

# Et kombinatorisk kuriosum

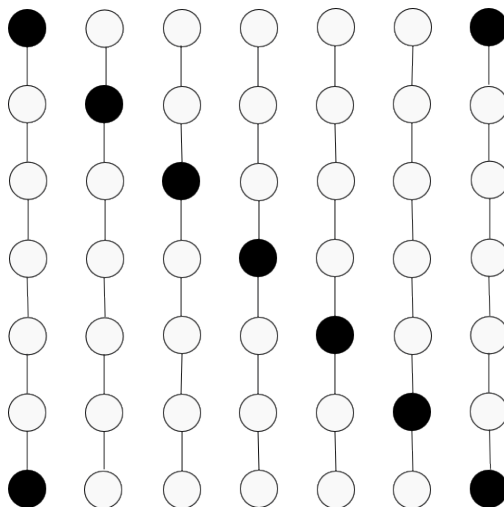
*Olav Gebhardt<sup>a</sup> og Marius Overholt<sup>b</sup>*

<sup>a</sup>Marikåpeveien 24, 9100 Kvaløysletta

<sup>b</sup>Institutt for Matematikk og Statistikk  
Universitetet i Tromsø, 9037 Tromsø  
marius.overholt@uit.no

På grund av att vissa tecken föll bort när denna artikel publicerades i nummer 2009:4 så publicerar vi den igen här.

Vi tenker oss  $n$  perlekjeder, satt sammen av sorte og hvite perler. Alle kjedene har lengde  $k$ . Forutsett at hvert par av kjeder stemmer overens i farge minst  $m \geq 0$  flere steder enn de ikke stemmer overens. (Kjedene er lagt parallelle på et bord). Forutsett også at i hver tverrad er det høyst  $d$  flere perler av en farge enn av den andre. Eksempelet under har  $n = 7$ ,  $k = 7$ ,  $m = 1$  og  $d = 5$ .



Prøving og feiling med små  $n$  og  $k$  indikerer at det ikke er så lett å finne ikketrivielle mønstre av dette slaget. Derfor bør vi kunne utlede restriksjoner på  $n$ ,  $m$ ,  $k$  og  $d$  som utelukker eksistens. Å bevise restriksjonen

$$mn^2 + (k - m)n \leq kd^2$$

er en oppgave som har en viss didaktisk interesse, fordi den kan løses på to helt forskjellige måter; ved et kombinatorisk telleresonnement eller ved enkel lineær algebra.

I det kombinatoriske beviset starter vi med å feste oppmerksomheten på et vilkårlig valgt par av perlekjeder. Betegn antall overensstemmelser for paret med  $a$ ; da er antall uoverensstemmelser lik  $k-a$ . Etter forutsetning er  $a-(k-a) \geq m$  så  $a \geq (m+k)/2$ . Siden antall par av kjeder som kan dannes er lik binomialkoeffisienten  $n(n-1)/2$  vil det totale antall overensstemmelser for alle par av kjeder være større enn eller lik

$$\frac{n(n-1)}{2} \frac{m+k}{2}.$$

Så flytter vi oppmerksomheten til tverradene. I en vilkårlig valgt tverrad betegner vi antall perler av den farge som det er flest av med  $s$ . Hvis det er like mange av hver farge, betegner  $s$  dette felles antallet. Antall perler av motsatt farge i den samme tverraden blir da  $n-s$ . Etter forutsetning er  $s-(n-s) \leq d$  så  $s \leq (n+d)/2$ . Antall overensstemmelser i denne tverraden blir da

$$\frac{s(s-1)}{2} + \frac{(n-s)(n-s-1)}{2} = \frac{n^2-n}{2} - s(n-s).$$

For  $s \geq n/2$  så vokser dette uttrykket når  $s$  vokser, og oppnår sin største verdi når  $s$  antar sin største tillatte verdi, som er  $s = (n+d)/2$ . Innsetting gir da ulikheten

$$\frac{s(s-1)}{2} + \frac{(n-s)(n-s-1)}{2} \leq \frac{n^2+d^2-2n}{4},$$

hvor høyre side altså er det høyest mulige antall overensstemmelser mellom par av perler i en tverrad. Siden det er  $k$  tverrader, blir det totale antall overensstemmelser høyst lik  $k(n^2+d^2-2n)/4$ . Dermed følger ulikheten

$$\frac{n(n-1)}{2} \frac{m+k}{2} \leq k \frac{n^2+d^2-2n}{4},$$

som vi kan forenkle til  $mn^2 + (k-m)n \leq kd^2$ .

I det andre beviset bruker vi prikkproduktet i  $\mathbb{R}^k$ . Vi skal utlede den ønskede restriksjonen fra en ulikhet i lineærалgebra: Hvis  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  er vektorer i  $\mathbb{R}^k$  slik at  $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j \geq \alpha \|\mathbf{x}_i\| \|\mathbf{x}_j\|$  for  $1 \leq i, j \leq n$  med en ikkenegativ konstant  $\alpha$ , så gjelder ulikheten

$$\|\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n\|^2 \geq (1-\alpha)(\|\mathbf{x}_1\|^2 + \dots + \|\mathbf{x}_n\|^2) + \alpha(\|\mathbf{x}_1\| + \dots + \|\mathbf{x}_n\|)^2.$$

Vi utsetter beviset for denne lineærалgebra-ulikheten og bruker den til å utlede restriksjonen ovenfor på nytt.

Perlekjedene representeres ved vektorer  $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^k$  for  $1 \leq j \leq n$ . Komponentene i vektorene er lik 1 eller  $-1$  etter som den tilsvarende perlen er sort eller hvit, respektive. Etter forutsetning er  $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j \geq m$  for  $1 \leq i, j \leq n$ . Siden  $\|\mathbf{x}_i\| = \|\mathbf{x}_j\| = \sqrt{k}$  følger

$$\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j \geq \alpha \|\mathbf{x}_i\| \|\mathbf{x}_j\|$$

med  $\alpha = m/k$ . Videre er hver komponent til vektoren  $\mathbf{x}_1 + \dots + \mathbf{x}_n$  lik overvekten av en farge over den andre i den tilsvarende tverraden, med positivt fortegn hvis

det er overvekt av sorte perler, med negativt fortegn hvis det er overvekt av hvite perler. Etter forutsetning er da

$$\|\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_n\|^2 \leq kd^2$$

og dermed følger

$$\left(1 - \frac{m}{k}\right)kn + \frac{m}{k}(n\sqrt{k})^2 \leq kd^2$$

ved innsetting i lineæralgebra-ulikheten ovenfor. Forenkling gir så den ønskede restriksjonen  $mn^2 + (k - m)n \leq kd^2$ .

Det står igjen å vise ulikheten som er brukt. Vi har

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_n\|^2 &= \left(\sum_{1 \leq i \leq n} \mathbf{x}_i\right) \cdot \left(\sum_{1 \leq j \leq n} \mathbf{x}_j\right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j \\ &= \|\mathbf{x}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{x}_n\|^2 + \sum_{i \neq j} \mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j \\ &\geq \|\mathbf{x}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{x}_n\|^2 + \sum_{i \neq j} \alpha \|\mathbf{x}_i\| \|\mathbf{x}_j\| \\ &= (1 - \alpha)(\|\mathbf{x}_1\|^2 + \cdots + \|\mathbf{x}_n\|^2) + \alpha(\|\mathbf{x}_1\| + \cdots + \|\mathbf{x}_n\|)^2 \end{aligned}$$

ved velkjente regneregler for norm og prikkprodukt. Merk at hvis  $\alpha$  nesten er så stor som 1 så sier ulikheten at hvis alle vektorene  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  peker i nesten samme retning så er lengden til vektoren  $\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_n$  nesten like stor som summen av lengdene til  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ .