betrakta punkterna $(\pm 1, 0, 0, 0), (0, \pm 1, 0, 0), (0, 0, \pm 1, 0), (0, 0, 0, \pm 1)$ med sexton val av tecken. Notera att dess centra utgöres helt enkelt av hörnen till hyperkuben. Andra namn är hexadecachoron, orthoplexen eller halvtesserakten. En annan naturlig benämning är hyper-oktahedern. Nedan har vi en stereografisk projektion av 16-cellen.



Anmärkningsvärt är att den duala hyperkubem återfinnes även i hyperkuben själv. Dess hörn kan delas upp i två disjunkta mängder som var och en utgör en dual hyperkub. Givet ett hörn kan man ta produkten av dess ko-ordinater. Denna blir ± 1. De med 1 utgör en, och de med -1 en annan. Två hörn av samma typ skiljer sig med jämnt antal, medan de mellan olika typer med ett udda antal. Nedan har vi en hyperkub med sin uppdelning av sina hörn i två halv-tesserakter.



Tag ett hörn och dess antipod. De är uppenbarligen av samma typ. Mitt emellan dem har vi ett plan vilket innehåller sex andra hörn, dessa bildar en oktaheder i $\mathbf{R}^3$, och de åtta hörnen bildar en dual hyperkub. Alla hörn, utom de antipoda är på vinkelavstånd $\pi/2$. Ur detta ser vi att den duala hyperkuben bildas ur en oktaheder genom att två ytterligare punkter och förbinda. (Detta kan generaliseras till godtyckliga dimensioner och ses enkelt formellt). Men vi ser även genom att betrakta de komplementära punkterna att en dual hyperkub kan bildas av två tetrahedrar i rummet, som sammanbindes. Detta är analogt med att en oktaheder kan bildas av två disjunkta trianglar vars hörn står i ett 1-1 förbindelse med varandra.



Två hörn sammanbindes om och endast om de inte korresponderar med varandra. På så sätt utgår det fyra kanter från varje hörn. På samma sätt tar vi två disjunkta tetrahedrar med en 1-1 korrespondens. Vi sammanbinder på samma sätt. Därmed kommer det ur varje hörn utgå $3 + 3 = 6$ kanter. Till vänster betraktar vi en hyperoktaheder med två antipoda tetrahedrar (med vita respektive svarta hörn). 1-1 korrespondensen utgöres av antipoda punkter.

Denna uppdelning av hyperkuben är analog med kubens uppdelning i två disjunkta tetrahedrar.

Automorfigruppen

Betrakta nu alla ortogonala 4×4 matriser med endast heltalselement, dessa bildar automorfigruppen $G(\equiv \mathrm{O}(4, \mathbf{Z}))$ till hyperkuben. Vi kommer att koncentrera oss på delgruppen SG med determinant ett. Denna har index två, och har som vi tidigare beräknat 192 element. Som vi noterade i förra artikeln är egenvärdena till en reell ortogonal matris invarianta under invers. Den karaktäristiska ekvationen blir därmed palindromisk och kan skrivas under formen

$$x^4 - tx^3 + sx^2 - tx + 1 = 0$$

där t givetvis är spåret av matrisen. För att beräkna s noterar vi att denna är summan av alla produkter av två egenvärden. Mera exakt har vi identiteten

$$(\lambda_1 + \ldots \lambda_n)^2 = \lambda_1^2 + \ldots \lambda_n^2 + 2(\sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j)$$

ur vilket vi sluter att $s = \frac{1}{2}((\mathrm{Tr}(A))^2 - \mathrm{Tr}(A^2))$ för vår matris A.

Vi skall nu först göra en tabell över alla element i G och lista de korresponderande karaktäristiska ekvationerna. Vi noterar att ett element $A \in G$ beskrives av en permutation $\sigma \in S_4$ samt en följd av fyra tecken (d.v.s. icke-noll elementen i den permutations matris som hör till σ är av formen ± 1. En permutation kan skrivas som en följd av disjunkta cykler, och en cykel med säg tre element kommer att betecknas i formen (123), för att beskriva tecknen låter vi (123)$[k]$ betyda en cykel med k negativa tecken (för enkelhetens skull om $k = 0$ utlämnar vi denna). Således matrisen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

betecknas med ()(123)[1]. Vidare observerar vi att en permutationsmatris har determinanten ett precis om permutationen är udda. Detta betyder att den har ett jämnt antal cykler med jämnt antal element (uppenbarligen har () antalet element ett, genom att ignorera fixpunkten). Det kan även vara praktiskt att notera att om A är associerad till (12)[1] finner vi att A^2 är associerad till ()[1]()[1]. Vi kan nu systematiskt skriva ner tabellen och passar samtidigt på att hålla reda på hur många element finns av varje typ.

antal	Beteckning	t	$(\mathrm{Tr}(A^2))$	s	karaktäristisk ekvation	faktorisering
1	()()()()	4	(4)	6	$x^4-4x^3+6x^2-4x+1$	$(x-1)^4$
6	()()()[1]()[1]	0	(4)	-2	x^4-2x^2+1	$(x-1)^2(x+1)^2$
1	()[1]()[1]()[1]()[1]	-4	(4)	6	$x^4+4x^3+6x^2+4x+1$	$(x+1)^4$
12	()()[1](12)	0	(4)	-2	x^4-2x^2+1	$(x-1)^2(x+1)^2$
12	()()(12)[1]	2	(0)	2	$x^4-2x^3+2x^2-2x+1$	$(x-1)^2(x^2+1)$
12	()[1]()[1](12)[1]	-2	(0)	2	$x^4+2x^3+2x^2+2x+1$	$(x^2+1)(x+1)^2$
12	()()[1](12)[2]	0	(4)	-2	x^4-2x^2+1	$(x-1)^2(x+1)^2$
3	(12)(34)	0	(4)	-2	x^4-2x^2+1	$(x-1)^2(x+1)^2$
6	(12)[2](34)	0	(4)	-2	x^4-2x^2+1	$(x-1)^2(x+1)^2$
12	(12)[1](34)[1]	0	(-4)	2	x^4+2x^2+1	$(x^2+1)^2$
3	(12)[2](34)[2]	0	(4)	-2	x^4-2x^2+1	$(x-1)^2(x+1)^2$
8	()(123)	1	(1)	0	x^4-x^3-x+1	$(x^2+x+1)(x-1)^2$
24	()[1](123)[1]	-1	(1)	0	x^4+x^3+x+1	$(x^2-x+1)(x+1)^2$
24	()(123)[2]	1	(1)	0	x^4-x^3-x+1	$(x^2+x+1)(x-1)^2$
8	()[1](123)[3]	-1	(1)	0	x^4+x^3+x+1	$(x^2-x+1)(x+1)^2$
24	(1234)[1]	0	(0)	0	x^4+1	
24	(1234)[3]	0	(0)	0	x^4+1	

Genom att inspektera tabellen inser vi att det finns ett mycket begränsat antal karaktäristiska ekvationer nämligen följande.

ekvation	antal element	ordning
$(x-1)^4$	1	1
$(x+1)^4$	1	2
$(x+1)^2(x-1)^2$	42	2
$(x^2+1)^2$	12	4
$(x^2+1)(x+1)^2$	12	4
$(x^2+1)(x-1)^2$	12	4
$(x^2+x+1)(x-1)^2$	32	3
$(x^2-x+1)(x+1)^2$	32	6
x^4+1	48	8

Uppenbarligen motsvarar detta inte konjugatklasserna. För att göra en fullständig undersökning kan det vara ändamålsenligt att introducera lite notation. En matris i G kan representeras i formen $\epsilon\sigma$ där ϵ är en följd (a,b,c,d) med $a,b,c,d=\pm 1$ och σ är en permutation, och med villkoret att $abcd(\sigma)=1$ där $(\sigma)=\pm 1$ anger tecknet (udda eller jämnt) av permutationen σ. Uppenbarligen gäller att $\epsilon\epsilon'=\epsilon'\epsilon$ däremot kommuterar de inte med permutationerna. Låt e_i $(i=1,\ldots,4)$ vara vår fixa bas, då gäller $\sigma e_i = e_{\sigma(i)}$ och $\epsilon e_i = \epsilon(i)e_i$. Ur detta inser vi lätt

$$\sigma\epsilon e_i = \epsilon(i)\sigma e_i = \epsilon(i)e_{\sigma(i)} = \epsilon(\sigma^{-1}(\sigma(i)))e_{\sigma(i)}$$

Vilket kan uttryckas som

$$\sigma\epsilon = \epsilon_\sigma\sigma$$

där vi låter σ operera kontravariant på ko-ordinaterna till ϵ. Ur detta inser vi att två element $\epsilon\sigma$ och $\eta\tau$ kommuterar om och endast om $\sigma\tau=\tau\sigma$ och $\epsilon\eta_\sigma=\epsilon_\tau\eta$ ty $\epsilon\sigma\eta\tau=\epsilon\eta_\sigma\sigma\tau$. Speciellt bekräftar vi ovan att gruppens centrum uppstår för $\sigma=1$ och ϵ godtyckligt.

Vi kan även konjugera element och finner

$$(\eta\tau)(\epsilon\sigma)(\tau^{-1}\eta) = \eta\epsilon_\tau\eta_{\tau\epsilon\tau^{-1}}\tau\sigma\tau^{-1}$$

Speciellt stannar permutationen i sin konjugatklass.

Antalet element i en konjugatklass ges som bekant av $|G|/|Z_a|$ där a är ett godtyckligt element i konjugatklassen och Z_a är delgruppen av alla element som kommuterar med a. Vi kan nu för var och ett av elementen beräkna Z_a och därmed även $|Z_a|$. Vi kan ta första fallet med $\sigma = (12)$. Vi kan lätt lista all τ som kommuterar med σ de gives av

(12)()()
(12)(34)
()()()()
()()(34)

Låt nu $\epsilon = (1, 1, -1, 1)$ och för var och en av de fyra fallen betraktar vi $\eta = (a, b, c, d)$ och finner $\eta_\sigma \epsilon = (b, a, -c, d)$. Vi går nu igenom de fyra olika τ och finner följande

permutation	$\epsilon_\tau \eta$	lösning	antal
(12)()()	(a,b,-c,d)	(a,a,c,d)cd=-1	4
(12)(34)	(a,b,c,-d)		0
()()()()	(a,b,-c,d)	(a,a,c,d)cd=1	4
()()(34)	(a,b,c,-d)		0

Ur detta inser vi att klassen innehåller $192/8 = 24$ element. Tar vi istället $\epsilon = (1, -1, 1, 1)$ finner vi $\eta_\sigma \epsilon = (b, -a, c, d)$ och erhåller följande tabell

permutation	$\epsilon_\tau \eta$	lösning	antal
(12)()()	(-a,b,c,d)	(a,-a,c,d)cd=1	4
(12)(34)	(-a,b,c,d)	(a,-a,c,d)cd=-1	4
()()()()	(a,-b,c,d)	(a,a,c,d)cd=1	4
()()(34)	(a,-b,c,d)	(a,a,c,d)cd=-1	4

Och nu inser vi att klassen innehåller $192/16 = 12$ element. Ur detta drar vi slutsatsen att elementen med permutation av typ (12) splittras i tre klasser, korresponderande mot de olika karaktäristiska ekvationerna. Det är nu lätt att förvissa sig om följande tabell av 11 konjugeringsklasser.

antal	beteckning	karaktäristisk ekvation	spår
1		$(x-1)^4$	4
6	[2]	$(x-1)^2(x+1)^2$	0
1	[4]	$(x+1)^4$	-4
24	[1](12),[1](12)[2]	$(x-1)^2(x+1)^2$	0
12	(12)[1]	$(x-1)^2(x^2+1)$	2
12	[2](12)[1]	$(x+1)^2(x^2+1)$	-2
12	(12)(34),(12)[2](34),(12)[2](34)[2]	$(x-1)^2(x+1)^2$	0
12	(12)[1](34)[1]	$(x^2+1)^2$	0
32	(123),(123)[2]	$(x^2+x+1)(x-1)^2$	1
32	[1](123)[1],[1](123)[3]	$(x^2-x+1)(x+1)^2$	-1
48	(1234)[1],(1234)[3]	x^4+1	0

Vi noterar att

$$4^2 + (-4)^2 + 12 \times 2^2 + 12 \times (-2)^2 + 32 \times 1^2 + 32 \times (-1)^2 = 192$$

vilket visar att representationen är irreducibel.

Geometriska tolkningar

En ortogonal transformation ges av vridningar längs två ortogonala plan. Om en av vridningarna är identiteten, kan man se transformationen som en vridning med det korresponderande planet som fix 'axel'. I vårt fall med hyperkuben, kommer den ortogonala projektionen på det komplementerande planet avbilda denna på en plan figur invariant under rotationen.

Vi skall först betrakta de plan som som kan vara invariant plan. d.v.s. de korresponderande till egenvärde 1. (Vi skippar det triviala fallet med identiteten, för vilket alla plan är invarianta). Detta är lätt att undersöka. Permutationen skrives som en disjunkt union av cykler och vi håller reda på antalet negativa värden i varje cykel. Om en cykel innehåller ett udda antal negativa värden, kommer ko-ordinaterna automatiskt bli noll, medan i fallet ett jämnt antal negativa värden får vi ett 1-dimensionellt bidrag. Tar vi exemplet (12)[2](34) och en egenvektor (a, b, c, d) får vi transformationen $(-b, -a, d, c)$ och därmed villkoret $a = -b, b = -a, c = d, d = c$ i fallet egenvärde 1 och därmed lösningen $(a, -a, c, c)$.

Det är nu lätt att sätta upp en tabell för egenrummen hörande till egenvärdet 1. (Kolumnen för konjugattyp är för framtida referens)

antal	Beteckning	karaktäristisk ekvation	egenrum	konjugat
1	()()()()	$(x-1)^4$	(a,b,c,d)	I^+
6	()()()[1]()[1]	$(x-1)^2(x+1)^2$	(a,b,0,0)	A
1	()[1]()[1]()[1]()[1]	$(x+1)^4$	(0)	I^-
12	()()[1](12)	$(x-1)^2(x+1)^2$	(a,a,b,0)	B
12	()()(12)[1]	$(x-1)^2(x^2+1)$	(0,0,a,b)	C^+
12	()[1]()[1](12)[1]	$(x^2+1)(x+1)^2$	(0)	C^-
12	()()[1](12)[2]	$(x-1)^2(x+1)^2$	(a,-a,b,0)	B
3	(12)(34)	$(x-1)^2(x+1)^2$	(a,a,b,b)	D
6	(12)[2](34)	$(x-1)^2(x+1)^2$	(a,a,b,-b)	D
12	(12)[1](34)[1]	$(x^2+1)^2$	(0)	E
3	(12)[2](34)[2]	$(x-1)^2(x+1)^2$	(a,-a,b,-b)	D
8	()(123)	$(x^2+x+1)(x-1)^2$	(a,a,a,b)	F^+
24	()[1](123)[1]	$(x^2-x+1)(x+1)^2$	(0)	F^-
24	()(123)[2]	$(x^2+x+1)(x-1)^2$	(a,-a,a,b)	F^+
8	()[1](123)[3]	$(x^2-x+1)(x+1)^2$	(0)	F^-
24	(1234)[1]	x^4+1	(0)	G
24	(1234)[3]	x^4+1	(0)	G

Vi noterar att det typiska egenrummet har dimension två och har ett ortogonalt komplement längs vilken automorfismen roterar. Genom att istället betrakta egenrummet motsvarande egenvärde -1 betraktar vi rotationer samt speglingar i origo i egenrummet (eller vridningar ett halvt varv). Genom att göra den uppenbara substititionen $x \to -x$ kan vi reducera dessa fall till de redan kända.

Vi kan nu göra en tabell över de plan som uppkommer och dess ortogonala komplement.

typ	antal	komplement
(a,a,b,b)	3	$(a,-a,b,-b)$
$(a,a,b,-b)$	6	$(a,-a,b,b)$
$(a,-a,b,-b)$	3	(a,a,b,b)
(a,a,a,b)	4	$(a,b,-(a+b),0)$
$(a,-a,a,b)$	12	$(a,a+b,b,0)$
$(a,a,b,0)$	12	$(a,-a,0,b)$
$(a,-a,b,0)$	12	$(a,a,0,b)$
$(a,b,0,0)$	6	$(0,0,a,b)$

Vi upptäcker nu att det är fyra typer av plan.

Den första typen (I) (a,a,b,b) spännes av två ortogonala hörn $((1,1,1,1),(1,1,-1,-1))$ eftersom det till varje hörn finns 6 ortogonala hörn, och varje plan kan spännas på åtta olika sätt $([\pm v, \pm w])$ finner vi $16 \times 6/8 = 12$ olika sådana plan.

Den andra typen (II) (a,a,a,b) spännes av två icke ortogonala (men ej antipodala) hörn, och eftersom varje plan nu kan spännas på åtta olika sätt finner vi $16 \times 8/8 = 16$ sådana plan.

Den tredje typen (III) $(a,a,b,0)$ Dessa spännes av vektorer som motsvaras av medelpunkterna till en kvadratisk sida och en avgränsande kant respektive. Vi finner $24 \times 2/2 = 24$ sådana plan.

Och slutligen den fjärde typen (IV) $(a,b,0,0)$ Dessa spännes av medelpunkterna till två icke antipoda kuber, Således $8 \times 6/8 = 6$ sådana plan.

Om vi istället vill betrakta egenvärdet -1 får vi exakt samma plan, ty som vi redan observerat varje plan med egenvärdet 1 för A blir ett med egenvärdet -1 för $-A$.

Till varje plan har vi ett ortogonalt plan. I fallet I är det av samma typ, ty $(a,a,b,b) \mapsto (a,-a,b,-b)$. Samma fenomen inträffar i fallen III och IV via $(a,a,b,0) \mapsto (a,-a,0,b)$ och $(a,b,0,0) \mapsto (0,0,a,b)$, medan faller II ger upphov till ett nytt slags plan (IIa) givet av $(a,a,a,b) \mapsto (a,b,-(a+b),0)$.

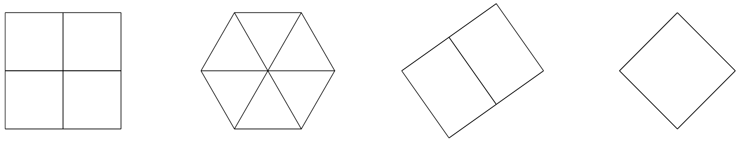
Varje plan ger en ortogonal projektion på komplementplanet och vi kan sammanställa en tabell.

projektion	projektionsformel
$(a,a,b,b) \mapsto (a,-a,b,-b)$	$(x,y,z,w) \mapsto (\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}, \frac{z-w}{2}, \frac{w-z}{2})$
$(a,a,a,b) \mapsto (a,b,-(a+b),0)$	$(x,y,z,w) \mapsto (\frac{2x-(y+z)}{3}, \frac{2x-(y+z)}{3}, \frac{2x-(y+z)}{3}, 0)$
$(a,a,b,0) \mapsto (a,-a,0,b)$	$(x,y,z,w) \mapsto (\frac{x-y}{2}, \frac{y-x}{2}, 0, w)$
$(a,b,0,0) \mapsto (0,0,a,b)$	$(x,y,z,w) \mapsto (0,0,z,w)$

Vi kan även välja lämpliga ortonorma baser för mål-planet och erhåller därmed följande ortogonala projektioner.

plan	bas	projektionsformel
$(a,-a,b,-b)$	$\frac{1}{2}(1,-1,1,-1), \frac{1}{2}(-1,1,1,-1)$	$(x,y,z,w) \mapsto (\frac{x-y+z-w}{2}, \frac{y-x+z-w}{2})$
$(a,b,-(a+b),0)$	$\frac{1}{\sqrt{6}}(1,1,-2,0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$	$(x,y,z,w) \mapsto (\frac{x+y-2z)}{\sqrt{6}}, \frac{x-y)}{\sqrt{2}})$
$(a,-a,0,b)$	$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0,1), \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-1,0,-2)$	$(x,y,z,w) \mapsto (\frac{x-y+w}{\sqrt{3}}, \frac{x-y-2w}{\sqrt{6}})$
$(0,0,a,b)$	$\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1)$	$(x,y,z,w) \mapsto (\frac{z+w}{\sqrt{2}}, \frac{z-w}{\sqrt{2}})$

Dessa ger upphov till följande projektioner av hyperkuben med rotationssymmetri.



Vi kan faktorisera x^4+1 över de reella talen i kvadratiska faktorer. Antingen genom att faktorisera den i linjära faktorer över de komplexa talen och kombinera konjugerade faktorer, eller genom att observera följande lilla trick. $x^4+1=(x^2+1)^2-2x^2$ vilket ger via konjugatregeln $x^4+1=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)$. Vi kan nu bestämma planen till respektive faktor via villkoren

$$(x^2 \pm \sqrt{2}x+1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$$

eller mera explicit (i fallet $(-1,1,1,1)(1234)$)

$$\begin{pmatrix} -c \\ d \\ a \\ b \end{pmatrix} \pm \sqrt{2}\begin{pmatrix} -b \\ c \\ d \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = 0$$

Det ena planet ges således av

$$\begin{gathered} -c-\sqrt{2}b+a=0 \\ d+\sqrt{2}c+b=0 \end{gathered}$$

medan det andra ortogonala planet ges av

$$\begin{gathered} -c+\sqrt{2}b+a=0 \\ d-\sqrt{2}c+b=0 \end{gathered}$$

vilket ger basvektorer åt det första. Vi kan i själva verket skriva ner följande ortonormerade bas

$$\begin{array}{c} \frac{1}{2}(1,-\sqrt{2},-1,0) \\ \frac{1}{2}(1,0,1,\sqrt{2}) \\ \hline \frac{1}{2}(1,\sqrt{2},-1,0) \\ \frac{1}{2}(1,0,1,-\sqrt{2}) \end{array}$$

Där de två första utgör en bas för det första planet och de två sista det ortogonala planet. Givetvis kan vi se det hela som en 4×4 ortogonal matris som överför planen till paret $(x,y,0,0),(0,0,z,w)$.

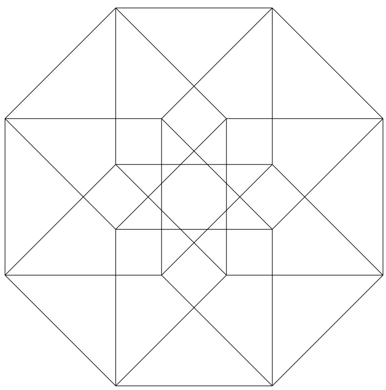
Den ortogonala projektionen längs det första planet på det andra ges av

$$(x,y,z,w) \mapsto (\frac{1}{2}x+\frac{y}{2\sqrt{2}}-\frac{w}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}y+\frac{x}{2\sqrt{2}}-\frac{z}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}z-\frac{y}{2\sqrt{2}}-\frac{w}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2}w-\frac{x}{2\sqrt{2}}-\frac{z}{2\sqrt{2}})$$

utnyttjar vi den ortogonala basen för den senare får vi en enkel projektion

$$(x,y,z,w) \mapsto (\frac{x}{2}+\frac{y}{\sqrt{2}}-\frac{z}{2}, \frac{x}{2}+\frac{w}{\sqrt{2}}+\frac{z}{2})$$

Projicerar vi nu hyperkuben får vi följande vackra projektion med $\mathbb{Z}_8$ rotationell symmetri.



Givetvis fås en likadan projektion på det andra planet, och symmetrin består i att vrida varje plan ett åttondels varv. Eller mera precist, eftersom spåret är noll, ges avbildningen i basen ovan via

$$\begin{pmatrix} \cos(\frac{m\pi}{4}) & -\sin(\frac{m\pi}{4}) & 0 & 0 \\ \sin(\frac{m\pi}{4}) & \cos(\frac{m\pi}{4}) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\frac{n\pi}{4}) & -\sin(\frac{n\pi}{4}) \\ 0 & 0 & \sin(\frac{n\pi}{4}) & \cos(\frac{n\pi}{4}) \end{pmatrix}$$

där m, n är udda heltal sådana att $m + n = 8$

Den fullständiga gruppen

Låt oss nu även betrakta ortogonala matriser med determinant -1. Dess karaktäristiska ekvation har formen

$$x^4 - tx^3 + sx^2 + tx - 1 = 0$$

Vi finner speciellt att dessa utgör involutioner precis när $s = 0$ och $t = \pm 2$. fallet $t = 2$ motsvarar reflektioner i ett hyperplan, medan fallet $t = -2$ motsvarar reflektioner i en linje.

Vi kan göra en uppdelning av de olika elementen enligt följande.

antal	type	t	s
4	()()()()[1]	2	0
4	()()()()[3]	-2	0
8	(123)()[1]	-1	0
24	(123)[1]()	1	0
24	(123)[2]()[1]	-1	0
8	(123)[3]()	1	0
6	(1234)	0	0
36	(1234)[2]	0	0
6	(1234)[4]	0	0
12	(12)(34)[1]	0	0
12	(12)[1](34)[2]	0	0
6	(12)()()	2	0
6	(12)[2]()()	2	0
6	(12)()()[2]	-2	0
6	(12)[2]()()[2]	-2	0
24	(12)[1]()()[1]	0	0

Dessa splittras upp på 9 olika konjugeringsklasser enligt följande.

antal	typ	karaktäristisk ekvation
4	[1]	$(x-1)^3(x+1)$
4	[3]	$(x-1)(x+1)^3$
32	(123)()[1],(123)[2]()[1]	$(x^2-1)(x^2+x+1)$
32	(123)[1](),(123)[3]()	$(x^2-1)(x^2-x+1)$
48	(1234),(1234)[2],(1234)[4]	x^4-1
24	(12)(34)[1],(12)[2](34)[1]	x^4-1
12	(12),(12)[2]	$(x-1)^3(x+1)$
12	(12)()()[2],(12)[2]()()[2]	$(x-1)(x+1)^3$
24	(12)[1]()()[1]	x^4-1

Vi kan göra en tabell över egenrummen till egenvärdet 1 och dess ortogonala komplement.

typ	egenrum	antal	komplement
()()()()[1]	(a,b,c,0)	4	(0,0,0,a)
()()()()[3]	(a,0,0,0)	4	(0,a,b,c)
(123)()[1]	(a,a,a,0)	4	(a,b,-(a+b),c)
(123)[1]()	(0,0,0,a)	4	(a,b,c,0)
(123)[2]()[1]	(a,-a,a,0)	12	(a,a+b,b,c)
(123)[3]()	(0,0,0,a)	4	(a,b,c,0)
(1234)	(a,a,a,a)	1	(a,b,c,-(a+b+c)
(1234)[2]	(a,-a,a,a)	4	(a,a+b+c,b,c)
(1234)[4]	(a,-a,a,-a)	3	(a,b,c,a+c-b)
(12)(34)[1]	(a,a,0,0)	6	(a,-a,b,c)
(12)[1](34)[2]	(0,0,a,-a)	6	(a,b,c,c)
(12)()()	(a,a,b,c)	6	(a,-a,0,0)
(12)[2]()()	(a,-a,b,c)	6	(a,a,0,0)
(12)()()[2]	(a,a,0,0)	6	(a,-a,b,c)
(12)[2]()()[2]	(a,-a,0,0)	6	(a,a,b,c)
(12)[1]()()[1]	(0,0,0,a)	4	(a,b,c,0)

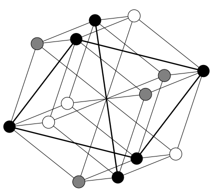
Vi kan dela upp dessa i typer.

Typ I) består av de 8 olika långa diagonalerna som sammanbinder antipoda hörn. Den typiska avbildningen är (se sid ?)

$$(x,y,z,w) \mapsto (\frac{3x-(y+z+w)}{4}, \frac{3y-(x+z+w)}{4}, \frac{3z-(x+y+w)}{4}, \frac{3w-(x+y+z)}{4})$$

och med den ortonorma basen $\frac{1}{2}(1,1,-1,-1), \frac{1}{2}(1,-1,1,-1), \frac{1}{2}(-1,1,1,-1)$ får vi projektionen

$$(x,y,z,w) \mapsto \frac{1}{2}(x+y-(z+w), x+z-(y+w), y+z-(x+w))$$



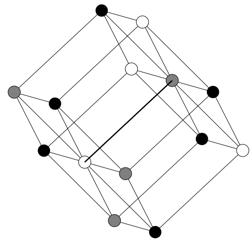
Tag en av diagonalerna till den svarta oktahedern (illustrerad i vidståned figur) som axel, och dess ortogonala plan (likaså utmärkt i figuren). Avbildningen av typ $(1,2,3,4)$ är en spegling i planet följt av en rotation ett kvarts varv runt axeln.

Typ II) består av diagonalerna som sammanbinder antipoda kanters mittpunkter. Av dessa finner vi 16 olika. Den typiska avbildningen ges av

$$(x,y,z,w) \mapsto (\frac{2x-(y+z)}{3}, \frac{2y-(x+z)}{3}, \frac{2z-(x+y)}{3}, w)$$

och med den ortonorma basen $\frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1,0,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(-1,0,1,1), \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,-1,1)$ får vi projektionen

$$(x,y,z,w) \mapsto \frac{1}{\sqrt{3}}(x-y+w, -x+z+w, y-z+w)$$

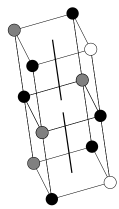


En avbildning av typ (123)()[1] fås genom att reflektera i prismats mittplan och rotera ett tredjedels varv längs axeln.

Typ III) består av de korta diagonalerna som sammanbinder antipoda kvadraters mittpunkter. Av dessa finner vi 12 olika Den typiska avbildningen ges av

$$(x,y,z,w)\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{x-y}{2},\frac{y-x}{2},z,w)$$

och med den ortonorma basen $\frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,1), \frac{1}{\sqrt{2}}(0,0,1,-1), \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1,0,0)$ får vi projektionen



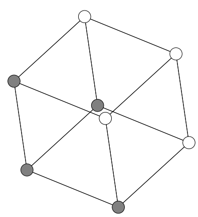
$$(x,y,z,w)\mapsto \frac{1}{\sqrt{2}}(\frac{z+w}{2},\frac{z-w}{2},x-y)$$

En avbildning av typ (12)(24)[1] fås genom att spegla i mittplanet ortogonalt mot axeln och sedan rotera ett kvarts varv. Men en avbildning av typ (12)()()[2] utgöres av en spegling i mittpunkten och slutligen

Typ IV) består av kanterna som sammanbinder kubernas mittpunkter, av dess finner vi 4 olika. Den typiska avbildningen är

$$(x,y,z,w)\mapsto(0,y,z,w)$$

och med den uppenbara ortonorma basen ges projectionen av



$$(x,y,z,w)\mapsto(y,z,w)$$

En avbildning av typ ()()()()[3] består av spegling i kubens mittpunkt. En avbildning av typ (123)[1]() består i spegling i mittplanet till en rymddiagonal och rotationett sjättedelsvarv. Samt en avbildning av typ (12)[1]()()[1] består i spegling i ett plan genom origo parallellt med ett av sidoplanen, samt rotation ett fjärdedelsvarv.

Uppenbarligen bevarar alla σ och ϵ med $|\epsilon|=1$ de två hyperoktahedrarna och utgör elementen i gruppen G_0 av automorfismer som bevarar uppdelningen, och inducerar en delgrupp av automorfismer på var och en av halvtesserakterna. Men den inducerade är inte den fullständiga gruppen, som uppenbarligen är G, ty halvtesserakten varanbdes dual till tesserakten har samma symmetrigrupp.

Reflektioner

Givet en vektor v inducerar den en reflektion R_v i hyperplanet ortogonalt mot v. Det är lẗt att inse att en sådan gives av $x\mapsto x-\frac{2<x,v>}{<v,v>}v$. En reflektion har givetvis determinant -1 och har två egenrum tillhörande 1 och -1 med dimensionerna 3 och 1 respektive. Givet två reflektioner R_v, R_w kommer produkten att vara en avbildning med determinant 1. Det kommer även att ha ett egenrum tillhörande egenvärdet 1 nämligen det ortogonala komplementet till rummet som spännes av v, w och i icke-triviala fall av dimension två. På rummet som spännes av v, w kommer det att verka som en rotation med vinkeln 2θ där $\cos\theta = \frac{<v,w>}{\sqrt{<v,v>}\sqrt{<w,w>}}$. Speciellt om $< v, w >= 0$ kommer R_v och R_w att kommutera.

Genom att inspektera tabellen i föregående avsnitt finner vi att det endast existerar två typer av speglingar som bevarar tesserakten. D.v.s. hyperkuben har en mycket begränsat antal symmetri(hyper)plan. Den första typen utgöres av ortogonalkomplementen till vektorerna av typ $(\pm 1, 0, 0, 0)$. Upp till multiplikation med -1 (speglingarna R_v och R_{-v} är identisk)finner vi fyra sådana. De motsvaras av de fyra planen $x_i = 0$ och speglingarna ges helt enkelt av $(x, y, z, w) \mapsto (-x, y, z, w)$. Samtliga dessa speglingar är ortogonala mot varandra och kommuterar följaktligen. De genererar åtta olika element av jämnt antal faktorer, vilka utgör diagonalgruppen av ordning åtta. (Elementen som brukat betecknas med ϵ). Vi betecknar dessa speglingar med e_i.

Den andra typen utgöres av ortogonalkomplementen till de tolv vektorerna av typ $(\pm 1, \pm 1, 0, 0)$. D.v.s. planen givna av $x_i = \pm x_j$ för $i \neq j$. Det finns två typer av sådana vektorer, som vi betecknar med w^+ och w^- respektive hörandes till $(1, 1, 0, 0)$ och $(1, -1, 0, 0)$ respektive. Speglingarna ges av $(x, y, z, w) \mapsto (-y, -x, z, w)$ i det postiva fallet och $(x, y, z, w) \mapsto (y, x, z, w)$ i det negativa. (Dessa har tidigare betecknats med (12)[2] och (12) respektive.).

Givet en vektor $w = (1, 1, 0, 0)$ har den en naturlig dual $w' = (1, -1, 0, 0)$ av motsatt tecken, och som är ortogonal. $R_w, R_{w'}$ kommuterar således. Vi kan även finna två andra speglingar ortogonala mot w nämligen $u = (0, 0, 1, 1)$ eller $(0, 0, 1, -1)$ (notera en positiv och en negativ). Produkterna wu (och ww') kommer då att utgöra involutioner. Vidare för de återstående åtta vektorerna u gäller att $< w, u >= 1$ (egentligen $< w, u >= \pm 1$ men vi betraktar bara vektorerna upp till tecken). Eftersom $< w, w >=< u, u >= 2$ betyder detta att vinkeln $\theta = \pi/3$ och wu har ordning 3 med invers uw.

När det gäller w-vektorer och e-vektorer observerar vi att varje w är ortogonalt mot två vektorer e, samt för de två återstående gäller $< w, e >= 1$ vilket innebär att we har ordningen fyra.

Vi kan sammanfatta allt i följande tabell (som skall jämföras med tabellen på sidan (87)) och i vilken vi beteckningsmässigt identifierar R_v med v. Denna tabell låter oss identifiera den delmängd av SG som består av produkten av två speglingar.

produkt	$< *, * >$	egenrum	typ	konjugat
ee'	0	(a,b,0,0)	IV	A
w^+e	0	(a,a,b,0)	III	B
w^-e	0	(a,-a,b,0)	III	B
we	1	(a,b,0,0)	IV	C^+
ww'	0	(a,b,0,0)	IV	A
w^+w^+	0	(a,a,b,b)	I	D
w^+w^-	0	(a,a,b,-b)	I	D
w^-w^-	0	(a,-a,b,-b)	I	D
w_1w_2	1	(a+b,a,b,0)	IIa	F^+

Notera att den tomma produkten ger identiteten I^+ medan $e_1e_2e_3e_4 = -1$ d.v.s. I^-.

För att erhålla den totala gruppen som genereras av speglingar bör vi även skriva ner relationerna. Vi finner

$ww' = ee'$ där $< w, e >=< w', e >=< w, e' >=< w', e' >= 1$ samt $wew = e'$ om $< w, e >= 1$ och e' är den andra speglingen för vilket det gäller. Samt slutligen att $w_A w_B w_A = w_{A-B}$ där A, B betecknar vektorer av typ $(1, 1, 0, 0), (1, 0, -1, 0)$

Involutionerna genererar gruppen. De fyra första uppenbarligen genererar hela delgruppen av diagonalelementen ϵ.