Kochs snöflinga

Ulf Persson.

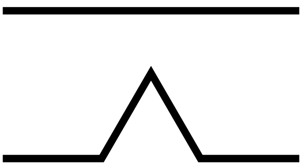
Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola och
Göteborgs Universitet
ulfp@chalmers.se

Inledning - kustlinje

Hur lång är den engelska kusten? Ser vi på en karta består den av inbuktande vikar och utstående uddar. Vi måste ta hänsyn till detta när vi tar vår linjal och mäter. Vid närmare betraktande visar det sig att vikarnas och uddarnas kustlinjer i sin tur består av mindre vikar och uddar, och vid en större skala tvingas vi göra ännu mera ut- och invikningar och därmed mäta upp något längre. En man som går längs kusten kommer att få ta hänsyn till små ut- och inbuktningar som inte syns på någon karta och stegar han längden på kusten kommer han att erhålla ett ännu längre värde. Och en myra kommer i sin tur att möta små strukturer som mannen inte ser och kan hoppa över, och därmed få gå en ännu längre sträcka. Och så vidare. Tar det någonsin slut? I den fysiska världen kan inte detta fortsätta i det oändliga, utan atomernas storlek sätter en undre gräns. Dock i den matematiska världen förekommer inga sådana restriktioner, där kan vi fortsätta i det oändliga. Längden på en matematiskt idealiserad kustlinje kommer således att bero på linjalens storlek. Om linjalens längd är r och $N(r)$ betecknar antalet steg vi måste ta, blir längden på skalan r helt enkelt $N(r)r$. Om vi har ett rätt linjestycke, inser vi att $N(r) = L/r$ där L är längden på stycket. Försöker vi mäta upp arean av en kvadrat erhåller vi $N(r) = K/r^2$ och därmed att längden går mot oändligheten. Ju mindre steg vi tar, desto noggrannare kan vi besöka en kvadrat och desto längre tid tar det. I bägge fallen för det sig om potens funktioner Kr^{-d} där d ger dimensionen. Uppenbarligen $d = 1$ i fallet av ett linjestycke, eller mera allmänt längden av en rektifierbar kurva, medan i den 2-dimensionella kvadraten $d = 2$.

Kochs snökurva

Koch's snökurva, introducerad av och benämnd efter den svenske matematikern Helge von Koch (1870-1924) stammar från 1904. Den bör vara bekant för de flesta, om inte annat brukar Normats omslag prydas av olika stadier i dess konstruktion. Vi påminner om denna. Vi startar med en regelbunden sexhörning $\mathbf{K_0}$, säg med sidlängd 1 och därmed total omkrets 6 för att fixera tanken. I nästa steg ersätter vi varje sida med en zigzag linje enligt figur.



Där triangeln är liksidig med sidlängd en tredjedel av den ursprungliga sträckan. Gör vi denna konstruktion på var och en av de sex sidorna får vi en polygon $\mathbf{K_1}$ bestående av $6 \times 4 = 24$ kanter, och total omkrets $\frac{4}{3} \times 6 = 8$. Fortsätter vi processen erhåller vi $\mathbf{K_2}$ med $24 \times 4 = 96$ kanter och total längd $\frac{4}{3} \times 8$ och i allmänhet kan vi definera $\mathbf{K_n}$ med 6×4^n kanter, var och en av längd $(\frac{1}{3})^n$ och därmed total längd $6 \times (\frac{4}{3})^n$. Slutligen kan vi definiera $\mathbf{K} = \bigcap_{\mathbf{n}}(\bigcup_{\mathbf{m>n}} \mathbf{K_m})$ som gränskurvan av alla stadierna i konstruktionen.

De olika ändliga polygonerna $\mathbf{K_n}$ är helt enkelt det vi stegar ut när vi går med steg av längd $(\frac{1}{3})^n$. Sätter vi $N(r) = Kr^{-d}$ finner vi att $K(r/3)^{-d} = N(r/3) = 4N(r) = 4Kr^{-d}$. Tar vi logaritmen erhåller vi $d \log 3 = \log 4$ d.v.s. $d = \log 4 / \log 3 = 1.26186...$ Detta d kallas för Hausdorff dimensionen för kurvan K vilket i detta fall är ett tal strikt mellan 1 och 2. Dimensionen är så att säga fraktal, och dessutom om vi tittar på kurvan i förstoringsglas kan vi inte avgöra skalan, i motsats till om vi tittar på en cirkel. Jo rätare cirkelbågen är desto större är förstoringen. Som Mandelbrot en smula provokativt påpekar, Kochkurvan är enklare än cirkeln.

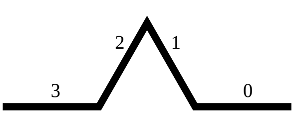
Ett annat sätt att definiera Kochkurvan är helt enkelt att ta det inre $\mathbf{U_0}$ av den ursprungliga hexagonen, och sedan lägga till till varje sida en liksidig udde som ovan, och erhålla en oändlig följd av öppna mängder $\mathbf{U_0} \subset \mathbf{U_1} \cdots \subset \mathbf{U_n} \subset$ och helt enkelt definera $\mathbf{U}$ som unionen, och $\mathbf{K}$ som den topologiska randen av $\mathbf{U}$. Om vi låter $A = \sqrt{3}/4$ vara arean av en liksidig triangel med sidan 1 inser vi lätt att arean av $\mathbf{U}$ är givet av

$$6A(1 + (1/3)^2 + 4(1/3)^4 + 4^2(1/3)^6 + \dots) =$$
$$6A(1 + 1/9(1 + (4/9) + (4/9)^2 + \dots)) = 6A(1 + 1/5) = (36/5)A$$

obetydligt större än den ursprungliga hexagonen.

Parametrisering av Kochkurvan

Konstruktionen av Koch kurvan består i att vi beskriver (riktade) linjesegment. Ett sådant är entydigt bestämt av att man specifierar dess mittpunkt, dess längd, och den vinkel det riktade segmentet gör med x-axeln. Om vi för enkelhetens skull begränsar oss till en av de sex kanterna i den ursprungliga hexagonen, och kallar den för 0



Nästa fyra segment numrerar vi enligt schemat till vänster. På detta sätt kan vi till varje punkt i intervallet $[0, 1]$ associera en punkt $\Theta(x)$ på Kochkurvan genom att utveckla ett givet tal i bas 4, den så kallade 4-adiska expansionen.

Vi observerar även att om $|x - y| \leq \frac{1}{4^n}$ kommer $|\Theta(x) - \Theta(y)| \leq \frac{1}{3^n}$ vilket illustrerar den likformiga kontinuiteten men om $|x - y| \geq \frac{1}{4^n}$ gäller $|\Theta(x) - \Theta(y)| \geq \frac{1}{3^{n+1}}$ vilket illustrerar icke-deriverbarheten, däremot gäller ett Lipschitz villkor med lämplig exponent.

Vi kan även skriva ner avbildningen Θ explicit via följande rekursiva schema.

tal	mittpunkt	vinkel	längd
0.p	P	θ	r
0.p0	$P+\frac{r}{4}e^{\theta i}$	θ	r/3
0.p1	$P+\frac{r}{6}e^{(\theta+\pi/3)i}$	$\theta-\pi/3$	r/3
0.p2	$P+\frac{r}{6}e^{(\theta+2\pi/3)i}$	$\theta-2\pi/3$	r/3
0.p3	$P+\frac{r}{4}e^{(\theta+\pi)i}$	θ	r/3

Ur vilket vi sluter

$$\Theta(x) = x_0 + x_1\zeta + x_2\zeta^2 + \ldots x_5\zeta^5$$

där $\zeta = e^{-\frac{\pi i}{3}}$ är en primitiv enhetsrot av ordning 6 och

$$x_i = \sum_{\sum^{m-1}\overline{p_n}\equiv i(6)} \frac{1}{3^m}\alpha_m$$

med $x = 0.p_1p_2p_3p_4\ldots$ den 4-adiska expansionen och $\overline{p_n} = p_n(3)$ samt $\alpha_m = \frac{3}{4}$ om $\overline{p_n} = 0$ och annars $\alpha_m = \frac{1}{2}$.

Observera att om x är av formen $\frac{A}{2^n}$ kommer $\Theta(x)$ motsvaras av ett hörn och omvänt. Vidare att x är rationellt omm x_i är rationella för alla $i = 0,\ldots 5$. I det senare fallet kommer $\Theta(x)$ vara slutpunkten för logaritmiska spiraler, eller ekvivalent snittet mellan $\mathbf{K}$ och $\mathbb{Q}(\zeta)$.

Låt oss betrakta $\mathbf{K_n}\cap\mathbf{K}$ denna kommer att bestå av $\mathbf{K_n}$ där varje segment är utbytt mot en Cantormängd. Unionen $\bigcup(\mathbf{K_n}\cap\mathbf{K})$ kommer att utgöra en uppräknelig union av Cantormängder och motsvara de 4-adiska tal, vars utvecklingar endast har ett ändligt antal 1:or och 2:or. En godtycklig linje dragen från origo kommer att missa alla dessa Cantormängder men inte desto mindre skära $\mathbf{K}$. Nästan alla linjer kommer att skära kurvan i ett oändligt antal punkter. Ett intressant problem är att försöka karaktärisera de tal x så att $\Theta(x)$ är synlig från origo.

Slutligen inser vi från figuren till vänster att måttet av $\mathbf{K}$ är noll. Ty kurvan är innesluten i skuggningen av $\mathbf{K_n}$ vilken har arean $6\times(\frac{4}{3})^n\frac{1}{3^n}\frac{\sqrt{3}}{6} \mapsto 0$.

Den sista metoden ger även ett alternativt sätt att mäta längden av kurvan. Vi kan låta $\mathbf{K}_\epsilon$ vara den öppna mängden av alla punkter inom avståndet ϵ från $\mathbf{K}$. För en rektifierbar kurva $\mathbf{C}$ förväntar vi oss att måttet av $\mathbf{C}_\epsilon$ kommer att vara av storleksordning $2\epsilon L$ men för Kochkurvan kommer vi istället ha en exponent < 1 på ϵ (vilken?), och även om måtten går mot noll, går det inte lika snabbt som ϵ.