Om Christoffer Dybvad, hans Euklid kommentar og undertrykt strid om cirkelkvadratur

Frank Bengtson

frank.bengtson@gmail.com

Christoffer Dybvad optræder i flere sammenhænge, han var den første danske med en Euklid kommentar, han var blandt kritikerne af Longomontanus indbildte cirkelkvadratur, han mente borgerne burde have flere privilegier og adelen fratages privilegier, og er for nylig nomineret blandt danmarkshistoriens tolv største rebeller. Han endte som livstidsfange i Kalundborg, hvor han under lensmandens opsyn skulle færdiggøre nogle matematiske skrifter, Chr.4. tidligere havde befalet ham at skrive.

1 Christoffer Dybvad og omgivelser

Christoffer Jørgensen Dybvad (1577/78-1622) blev magister 1598, rejste til Leiden om foråret og var indskrevet ved universitetet til 1605. Han blev dr.med. med en tese i Caen 1601 med en del matematikpunkter.[1] Faderen Jørgen Christoffersen Dybvad (?-1612) var prof. i matematik og senere teologi i København, og udgav en af de første geometribøger i riget.

Christoffer har mange ref. til fægte- og regnemester Ludolph van Ceulen (1540-1610) prof. ved ingeniørskolen oprettet 1600 ved universitetet i Leiden fra 1575.[2] Christoffer oversatte Simon Stevins (1548/49 - 1620) lille tekst om decimalbrøker fra 1585 til en forkortet dansk *Decarithmia* trykt i Leiden 1602. [3] Stevin planlagde bl.a. undervisningen i anvendt naturvidenskab ved ingeniørskolen på det lokale sprog. Christoffer havde måske håbet, at denne udvikling også var blevet kopieret i det danske rige.[4] Nederlandene adskilte sig fra de fleste andre europæiske lande politisk og socialt ved at have et velhavende borgerskab med politisk indflydelse og magt. I Leiden udarbejdede Christoffer med tre assistenter en kommentar til Euklids Elementer I-X på latin udgivet 1603-1605 med hovedvægt på

[1] Tesen omtales hos [Ka]. Plakat med tesens otte punkter Bibliothèque nationale de France.

[2] En ingeniør var dengang en militær, der stod for fæstningsbyggeri, konstruktion af krigsmateriel, o.l.

[3] Stevins *De Thiende 1585, nederlandsk, flamsk* og *La Disme 1585, fransk*, *Decarithmia* og Robert Nortons *The art of tenths 1608* på www *De Thiende*. Om Stevins udgave fra C.B. Boyer *History of mathematics* 1989 p. 353 *…the popularity of the book was such that its place in the development of mathematics has been often misunderstood…*

[4] I 1829 oprettedes en ingeniørskole i København på initiativ af H.C. Ørsted (1777-1851).

regning på geometri, som omtales senere.[5] CHRISTOFFER søgte forgæves at etablere en klient/patron relation ved dedikationer i *Decarithmia*, i Euklid kommentaren og til prof. ved universitetet i København med et mindre matematisk skrift 1606. CHRISTOFFER opholdt sig ved flere europæiske universiteter, f.eks. 1608 i Gießen, som kvæstor Orleans 1608 og 1611 i Padua.

Kansler fra 1596 CHRISTIAN FRIIS t. Borreby (1556-1616) insisterede på at oprette et ekstraordinært prof. til CHRISTEN SØRENSEN LOMBORG (1562-1647) eller LONGOMONTANUS 1605 ved at lønne ham med egne midler med tilskud fra universitetet ([FJ4] s. 310). JØRGEN DYBVAD blev afsat 1607 for at kritisere politiske forhold i offentlige teser. LOMBORG var med til at *steffne* - stævne, forhøre - JØRGEN DYBVAD for konsistorium.[6] Efter JØRGEN DYBVADs afsættelse og tilhørende rokader rykkede LOMBORG til prof. i astro./mat. LONGOMONTANUS forfattede bl.a. almanakker og sit første cirkelkvadratur *Cyclometria ex Lunulis reciproce...* 1612 dedikeret CHR.4. og kansleren. I 1622 udsendte LONGOMONTANUS *Astronomia Danica*, en samlet fremstilling af astronomien med genoptryk 1640. LONGOMONTANUS havde været BRAHEs assistent på Hven fra 1589, og tegnede i 40 år astronomien ved Københavns Universitet. LOMBORG er også kendt for sin beregning af året for verdens skabelse til 3967 fvt.[7]

CHRISTOFFERS Euklid kommentar indeholder bl.a. VAN CEULENs og tidens bedste bud på π med 31 decimaler (Ludolphinske tal) beregnet fra ind- og omskrevne regulære n-kanter for cirkler. En omskreven 256-kant beregnet med seks betydende cifre forkaster LOMBORGs bud, og JOHN PELL (1611-1685) leverede en tilsvarende tangens beregning 1644 (s. 120). LONGOMONTANUS omtales som regnemester hos BRAHE, så det virker uforklarligt, at han ikke har regnet på udtrykkene i Euklid kommentaren eller andre beregninger, der var kendte i riget.

I *Biblioteca Danica* i afsn. *Circlens Rectification og Qvadratur, saavel den indbildte som den virkelig tilnærmede*, er første titel FINCKES *Geometria rotundi* 1588.[8] Der følger tolv skrifter om kvadratur af LONGOMONTANUS fra 1612 til 1644, der 1644 tilbageviser SCALIGERS indbildte værdi fra 1594 med sin egen indbildte, se f.eks. [KS].

THOMAS FINCKE (1561-1656) gør i et brev til kansler FRIIS t. Borreby okt. 1612 opmærksom på, at LONGOMONTANUS bud på π er åbenlyst forkert, brevet omtales s. 120. FINCKE pegede bl.a. på, at han var kollega og i familie med LOMBORG en anden af kanslerens klienter. Med brevet tilkendegav FINCKE, at han rettede ind efter kanslerens vurdering af sagen. FINCKE kunne også have udtrykt sin kritik ved en offentlig tese, eller med et appendiks til sine mange skrifter og teser. Kansleren har formentlig haft meget at se til under Kalmarkrigen 1611-13. LOMBORG tildeltes vikarie og præbende i Lund 1613, så styret har åbenbart vurderet, at hans kvadratur kastede glans over majestæten og hans rige.

[5] Med dedikationer til CHR.4., kansler FRIIS, JAMES 1. af England og HENRY, prins af Wales.

[6] Adelige JENS BJELKE sekretær i kancelliet var anklager og LOMBORG og STEPHENSEN afhørte, alle tre var kanslerens klienter. HANS STEPHENSEN (1561-1625). J.F.C. DANNESKIOLD-SAMSØE *Muses and Patrons*, Lunds Universitet, Ugglan, Minervaserien 10, 2004, p. 172, [FR1] s. 126 f.

[7] Skabelsesåret optrådte i universitetets almanak til 1911 efter krav fra kirkeministeriet, der åbenbart herefter mistede indflydelse.

[8] Fra intro. [JS] *... a famous book on plane and spherical trigonometry, based not on Euclid but on Petrus Ramus. In this influentual work, in which Fincke introduced the terms tangent and secant....*

CHRISTOFFER anbefalede sig igen 1612-13 til universitetet, konsistorium diskuterede sagen, men han afvistes formentlig pga. kanslerens manglende støtte ([FR1] s. 220-230). I andre lande blev LONGOMONTANUS kvadratur tolket som udtryk for matematisk viden i det danske rige (f.eks. [KS] s. 17). Et af de senere anklagepunkter mod CHRISTOFFER var hans kritik af kansler FRIIS t. Borreby, der også kunne have omfattet kanslerens behandling af denne sag.

FINCKE så måske på cirkeludmålinger i *Appendix de Canonis triangulorum usu etiam in Cyclometricis* 1627 [JS] p. 95, findes dette skrift? I et senere afsnit gættes på de kanoniske trekanter. LONGOMONTANUS offentliggjorde også skrifter om kvadraturet 1627-28, så der har måske været diskussioner på dette tidspunkt.

Kvadraturet var et af de store uløste matematiske problemer, og mange gav sig i kast med den umulige løsning. JOSEPH SCALIGER (1540-1609) prof. i Leiden fra 1590 mente i 1594 ved filologiske studier at have bestemt π til $\sqrt{10}$. *...He laughed away the objections of the mathematician Ludolf van Ceulen- who was well versed in questions of circle quadratur- on the grounds that a fencing master should not deem himself competent to correct a scholar. And when Rudolf Snellius, professor of mathematics, tried to convince Scaliger of his error, Scaliger replied: "'You ass. Why should I calculate in the same way as you?"'...* [9]

CHRISTIAN FRIIS (1581-1639) t. Kragerup blev kansler 1616, og CHRISTOFFER blev marts 1618 *...Kongens Mathematicus og i den Stilling skal forholde sig flittigt og modeste med Skriven, paa et Kannikedømme og et Vikarie* i Lund. Der kendes to skrifter *Geometria Dybvadii msc.* og *Elementa rei numariæ msc.*, der gik til ved universitetsbibliotekets brand 1728. Tronfølgeren prins CHRISTIAN (1603-1647) afleverede bl.a. det første til biblioteket 1644.[10] Der nævnes også et manuskript *De mensuris et ponderibus, tam medicis quam civilibus*, måske fra STEVINS *De Beghinselen der Weeghconst* 1586, supp. *De Weeghdaet*, anerkendt af THOMAS BARTHOLIN og påtænkt udgivet af RASMUS BARTHOLIN, faderen CASPAR B. (1585-1629) omtalte CHRISTOFFER som en dygtig matematiker.

Et større pestudbrud bredte sig fra Bergen til området omk. Øresund 1618-19, og var formentlig årsagen til, at CHRISTOFFER rejste fra Lund oktober 1618 og logerede på Fyn fra november 1618 til april 1619. I CHRISTOFFERs almanak 1618-20 ref. til underretninger fra Nederlandene (GROTIUS, OLDENBARNEVELT) indskrevet 10.marts 1619 (20.marts Greg. kal.), samt et notat *Odense, 9.april 1619 "'Bestilte jeg med den hamborger bud min Cyclometrica contra Longomontanum..."'*. Der ser ikke ud til at være spor af en *cyclometri* fra CHRISTOFFER. Det kunne være LUDOLPH VAN CEULEN en WILLEBRORD SNELLIUS *De circulo et adscriptis liber*, 1619, men der fandtes mange tekster med majoranter for π.

CHRISTOFFER blev formentlig frustreret, og så årsagen i adelens privilegier. I almanakken 1618-20 findes mange notater om lån og gældsbreve. I politiske skrifter af JEAN BODIN (1529/30-1596) fandt han begrundelser for monarkens absolutte magt eller enevælde som statsform, se f.eks. *Christoffer Dybvad som politisk kritiker*

[9] RIENK VERMIJ *The Calvinist Copernicans. The reception of the new astronomy in the Dutch Republic 1577-1750. History of Science ond Scholarship in the Netherlands, vol. I, p. 20.*

[10] [FR1] s. 231. Måske pga. *Torstenssonkrigen 1643-45.* Det/de kunne have været til undervisning af prinsen, stamme fra biblioteket på Nykøbing Slot eller fra prinsens bekendtskab med ANNE LYKKE (1595-1641), der var gift med lensmanden på Kalundborg Slot CAI RANTZAU (1591-1623), der fik slottet i ny forlening 1620. RANTZAU blev 1621 generalkrigskommissær ved tropperne i Holsten.

[FJ6] s. 86 samt [FJ4] og [FJ5]. Christoffer havde hellere set sig som kongelig råd end som kannik.

Christoffer udtrykte højlydt sine revolutionære tanker om rigets styre ved selskaber hos lensmand og bisp i Bergen dec. 1619-1620. Bergen var blandt rigets største byer og præget af foretagsomme indvandrede borgere, der kontrollerede skatteregnskaber og levede efter egne normer, så lensmand og bisp havde formentlig behov for at vise duelighed.[11] Iflg. et notat i almanakken 6.feb. 1620 formulerede bispen fem hovedpunkter af Christoffers ytringer under overværelse af et vidne, så det er formentlig via bispen, at Christoffers kritik når styret. Lensmanden beordres samle vidnesbyrd under overværelse af Christoffer, men da han er rejst, optages vidnesbyrd uden.

Bispens vidneudsagn med 18 punkter spænder vidt. Der var Christoffers håndfaste forslag til afskaffelse af adelsvældet, 10.punkt *...det kunne ikke koste mere end to læster blod, thi der findes i Danmark kun 800 adelige, som har nogen betydning....*[12], og 11.punkt *...Dr. Petrus Adolphus, medicus, gik ud af kirken og gjorde sin tilbørlige reverents for slotsherren: Ey, sagde han, det skulle dr. Petrus ikke have gjort, fordi de blive ikkun storagtige deraf*, [FR1] s. 244-246. Pkt.10 findes kun ref. i bispens vidnesbyrd, og afvises senere af Christoffer. Borgermester Søfrensen beklagede, at Christoffer brugte *fremmede tungemål*, men han kan bekræfte en del af bispens vidnesbyrd.

Vidnesbyrdene kommer til København juli/august. Christoffer er iflg. almanakken optaget af dagligdags gøremål, sidste notat er fra Lund 28.august 1620, herefter bliver han fængslet og afhørt. Blandt hans private papirer findes flere politiske skrifter, småskrifter krydret med seksuelle motiver, hvoraf flere latterliggør den lutherske ortodoksi ([FJ5] s. 93 med ref.).

Styret havde formentlig også brug for at vise, det ikke tålte kritik og specielt ikke fra endnu en Dybvad. Sagen indledtes med et *åbent Brev* fra *Kancelliet* 22.okt. 1620, hvori kongen gav udtryk for, at han ikke kunne undlade at straffe Christoffer, *for de ubeskedenheder han har begået.* På kongens vegne er en sekretær fra kancelliet anklager, og da Christoffer havde gejstlige/akademiske privilegier beordrede styret konsistorium/rektor afgive dom i sagen.

De *højlærde* i København behandlede sagen 3.nov.-22.dec. 1620. Flere så blasfemi anklagerne som de alvorligste, medens andre gav udtryk for, at sagen var af politisk art, da der ikke kunne peges på, hvilke love der var overtrådt. 22.dec. mødte anklagede, anklager og konsistorium; anklageren begærede dom i sagen, og Christoffer svarede, at *... handd icke viste, hvor udi eller huor mett hand haffde saa forseett sig, at nogen domb burde att gaa hannem imod, besønderligen effterdi att de schrifftelige concepter, som stødis paa, ere ickun "'scripta quædam immatura"'.* Christoffer påpegede, at skrifterne ikke havde været offentliggjort, men anklageren svarede, at det ingen forskel gjorde. Dommen var *exutus omnibus privilegiis Academics*, "'oc dimmiteris"' *ex ordine nostro cum ignominia* og *stilles udi Kong. Maitt^{ts}, som en Kristelig Øffrigheds, naade og unaade.*

Sagen endte hos kongen igen, og *...skønt Kongen havde haft god grund til at lade Dybvad rette på hans liv, blev hans straf af kongelig mildhed formildet til fængsel...og*

[11] Bisp i Bjørgvin bispedømme fra 1616 Niels Paaske (1568-1636) var i Leiden 1597-98, og må have kendt Christoffer derfra. Hos Arkivverket Bergen findes ikke spor af brevveksling Paaske om/til/fra Longomontanus eller Christoffer.

[12] 1 læst sild $\sim$ 12 sildetønder $\sim$ 1670 liter, faste varer: 1 læst korn $\sim$ 22 tønder korn.

lade ham forvare deri som en fange. Kongen bestemte senere, at CHRISTOFFER måtte have sine bøger, lys og varme i cellen, *...da Kongen vil, at han skal skrive det færdigt i Mathematiken, som Kongen tidligere har befalet ham at skrive.*[13] CHRISTOFFER omkom 1622 som fange på Kalundborg Slot ved en kulilteulykke.

Rigsrådet fungerede som formynderregering indtil CHR.4. kronedes 1596. CHRISTOFFER fandt den lutherske ortodoksi for streng, men har næppe kendt til de reelle magtforhold. Fra *Magtstat og godsdrift: det danske ressourcesystem 1630-1730* af E. LADEWIG PETERSEN s. 314-15

> Den religiøse ensretning nåede vore breddegrader allerede 1596 med udnævnelsen af Christian Friis t. Borreby til kansler og Hans Povelsen Resens magtfulde position på universitetet og siden Københavns bispestol, og Christian IV - der vedgik, at han ikke forstod sig på "‘slige subtile sager"’ - fulgte bare med. ...
>
> Magtstatens tilblivelse faldt samtidigt. Majestætens oprustning og kumulative afpresning af skattebevillinger fra rigsrådet - endda på det forfatningsmæssige overdrev - og hans dumdristige intervension i Trediveårskrigen havde stået på siden 1596, men endte i katastrofen 1627-29 og landets totalt ændrede sikkerhedssituation overfor den svenske militære perpetuum mobile.

Iflg. et notat i almanakken lånte CHRISTOFFER 16.august 1618 200 rigx daler (300 daler) mod gældsbrev af badskærer BLASIUS MØLLER udi Vimmelskaftet. Gældsbrevet ser ud til at være overdraget rådmand/købmand JENS BERTELSEN Vejle. Efter CHRISTOFFERS død skriver BERTELSEN til kongen, og beder om dækning i CHRISTOFFERs bibliotek og løsøre. En del bøger er havnet i skandinaviske og nordtyske biblioteker. BERTELSEN var i besiddelse af CHRISTOFFERs købebrev på en anpart i en have Nørre Stenbro og en humlegård under Højbred(?).[14] 21.okt. 1618 noteredes *Drog Jeg til Alse ath handle med Hertug Hans om 2000 daler ath lone paa 3 aars tid.*

HANS WILLUMSEN LAUREMBERG (1590-1658) prof. i matematik (intro. logaritmer) fra 1623 ved det nyoprettede adelige Sorø Akademi havde omk. 1630 en årsløn på 300 daler, mens berideren ved akademiet opretholdt en løn på 800 daler, [KR] s. 274. LAUREMBERG klagede over sin økonomi og de adelige elevers manglende interesse for hans fag.

JØRGEN FUIREN (1581-1628) medforfatter til Euklid kommentaren, kom fra en meget velhavende købmandsfamilie indvandret fra Tyskland, og var 1613 blevet gift med FINCKEs datter MARGRETHE.[15] [16] Fra LADEWIG PETERSEN *Fra standssamfund til rangssamfund 1500-1700*, Dansk social historie 3, s. 379

> Københavns storkøbmænd og akademikere dominerer, købmænd som Hans Hagensen, Blasius Møller og Margrethe Rosenmeyers og blandt

[13] Af Lensregnskabet fremgår *Meßingstager.... j, j* $\sim$ jen $\sim$ 1, KORNERUP 1957-59.

[14] JOHN T. LAURIDSEN *Krig, Købmænd og kongemagt- og andre 1600-tals studier* Museum Tusculanum Press 1999, s. 81-83. Om CHRISTOFFERs bogsamling s. 82f.

[15] FINCKEs ældste datter ANNE var gift med CASPAR BARTHOLIN, og hans søster var gift med LONGOMONTANUS. Billeder og familietræer EJVIND SLOTTVED & DITLEV TAMM. *The University of Copenhagen.* Copenhagen 2009. E-book.

[16] 1617 stødte FINCKE og RESEN sammen i konsistorium. FINCKE skyldte biskop WINSTRUPS enke 2000 rdl. RESEN havde overtaget WINSTRUPs embede og ægtet enken, han krævede nu lånet tilbage på enkens vegne... [FJ4] s. 110.

"‘de højlærde"’ naturforskeren og universitetspolitikeren Thomas Fincke samt familien Fuiren, som binder de to grupper sammen. 1638 registreres professorkollegiet for formuer på 207.600 rd., Fincke og Henrik Fuiren for henholdsvis 35.000 rd. og 57.500 rd. 1657 tegner familien Fuiren-Fincke sig for 187.000 rd., medens skiftet efter lægen og oldforskeren Ole Worm, som i 1638 havde haft en formue på 6.000 rd., opregner udestående fordringer på 32.800 rd., heraf 85% anbragt hos adelige. Tilsammen besad disse universitetsklaner, nært knyttet til det københavnske erhvervsliv ved familiebånd og pengeinteresser, i 1657 formuer på næsten $\frac{1}{2}$ mill. rd.

2 Christoffers Euklid kommentar 1603-5

Kommentaren demonstreres med linjer og tal, 200 sider er med linjer og 260 med tal (*Numeralis*), så det handlede mest om regning på geometriske størrelser.[17] Van Ceulen var kendt/berygtet for at regne med linjer som med tal.

Kommentaren var anbefalet til medicinstudiet i København af Caspar Bartholin i *De studio Medico* fra 1626, [FJ4] s. 305-307

> Aritmetikken skulle lægen beherske for at kunne beregne de kritiske dage og for at kunne analysere sammensatte medikamenter. Også geometrien måtte studeres, dog ikke ved hjælp af lærebøger der var alt for omstændelige, og således ikke havde, som den rigtige læge måtte have, blik for *hele* naturen. Den bedste lærebog var efter Bartholins mening Christoffer Dybvads euklidiske geometri fra 1603, men den kunne man desværre ikke få fat i mere, skriver han.

...Bogen er meget typisk for periodens Euklidudgaver, da antallet af definitioner, postulater og aksiomer følger det gængse i datidens udgaver... Eva Lundbek Hansen.[18]

Fra [Ka] p.86

> ...wurde seiner aus vier Teilen bestehenden Euklid-Bearbeitung von Mathemaikhistorikern bisher zu Recht fast keine Aufmerksamkeit geschenkt, da sie an sich völlig bedeutungslos ist und offensichtlich kaum etwas Neues bringt. Zum teil werden willkürliche und nichtssagende Zahlenbeispiele zu Euklids Sätzen gebracht, zum Teil werden die sätze des griechischen Mathematikers widergekäut und kommentiert - was in zahlreichen anderen zeitgenössischen Euklid-Ausgaben viel besser geschieht.

Der findes også ref. til Euklid kommentaren.[19]

[17] X kan kan ses på `books.google.com` *C. Dibvadii in arithmeticam irrationalivm Evclidis decimo Elementorum libro comprehensam demonstratio linealis & numeralis.*

[18] *Geometrien i Danmark før 1800*, Specialeopgave ved Institut for de Eksakte videnskabers Historie. Aarhus Universitet (1998).

[19] *The Correspondence of John Wallis*, John Wallis, Philip Beeley, Christoph. J. Scriba, Uwe Mayer, Oxford Univ. Press 2008, s. 314, *Collins to Wallis [c. 10/20 February 1666/7]*

> ...1649 I asked Mr Foster what Authors he would advise unto; he replyed that the Algebra of Scheubelius (out of which Mr Bunning hath taken some of his Notes), Stifelius, Clavius, Dybuadius, Stevin, did fully handle the Surds, and Euclids irrationall lines, that Harriot, Harigon, Descartes & Ghetaldus, sufficently the Specious and Exegetic part,...

Kommentarens fire bind har 460 sider, og findes i flere europæiske biblioteker. Kommentaren til de første ni elementer er på 260 sider og formentlig specielt tilpasset medicinstudiet. Som det siges i vurderingen [Ka], har kommentaren ikke sat sig varige spor, men har i bedste fald været et bidrag til anvendt geometri.

Van Ceulen kunne have støttet projektet for at få offentliggjort sine kvadraturberegninger, men det handler kun om fire sider. De tre medforfattere var Jørgen Fuiren mediciner og botaniker, Pieter Corneliszoon Hooft (1581-1647) historiker og forfatter og mag. Hans Birch eller Ioannes Birkittus (?). Fuiren og Hoofts velhavende og indflydelsesrige familer kan have været en del af projektet. P.C. Hoofts fader var Amsterdams borgmester. P.C. Hooft havde beregnet π med 31 decimaler efter van Ceulens metode.[20] Hans Birch var 1593 i Leiden og træffes senere som vejleder for unge adelsmænd.

Beregninger bruges til at sige noget om geometriske størrelser, en analytisk metode med brug af minoranter og majoranter. I kommentaren bog IV Numeralis er på side 37 **sætning 6** *I en given cirkel at indskrive et kvadrat* og **sætning 7** *Om en given cirkel at omskrive et kvadrat*, fra p. 38-39, [Ka] p. 110:

> *Ordo Laterum ordinatarum figurarum Circulo inscriptarum, & à* Quadrato *incipientium, hic est.*
> Quadrati inscripti latus est $\sqrt{2}$.
> VIII goni est $\surd.2 - \surd 2$
> XVI goni est $\surd.2 - \surd.2 + \surd 2$
> XXXII goni est $\surd.2 - \surd.2 + \surd.2 + \surd 2$.
>
> *Circumscriptarum figurarum latera à* Quadrato *incipientia.*
> IV goni est 2
> VIII goni est $\surd 8 - 2$
> XVI goni est $\surd.16 + \surd 128 - \surd 8 + 2$.
>
> Ex *Ludolpho* XXXII goni est
> $\surd.32 + \surd 521 + \surd.128 + \surd 1605632 - \surd.16 + \surd 128 + \surd 8 + 2$

Den omskrevne XVI goni skal læses som $\sqrt{16+\sqrt{128}}-\sqrt{8}-2$. Ludolphos XXXII goni skal være $\sqrt{32+\sqrt{512}+\sqrt{1280+\sqrt{1605632}}}-\sqrt{16+\sqrt{128}}-\sqrt{8}-2$.[21]

Van Ceulens *minus vero* og *majus vero* for π med 31 decimaler er indsat (Euklid sætning 8 og 9 springes over), på samme sider nævnes Viètes 9/5 +

[20] I *De Briefwisseling van Pieter Corneliszoon Hooft* Deel I. 1599-1630 findes ikke korrespondance med Christoffer.

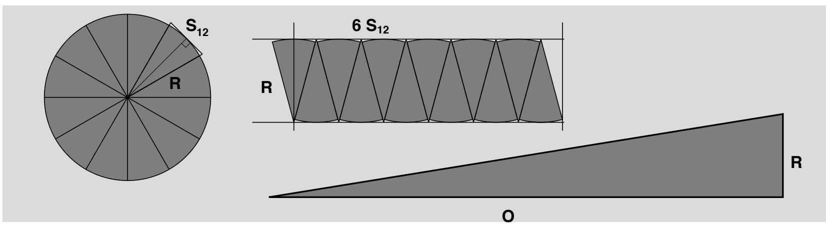
[21] Findes Ludolph van Ceulen en Willebrord Snellius *Fundamenta arithmetica et geometrica...* 1615, `http://www.ludolphvanceulen.nl/site/bibliografie.php` p. 244. Der omskrives til $S_{16} = 2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}} - \sqrt{2}(2+\sqrt{2})$, $S_{32} = 2\sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}} - \sqrt{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}(2+\sqrt{2+\sqrt{2}})$, se s. 118.

$\sqrt{9/5}$ og Scaligers $\sqrt{10}$. Der findes eks. på beregning af kantlængder for ind- og omskrevne regulære 2^{30}-kanter, og en mino- og majorant for π er beregnet med 24 cifre efter udtrykket nedenfor, se evt. (3) s. 118, med 30 rodudtryk i alle led

$$\surd.2-\surd.2+\surd.2+\surd.2+\cdots+\sqrt{2} \text{ og } \frac{\surd.2-\surd.2+\surd.2+\surd.2+\cdots+\sqrt{2}}{\frac{\surd.2+\surd.2+\surd.2+\surd.2+\cdots+\sqrt{2}}{2}}\ .$$

2.1 Omkreds af ind- og omskrevne regulære 2^n-polygoner til cirkler

Her ses kort på nævnte polygoner med kantlængder s_n og S_n til en enhedscirkel. Til s_n og S_n knyttes vinklen $2v$, dvs. $2v = (2\pi)/n$ eller $2v = 360°/n$. Når antal kanter fordobles, halveres vinklerne.

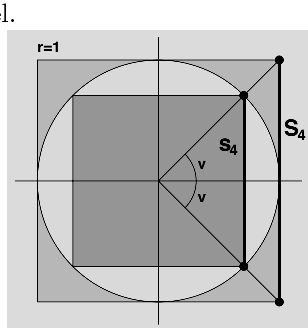


Figur 1: Omkreds O og areal A. For regulære polygoner er $A = \frac{1}{2}rO$, hvor r er radius i den indskrevne cirkel. Oplagt for cirkler? Hvis cirklen deles i et lige antal lige store stykker flere og flere gange, og stykkerne placeres som vist, vil arealet, aftagende gennem større værdier, nærme sig et rektangel med højde radius R og sidelængde $\frac{1}{2}O$, dvs. $A = \frac{1}{2}RO$. Relationen mellem cirkelomkreds og -areal har været kendt før Arkimedes, men han beviste den. Resultatet var kendt i middelalderens Europa.

s_n er mindre end længden af cirkelbuen. Der kunne måske være tvivl om, at længden af cirkelbuen er mindre end længden af S_n. Ellers ses på de tilhørende arealer og sammenhængen mellem cirkelomkreds og -areal, se Fig. 2.1. For en enhedscirkel er

$$\tfrac{1}{2} \times 1 \times O(\text{cirk}) = A(\text{cirk}) < A(\text{omsk. n-kant}) = n\tfrac{1}{2} \times 1 \times S_n \text{ , dvs. } O(\text{cirk}) < nS_n.$$

Linjestykket svarende til S_n kan geometrisk konstrueres ud fra skæringspunkter mellem en cirkeltangent og en vinkelhalveringslinje, linjestykket s_n konstrueres fra skæringspunkter mellem vinkelhalveringslinje og cirkel.



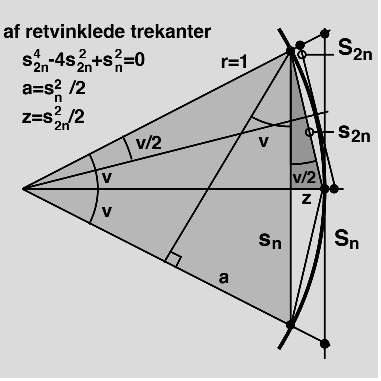
Begyndelsesværdierne er $s_4 = \sqrt{2}$ og $S_4 = 2$. Værdien af π ligger mellem

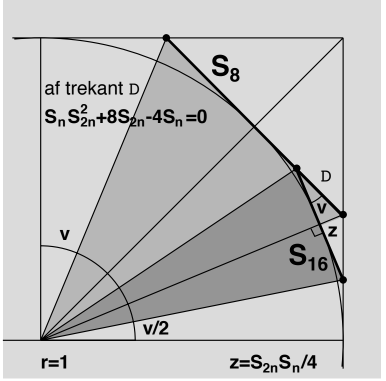
$$(n/2)s_n < \pi < (n/2)S_n.$$

Med nutidens betegnelser er

$$s_n = 2\sin(\pi/n), S_n = 2\tan(\pi/n).$$

Beregning af s_n og S_n hænger sammen med beregning af visse værdier af sinus og tangens, som det også handlede om. Med rimelige sinus og tangens tabeller kan approksimationer til π også beregnes ved multiplikation af et meget stort og meget lille positivt tal. Det var netop, hvad man havde været og var skeptiske overfor. Longomontanus skulle have bemærket, at man ikke kunne summere et stort antal små stykker, og at trigonometriske tabeller var for unøjagtige.





Figur 2: Ind- og omskrevne polygoner til enhedscirkel med fordobling af antal sider.

Man finder

$$s_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_n^2}},$$
$$S_n = \frac{2s_n}{2 - s_{2n}^2} = \frac{2s_n}{\sqrt{4 - s_n^2}},$$
$$S_{2n} = \frac{2\sqrt{4 + S_n^2} - 4}{S_n},$$

og med $S_n = 2\tan(2v)$ og $S_{2n} = 2\tan(v)$ får man $\tan(2v) = \frac{2\tan(v)}{1-(\tan(v))^2}$ og tilsvarende $\sin(2v) = 2\sin(v)\cos(v)$.

Man har nu generelt

$$(1) \qquad s_{2^{n+1}} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - s_{2^n}^2}} = 2\sin(\pi/2^{n+1}) < 2\pi/2^{n+1} = \pi/2^n,$$

$$(2) \qquad S_{2^{n+1}} = \frac{2s_{2^n}}{2 + \sqrt{4 - s_{2^n}^2}} = 2\frac{s_{2^{n+1}}^2}{s_{2^n}} = 2\tan(\pi/2^{n+1}) > 2\pi/2^{n+1} = \pi/2^n,$$

og heraf $2^n s_{2^{n+1}} < \pi < 2^n S_{2^{n+1}}$, $(2^n(S_{2^{n+1}} - s_{2^{n+1}}) < 2\pi(1-\cos(\pi/2^{n+1})))$.

$$s_{2^3} = s_8 = \sqrt{2-\sqrt{4-s_4^2}} = \sqrt{2-\sqrt{4-2}} = \sqrt{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{2}}}$$

$$s_{2^4} = s_{16} = \sqrt{2-\sqrt{4-s_8^2}} = \sqrt{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{2}}}} = \sqrt{.}2-\sqrt{.}2+\sqrt{2}.$$

$$S_{2^3} = S_8 = \frac{2\sqrt{2-\sqrt{4-2}}}{\sqrt{2+\sqrt{4-2}}} = \frac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{2}}}}{\sqrt{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{2}}}} = 2\sqrt{3-2\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}-2 = \sqrt{8}-2,$$

$$S_{2^4} = S_{16} = \frac{\mathbf{2}\sqrt{\mathbf{2}-\sqrt{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{2}}}}}{\sqrt{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{2}+\sqrt{\mathbf{2}}}}} = \frac{2(\sqrt{.}2-\sqrt{.}2+\sqrt{2})}{\sqrt{.}2+\sqrt{.}2+\sqrt{2}} = \sqrt{16+\sqrt{128}}-(\sqrt{8}+2),$$

den sidste est netop en side i en omskreven XVI goni.

Fra *Vanden Circkel, transcriptie* p. 41

> ...om den Circkel door den Gulden reghel alsoo: *Perpendiculum* $\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2}$ teghen *Syde* $\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}$. Alsoo: *Perpendiculum* 1 teghen een syde des buytensten 16 houcx.

Van Ceulens løsninger til rekursionsligningerne var en regneteknisk forbedring eller forenkling, som han 1586 havde fundet *durch Gottes Gnade* og med hjælp fra lokale videnskabsfolk [Ka] p. 112-13.

Af udtrykkene for s_{2^n} ses

$$s_8 = s_4\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}},$$
$$s_{16} = s_8\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} = \sqrt{2}\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\frac{1}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},\cdots$$

og heraf François Viètes (1540-1603) uendelige voksende (minor) produkt approksimation for π formuleret for $\frac{2}{\pi}$ fra 1593,

$$\frac{2}{\pi} < \frac{2}{2^2 s_8} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},\cdots$$

$$\frac{2}{\pi} \leftarrow \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\cdots\overbrace{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{2}}^{n \text{ kvadratrødder}}}_{n \text{ faktorer}} \quad \text{for } n\to\infty.$$

For omskrevne polygoner

$$S_8 = S_4\frac{\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}, S_{16} = S_8\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}, S_{32} = S_{16}\frac{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}},\cdots.$$

For mino- og majoranter findes i Euklid kommentaren i form af eks., alle sammensatte rodudtryk med n rødder

$$2^n\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}} < \pi < 2^n\frac{2\sqrt{2-\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}, \tag{3}$$

men det er VIÈTES udtryk, der omtales mange steder.

For at slippe af med rødderne formulerede VAN CEULEN i *Vanden Circkel*[22] sammenhængen ved ligninger. F.eks. får man med nutidig notation ved at kvadrere

$$x = s_{16} = \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} \text{ er en løsning til } x^8 - 8x^6 + 20x^4 - 16x^2 + 2 = 0.$$

Man skal *kun* regne på en 256-kant af VAN CEULENS regulære omskrevne polygoner afsn. 2.1 s. 116 for at vise, at LONGOMONTANUS værdi $(78/43)\sqrt{3} \approx 3.14186$ er for stor. Den halve omskrevne omkreds er

$$128S_{2^8} = 128S_{256} = 128\frac{2\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}}}} \approx 3.14175$$

Denne majorant har været kendt i Europa fra CHRISTOFFERs Euklid kommentar 1605, VAN CEULENs og SNELLs *Fundamenta arithmetica et geometrica...* 1615, *De Circulo...* 1619 og mange andre steder. LONGOMONTANUS må også have kunnet beregne værdien.

1600-tallets tids- og udholdenhedskrævende beregninger er blevet let håndterbare med matematikprogrammer. Med f.eks. *GeoGebra* kan konstruktion og beregning af en tilsvarende majorant laves uden kendskab til eller anvendelse af trigonometri eller rodberegninger. F.eks. kan længden af $\frac{1}{2}S_{256}$ svarende til $v = 180°/2^8 = 0.703125° = 0°42'11''15'''$ findes ved vinkelhalvering og ganges med $128 \times 2 = 256$.

2.2 Finckes kritik

LONGOMONTANUS kom til Prag sommeren 1600 med BRAHEs sidste instrumenter, hvor han arbejdede på BRAHEs forbedrede måneteori og gjorde måneobservationer. Han så måske en sammenhæng mellem geometriske og astronomiske måner, selvom han senere fandt samme bud på π med andre argumenter [KS].

[22]The "'Vanden circkel"' consists of four sections. The first contains the computation of π. The second shows how to compute the sides of regular polygons of any number of sides, which in modern terms amounts to the expression of $\sin(nA)$ in terms of $\sin(A)$ (n an integer). The third section contains tables of sines up to a radius of 10^7 (not an original achievement), and the fourth has tables of interest. The first and second sections are the most original; they contain not only the best approximation of π reached at that time but also shows Van Ceulen to be as expert in trigonometry as his contemporary Viète. In 1595 the two men competed in the solution of a forty-fifth degree equation proposed by van Roomen in his "'Ideae mathematicae"' (1593) and recognised its relation to the expression of $\sin(45A)$ in terms of $\sin(A)$.
D.J. STRUIK *Biography in Dictionary of Scientific Biography*, New York 1970-1990.

WILLEBRORD SNELL (1580-1626) samlede VAN CEULENs *Vanden Circkel 1596* og indholdet af *De Arithmetische en Geometrische Fondamenten, Leyden 1615* (samlet og udgivet af hans enke), og oversatte til latin i *Fundamenta arithmetica et geometrica...* 1615 og *De circulo & adscriptis liber, Leyden 1619* `http://www.ludolphvanceulen.nl/documents/circkel.pdf`. W. SNELL efterfulgte 1613 sin fader RUDOLPH S. som prof. i matematik i Leiden. W. SNELL har 1617 et tillæg til en geometri af JOHAN PHILIP LANSBERGE (1561-1632) fra 1604 en tabel med 46 nestede rødder $\sqrt{2}, \sqrt{2+\sqrt{2}}, \ldots$ med 54-55 decimaler tilpasset beregning af s_n og S_n (*lansberge cyclometric novae* p. 95 books.google). W. SNELL, KEPLER og LONGOMONTANUS var hos BRAHE i Prag 1600.

Finckes brev findes *Kjøbenhavns universitets historie fra 1537 til 1621, Bind 4* af H.F. Rørdam s. 622-626 evt. `books.google.com`. Først begrundes, at Longomontanus udtryk for opdeling af en halvcirkel med tre månearealer ikke er korrekt, så vidt overtegnede kan se, se f.eks. [KS], dernæst henvises til majoranter af Viète og van Ceulen, dernæst til andre matematikeres begrundelser for uløseligheden, og til sidst beregner Fincke en majorant.

> 1612. 20de Oktober. D. Thomas Fincke skriver til Kansler Christian Friis til Borreby og meddeler en skarp Kritik af et af M. Christen Longomontanus nylig udgivet mathematisk Skrift.
>
> Illustris ac Magnifice Dominoe Cancellarie,
> Domino et Fautor honorande.
>
> Prodiit ante paucas septimanas Cyclometria ex Lunulis reciproce demonstrata, inventore Christiano S. Longomontano: quæ cum ab authore, collega ac amico meo, post divulgationem demum dono mihi missa esset...
>
> Tabula rectarum circuli, arcus $2'$ offert
> Sinum 5817764
> Tangentem 5817764
> in hac diametri 20000000000 mensura.
>
> inscripti quidem 62831851
> circumscripti vero 62831862
>
> illum perimetro circuli minorem, hunc vero majorem: ex indubiatis, etiam in Cyclometria hic nova concessis principiis. ...

Der regnes med sin og tan til $2'$, 5400-kant, i en cirkel med diameter 2×10^{10}, dvs. igen ind- og omskrevne polygoner. I gengivelsen af Finckes brev står "‘$Tan = 5817764$"’, og det må formentlig enten skulle være "‘$Tan = 5817765$"’ eller "‘$Tan > 5817764$"’. Man får så en minor til 3.1415926 og en major til 3.1415931, som også straks forkaster Longomontanus bud.

2.3 Andre kritikere af Longomontanus kvadratur

Pells kritik omtales mange steder, f.eks. [KS] og [JM]. Pell så 1644 Longomontanus *Rotundi in plano*, og overtalte eller fik på anden vis trykkeren i Amsterdam til at tilføje et appendix på to sider med en forkastelse i restoplaget [JM] p. 324-25, *Rotundi...* med appendix på `books.google.com`.

Pell brugte sammenhængen mellem $\tan(v)$ og $\tan(2v)$ på formen: *Hvis det for to vinkler u og v, hvor $0 < u < 45°$ og $0 < v < 90°$ gælder at $\tan(v) = (2\tan(u))/(1-(\tan(u))^2)$, da er $v = 2u$* [JM] p. 339.

I en regulær polygon skal vinklerne være præcist $360°/8 = 45°, 360°/16 = 22.5°, \ldots$. I første trin vælges/beregnes, se tabel nedenfor, $\tan(v) = 0.41421,36$ sammen med $\tan(2v) = 1.00000,012\frac{29}{100}$, som indsat giver $1.00000,01\frac{29}{100} \approx \frac{2\times 0.4142136}{1-0.4142136^2} = 1.0000001284663\ldots$.

Tabell 1: Uddrag af tabel fra *Pellius contra Ch. S. Longomontanus.*

	v	tan(v)	tan($2v$)
	$> 22.5°$	$0.41421, 36$	$1.00000, 01\frac{29}{100}$
	$> 11.25°$	$0.19891, 24$	$0.41421, 36\frac{36}{100}$
	...	...	...
	$> 0.42\frac{3}{16}°$	$0.01227, 25$	$0.02454, 86\frac{94}{100}$
(4-kant $360/2^3$)	tangens $45°, 00'$	er mindre end	1,00000,01
(8-kant $360/2^4$)	tangens $22, 30$	er mindre end	0,41421,36
... ...	...	...	...
(256-kant $360/2^9$)	tangens $0, 42\frac{3}{16}$	er mindre end	0,01227,25

Pell får så den halve omkreds for en omskreven regulær 256-kant til $128 \times 2\tan(0°42'11''15''') < 256 \times 0.01227, 25 = 3.14176$, som er mindre end Longomontanus bud. Pell bemærkede, at han lavede disse beregninger *...uden en kanon for tangenter eller uddragning af rødder...*, og at Descartes roste ham for at undgå beregninger med kvadratrødder, han løste åbenbart ligningerne numerisk. Pell beregnede iterationer af majoranter fra tangens svarende til van Ceulens beregninger, og Pell fik gjort opmærksom på, at det kun var nødvendigt at regne med fem decimaler eller seks betydende cifre. Det er stadig mystisk, at Longomontanus ikke regnede efter.

Pell bad 1646 Mersenne (1588-1648) kontakte Torricelli (1608-1647) og Cavalieri (1598-1648) angående Pells tilbagevisning. Torricelli mente, at Pell klart tilbageviste Longomontanus kvadratur, men at en forkastelse lettere baseredes på van Ceulens beregninger, [JM] p. 340.

Hos [JM] nævnes p. 346, at sammenhængen mellem tan(v) og tan($2v$) vises geometrisk og algebraisk, E VI,3 og retvinklet trekant, først af Frans van Schooten (1615-1660) i *Geometria*[23], men findes den ikke i de kanoniske trekanter?

Thomas Hobbes (1588-1679) søgte at anvende den geometriske metode til sin politiske filosofi. Hobbes blev opfordret til at vise formlen for tan($2v$), som Pell brugte. Hobbes mente selv senere at have løst cirkelkvadraturet, han leverede omk. 12 skrifter om emnet. John Wallis (1616-1703) påviste, at Hobbes kvadraturer hørte til de indbildte, og striden *battle of the books* stod på fra 1655 til Hobbes død.[24] Diskussionerne omfattede geometri, religion og politik, og er omtalt mange steder.

Referanser

[KB] Kancelliets brevbøger, Kancelliets brevbøger vedrørende Danmarks indre forhold, kronologisk ordnet registrant med udtog af skrivelser fra Danske Kancelli.

[23] Oversatte og udbyggede Descartes geometri til latin 1649, anden udgave 1659-61. Van Schooten var prof. ved ingeniørskolen i Leiden.

[24] F.eks. Douglas Jesseph *Of analytics an indivisibles: Hobbes on the methods of modern mathematics*, Tome 46 n°2-3. pp. 153-199.

[FJ4] Morten Fink-Jensen. *Fornuften under troens lydighed. Naturfilosofi, medicin og teologi i Danmark 1536-1636.* Museum Tusculanums Forlag 2004.

[FJ5] Morten Fink-Jensen. *De lærde Dybvader. Bogtryk og samfundskritik i det 16. og 17. århundrede.* Fund og Forskning 2005/44, p. 63-106.

[FJ6] Morten Fink-Jensen. *Enevældens ensomme fortrop. Christoffer Dybvads systemkritik under Christian 4., p. 37-62* i *Oprørere* Skæbnefortællinger om danmarkshistoriens tolv største rebeller. Redaktion: Morten Petersen. Aschehoug Dansk Forlag A/S 2006.

[Ka] Friedrich Katscher. *Einige entdeckungen über die Geschichte der Zahl Pi sowie Leben und Werke von Christoffer Dybvad und Ludolph van Ceulen.* Österreichische akademie der wissenschaften. Mathematisch-Naturwissenschaftlische klasse denkschriften, 116. band, 7.abhandlung. Heft 25. Wien 1979. Forkortet udgave `http://www.ludolphvanceulen.nl/documents/Katscher.pdf`.

[Kr] Helge Kragh. *Fra middelalderlærdom til den nye videnskab, 1000-1730.* Dansk Naturvidenskabs Historie, bind 1, Århus Universitetsforlag, Århus 2005.

[JM] Jan A. van Maanen. *The refutation of Longomontanus' quadrature by John Pell.* Annals of Science (1986), 43:4, 315 - 352.

[FR1] Holger Frederik Rørdam. *Danske Magasin.* Fjerde Række. Andet Binds andet Hefte, 4.række, 1873, VIII s. 105-144, Andet Binds tredie Hefte, XIV. *Efterretninger om Jørgen og Christoffer Dybvad.* (slutning) s. 211-264, 4.række. Femte Binds første Hefte, III. *Fortsatte Efterretninger om Dr. Christoffer Dybvad.* s. 40-54. `http://books.google.com/books, danske magazin dibvad`.

[FR2] Holger Frederik Rørdam. *Kjøbenhavns Universitets Historie fra 1537-1621*, Bd. I-IV, København 1868-1877.`http://books.google.com/books`.

[JS] Jürgen Schönbeçk. Thomas Fincke und die *Geometria rotundi.* NTM Zeitschrift für Geschichte der Wissenschaften, Technik und Medizin. Publisher Birkhäuser Basel, Volume 12, Number 2 / June, 2004, Pages 80-99.

[KS] Henrik Kragh Sørensen & Helge S. Kragh. *Longomontanus og cirklens kvadratur.* Nordisk Matematisk Tidsskrift 2007, Årgang 55, Hæfte 3, s. 97.