Rømers Tandhjul

Frank Nielsen

Institut for Matematik
Danmarks Tekniske Universitet
Bygn. 303S
2800 Kgs. Lyngby
fn@privat.dk

Den historiske baggrund

Den sidste halvdel af 1600 – tallet var i Europa en periode, hvor der skete store fremskridt inden for naturvidenskaberne og inden for matematik. Blandt de mænd, der var mest fremtrædende i denne udvikling, var hollænderen Christiaan Huygens (1629 – 1695), englænderen Isaac Newton (1642 – 1727), danskeren Ole Rømer (1644 – 1710) og tyskeren Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Disse mænd var i kontakt med hinanden gennem personlige møder og gennem brevveksling. De offentliggjorde resultater, dels i bøger, og dels i de to første videnskabelige tidsskrifter, nemlig det engelske Philosophical Transactions udgivet af Royal Society fra 1665, og det franske Journal des Sçavans, der blev udgivet af Académie des Sciences, også fra 1665.

Ole Rømer arbejdede i perioden 1672 – 1682 i Paris som medlem af Académie des Sciences. Hans mest berømte arbejde er hans bestemmelse af lysets hastighed, der blev publiceret i Journal des Sçavans 7. december 1676. Både Newton og Huygens reagerede, henholdsvis positivt og med begejstring, på Rømers arbejde. Men Rømer arbejdede med mange andre ting. Han opfandt f.eks. meridiankredsen. Det er en astronomisk kikkert, som er fastgjort på tværs af en vandret akse, der er orienteret øst – vest. Den storcirkel på himlen, der går gennem Zenit (lige over hovedet) og gennem horisontens nord- og sydpunkt, går altså altid midt ned gennem meridiankredsens synsfelt. Meridiankredsen har et trådkors og en 360 graders gradskala, hvor man kan aflæse en stjernes højde over horisonten. Ideen med instrumentet er, at man kan bestemme en stjernes position ved at måle dens højde ved passagen af trådkorset og samtidig måle tidspunktet for stjernens passage af det. Nøjagtigheden af den sidste måling afhænger selvfølgelig af det ur, man benytter. Det er nok den vigtigste grund til, at Rømer også arbejdede med at konstruere ure, der gik med øget præcision.

Det var der også en anden grund til. Fra Columbus rejse til Amerika i 1492 var skibsrejser med lange perioder uden landkending blevet stadig mere almindelige. Mens breddebestemmelse til søs er let at foretage, havde man dengang ingen acceptabel metode til at bestemme længdegraden. Columbus var således helt uvidende om, hvor langt mod vest han havde rejst. Den metode til længdebestemmelse, som fra 1700-tallets midte fik stadig større udbredelse, og som blev anvendt helt op mod vore dage, var følgende: På skibet havde man et ur, der gik efter londontid. (London fordi 0–graders længdecirklen går gennem London.) Man havde også et ur med, som man daglig stillede til den lokale tid ved hjælp af Solen eller stjernerne. Da en flytning på 15 grader vestpå formindsker lokaltiden med en time, kan man ved hjælp af tidsforskellen mellem de to ure beregne længdegraden. Igen afhænger nøjagtigheden af stedbestemmelsen af, hvor præcist londonuret går.

Op til 1500–tallet havde urene ingen minutviser, nøjagtigheden taget i betragtning ville det være spildt ulejlighed. Det afgørende fremskridt i nøjagtigheden af urene kom i 1656, da Huygens konstruerede det første pendulur. Huygens ure nåede en nøjagtighed på ca. 1 sekund i døgnet. Det var langt fra nøjagtigt nok til længdegradsbestemmelse til søs, for der kunne uret ikke stilles i perioder af op til flere måneders længde. Og i øvrigt er pendulure ikke egnede til søs, på grund af skibenes rulning. Men i astronomisk sammenhæng var det fint, for der kunne urene stilles dagligt. Der var mange ting i et urs konstruktion, der spillede en rolle for nøjagtigheden. Rømer må have tænkt, at formen på tænderne på de mange tandhjul i et ur også måtte spille en rolle for nøjagtigheden, og i årene frem til 1678 arbejdede Rømer med dette emne, og han holdt foredrag om det lørdag den 15. februar 1676 i Académie des Sciences. Det var skik, at en tilhører refererede foredragene i Journal des Sçavans, men dette skete vist ikke i dette tilfælde, i hvert fald er det intet bevaret om indholdet af foredraget, som ikke desto mindre vakte stor interesse i den videnskabelige verden. I adskillige breve til Rømer beklagede Leibniz den manglende offentliggørelse af Rømers studier af tandhjulsformer. F.eks. skrev Leibniz den 20. januar 1700 til Rømer (oversat fra latin):

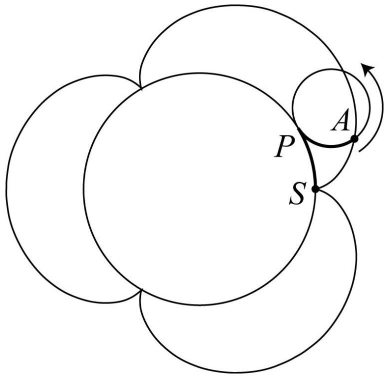
”Jeg havde en gang i Paris set en lille del af dine yderst forfinede opfindelser vedrørende epicykloiden og tandhjulene, som Huygens først havde lovprist over for mig. Mens du tøvede med at udgive dem var en anden og ligeledes fortræffelig mand, efter egen tilskyndelse håber jeg, men dog senere end din erkendelse, kommet først med en udgivelse. Gid du måtte samle de mange fremragende opdagelser, som du uden tvivl har hos dig og udgive dem?”[1].

Men på trods af mange opfordringer til publikation fik Rømer aldrig offentliggjort noget om sine tandhjulskonstruktioner. Heller ikke i hans efterladte manuskripter er der bevaret noget om sagen. Man har derfor anset det for umuligt at finde ud af, hvad det var, Rømer lavede om tandhjul.

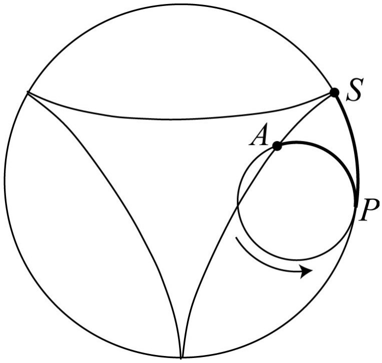
Epicykloider og hypocykloider

Før vi kan gå i gang med at beskrive Rømers konstruktion, må vi forklare lidt om to typer af kurver, som kaldes henholdsvis epicykloider og hypocykloider. Disse kurver var kendt allerede i græsk oldtid, især epicykloiderne. De blev nemlig brugt ved beregning af planeternes baner.

En epicykloide er en kurve, der beskrives af et punkt på en cirkel, der ruller på ydersiden af en anden cirkel. På figur 1 ruller en cirkel med radius r på ydersiden af en cirkel med radius $3r$. Det lille sorte punkt på rullecirklen beskriver så den viste epicykloide. En hypocykloide fremkommer på samme måde, når den lille cirkel ruller inde i den store, sådan som det er vist på figur 2. Animerede versioner af figurerne kan ses på adressen [2].



Figur 1



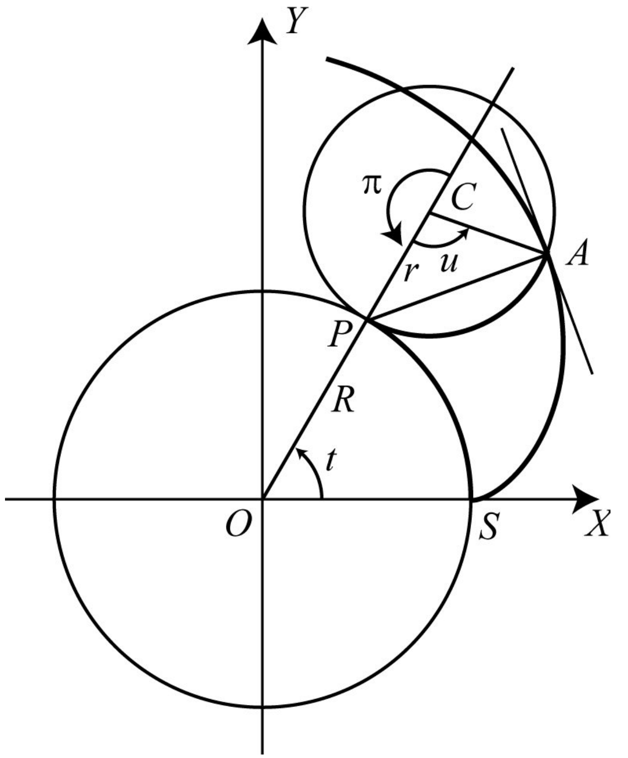
Figur 2

Vi tænker os i begge tilfælde, at den lille cirkel starter med at røre den store faste cirkel i startpunktet S, og det lille sorte punkt i S tænker vi os sidder fast på den lille cirkel. Så starter vi rulningen i pilens retning, og lidt senere er cirklen kommet til den viste position, hvor den rører den store i punktet P. A er den nye beliggenhed af det sorte punkt, og da det er en rulning er de to fede buer PA og PS lige lange. På figurerne er den store cirkels radius 3 gange så stor som den lilles. Derfor kommer cykloiden i dette tilfælde til at bestå af 3 buer med spidser ind mod den faste cirkel.

Den egenskab ved cykloiderne, som er afgørende for Rømers konstruktion, beskrives i følgende

Sætning. Lad A være det punkt på den rullende cirkel, der beskriver cykloiden og lad P være røringspunktet mellem de to cirkler. Da vil cykloidens tangent i punktet A være vinkelret på liniestykket AP.

Da Rømers manuskript om hans tandhjulskonstruktion ikke er bevaret, ved vi ikke, hvordan Rømer var nået frem til sætningen. Differential- og integralregningen blev opfundet omtrent samtidig med, at Rømer lavede sin tandhjulskonstruktion. På det tidspunkt kendte Rømer næppe de nye regningsarter, selv om han kendte både Newton og Leibniz. I årene inden differential- og integralregningen havde man andre metoder til tangentbestemmelse, men de var besværlige, hver enkelt tangentbestemmelse var en videnskabelig bedrift i sig selv. Metoderne behandlede kurver beskrevet ved ligninger, og da cykloiderne ikke har pæne ligninger, var metoderne ikke egnede til bestemmelse af tangenter til cykloider. Sætningen følger umiddelbart af den generelle matematiske teori om rulning. Her vil vi bevise sætningen ved differentiation. Vi beviser kun sætningen for epicykloiden, det foregår ligesådan for hypocykloiden.



Figur 3

Bevis for sætningen. Vi benytter et koordinatsystem og de navne, som vist på figur 3. Da der foregår en rulning, hvor A starter i S, er de to cirkelbuer PA og PS lige lange. Da deres længder er henholdsvis Rt og ru er

$$u = \frac{R}{r} t.$$

Vinklen fra X-aksen til CA er

$$t + \pi + u = \frac{R+r}{r} t + \pi.$$

Koordinaterne til A bliver derfor

$$(x, y) = (R+r)(\cos t, \sin t) - r \left(\cos \frac{R+r}{r} t, \sin \frac{R+r}{r} t \right).$$

Heraf fås ved differentiation, at

$$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) = (R+r) \left[-\sin t + \sin \frac{R+r}{r} t, \cos t - \cos \frac{R+r}{r} t \right]$$

Hermed har vi fundet en vektor på tangenten. Vektoren PA har koordinaterne

$$(R+r)(\cos t, \sin t) - r\left(\cos\frac{R+r}{r}t, \sin\frac{R+r}{r}t\right) - R(\cos t, \sin t) =$$

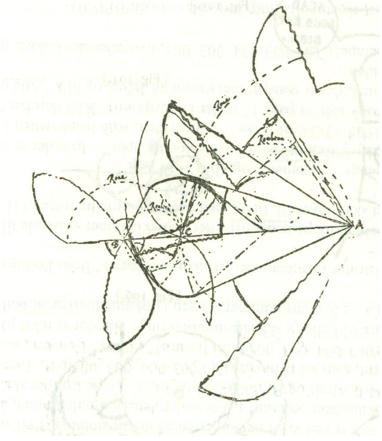
$$r\left[\cos t - \cos\frac{R+r}{r}t, \sin t - \sin\frac{R+r}{r}t\right].$$

Da de to vektorer i kantede parenteser har formen (M, N) henholdsvis $(N, -M)$ er de vinkelrette på hinanden, og hermed er sætningen bevist.

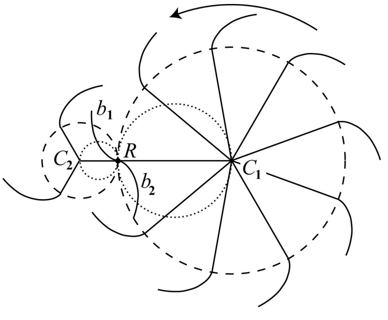
- Vi er her nødt til at fremhæve en ting, som kan virke mærkelig, men som vi får brug for om lidt: Beskrivelsen og sætningen ovenfor vedrører bevægelsen af den lille cirkel i forhold til den store. Resultatet bliver uforandret gyldigt, hvis den store cirkel har sin egen rotation, som cykloiderne og den lille cirkel følger med i.

Rømers tandhjulskonstruktion

Som nævnt efterlod Rømer sig ikke sig materiale om sin tandhjulskonstruktion. Det viser sig imidlertid, at Huygens reagerede mere konstruktivt end Leibniz på Rømers tøven med at publicere sine opdagelser. I perioden fra 1888 til 1950 udgav det hollandske Videnskabernes Selskab Huygens samlede værker i 22 bind. Dette værk indeholder ikke blot de arbejder, som Huygens selv offentliggjorde, men også talrige efterladte manuskripter. I bind 18 af de samlede værker findes uddrag af et manuskript kaldet E. På side 167 i dette manuskript, som stammer fra slutningen af 1678, har Huygens lavet en tegning, som viser en af Rømers tandhjulskonstruktioner [3]. På figur 4 viser vi Huygens tegning.



Figur 4



Figur 5

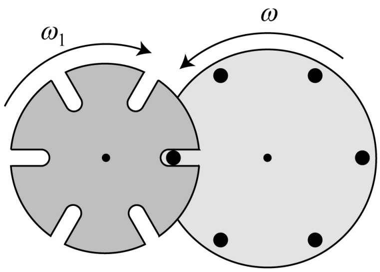
Huygens citerer ingen tekst af Rømer, men han formulerer selv følgende billedtekst: "Rømers hjul i overensstemmelse med beskrivelsen af epicyklerne." Anden tekst til tegningen er der ikke i Huygens manuskript, men den korte tekst dokumenterer, at tegningen viser en af Rømers konstruktioner, og at kurverne er epicykloider. Nu står vi så med det detektivarbejde, at finde ud af hvad der foregår, og bagefter hvad formålet er.

Det er tydeligt nok, at figur 4 forestiller to tandhjul i indgreb. Til venstre er der et tandhjul med 3 tænder, og til højre et med 9, hvis de alle havde været tegnet. Både på det store og det lille tandhjul består den ene side af tænderne af et liniestykke og en kurve. De viser tandhjulsformen. Den anden side af tænderne er kun groft antydet med bølgelinier. På figur 5 har jeg kun tegnet de væsentligste ting fra Huygens figur, og jeg har vist tænderne i en lidt anden stilling end den på figur 4. På begge figurer er der to stiplede cirkler, som har centrum fælles med hver sit af tandhjulene. Radius i den store af disse cirkler er 3 gange så stor som radius i den lille. Det er disse cirkler, som tandhjulene er bygget op på. Vi kalder dem her basiscirklerne. Basiscirklernes centre er faste punkter, de flytter sig ikke, når tandhjulene drejer. Der er yderligere to cirkler på figurerne, de er punkterede på figur 5. Til højre er der en cirkel, der som diameter har en radius i basiscirklen til højre. Og til venstre er der tilsvarende en lille cirkel, hvis diameter er en radius i den venstre basiscirkel. Disse to cirkler kaldes rullecirkler.

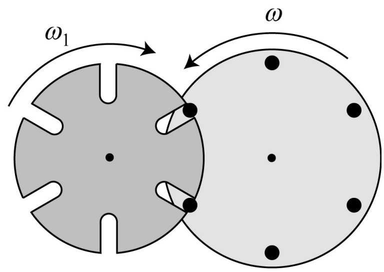
Nu kan vi beskrive, hvad der foregår på figur 4 og 5: Der er tale om to tandhjul med henholdsvis 3 og 9 tænder, idet kun den ene side af tænderne er vist. En af tænderne på det store tandhjul er C_1Rb_1, hvor b_1 er et lille stykke af den epicykloide, der fremkommer, når den lille rullecirkel ruller på den store basiscirkel. De andre tænder fås ved rotationer på 40° af denne. En af tænderne på det lille tandhjul er C_2Rb_2, hvor b_2 er et lille stykke af den epicykloide, der fremkommer når den store rullecirkel ruller på den lille basiscirkel. De andre tænder fås ved rotationer på 120° af denne. Hermed er Rømers konstruktion beskrevet. - Da jeg første gang så Huygens tegning, tænkte jeg sikke noget rod, det kan man vist ikke få noget ud af? Men nu, efter at jeg har forstået den, er jeg blevet klar over, at alting er beskrevet nøjagtigt og detaljeret.

Et matematisk krav til tandhjul

For at give læseren en forståelse for, at acceptable tandhjul kun kan konstrueres på teoretisk baggrund, undersøger vi funktionen af de to tandhjul på figurerne nedenfor. De drejer sig, som pilene viser.

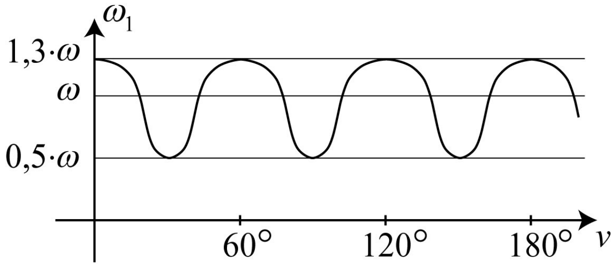


Figur 6



Figur 7

Det mørke tandhjul med radius R har 6 spalter, og på det lyse sidder der 6 sorte cylindre, der passer ind i spalterne. Spalteåbningerne og cylindrene udgør to kongruente regulære sekskanter. Afstanden mellem de to tandhjuls centre er afpasset som det er vist på figur 7. Så samtidig med, at en sort cylinder bevæger sig ind i en spalte, forlader den næste cylinder sin spalte. De to tandhjul er lige lang tid om at bevæge sig en gang rundt. Vi tænker os nu, at det lyse tandhjul drejer sig med konstant vinkelhastighed ω, og at det mørke følger med med en vinkelhastighed ω_1, som viser sig ikke at være konstant. Dette kan man indse ved betragtning af figur 6 og figur 7: På figur 6 er der to grunde til, at $\omega_1 > \omega$. Dels er afstanden fra cylinderen til venstre til det mørke tandhjuls centrum mindre end R. Og dels bevæger cylinderen sig på tværs af spalten. En lille udregning viser, at $\omega_1 = 1,3 \cdot \omega$. På figur 7 er $\omega_1 < \omega$. Det skyldes, at den tand, der er på vej ind i en spalte, ikke bevæger sig på tværs af spaltens retning, men skråt nedad i den, og det giver naturligvis mindre bidrag til vinkelhastigheden. En udregning viser, at $\omega_1 = 0,5 \cdot \omega$. Resultatet er, at det mørke tandhjul ikke bevæger sig med konstant vinkelhastighed. Figur 8 nedenfor viser variationen af ω_1 som funktion af den vinkel v, som det lyse tandhjul har drejet sig ud fra stillingen på figur 6.

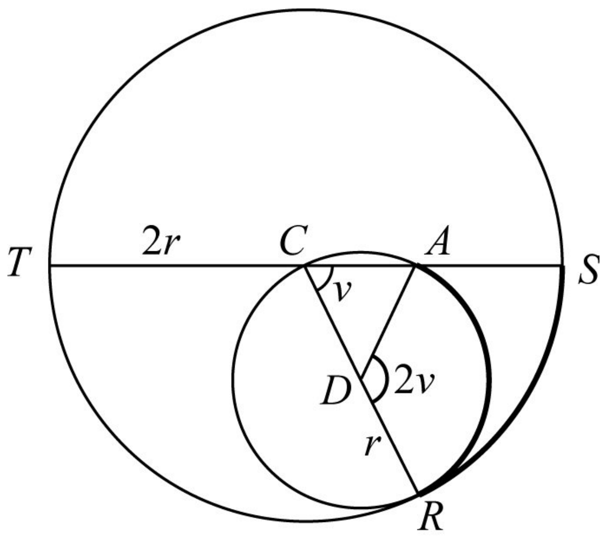


Figur 8

Det fremgår tydeligt, at tandhjul af denne type ikke er velegnede, f.eks. i gearkasser i biler! Hvis man brugte dem der og har planlagt at køre 100 km/T, vil hastigheden, hver gang tandhjulet går en tand frem, variere mellem 50 km/T og 130 km/T. Så noget vil gå i stykker. Når to tandhjul er i indgreb, må man stille det krav, at når det ene drejer med konstant vinkelhastighed, så drejer det andet sig også med konstant vinkelhastighed, og det er et matematisk problem at sikre dette.

Formålet med Rømers konstruktion

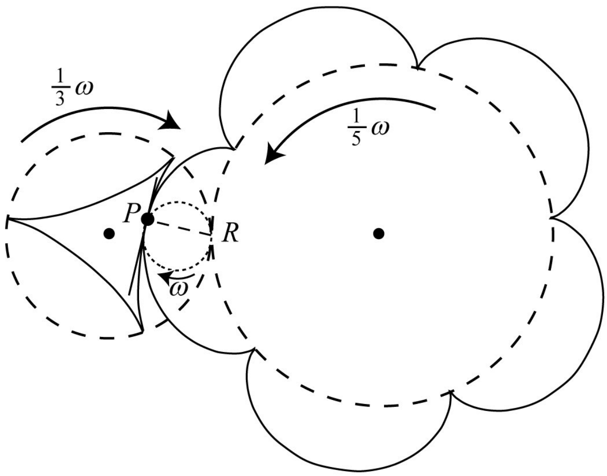
Vi har ingen information fra samtiden, om hvad det var, Rømer ville opnå med sin tandhjulskonstruktion. De redaktionelle kommentarer i [3] til Rømers tegning indeholder en korrekt oplysning om formålet, men med en uklar begrundelse. Det fremgår af tegningen, at Rømer benytter to rullecirkler, der er halvt så store som basiscirklerne. Det har den konsekvens, at hypocykloiderne bliver liniestykker, nemlig diametre i basiscirklerne. Det viser vi ved betragtning af figur 9.



Figur 9

Her er der tegnet en cirkel med centrum C og radius $2r$. Inde i den ruller en cirkel med centrum D og radius r. Rulningen starter i S og det punkt på den lille cirkel, der starter i S, beskriver så en hypocykloide. Figuren viser den situation, hvor røringspunktet er kommet ned til R. Vi tegner diametrene ST og CR. A er det andet skæringspunkt mellem den lille cirkel og ST. v betegner størrelsen af vinkel SCR. Så har vinkel ADR størrelsen $2v$ og det følger heraf, at de to fede cirkelbuer AR og SR er lige lange. A er altså et punkt af hypocykloiden, og cykloiden bliver derfor diameteren ST, gennemløbet to gange.

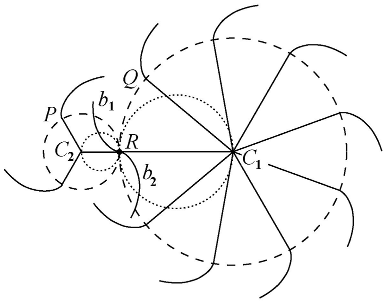
For at forstå pointen i Rømers konstruktion betragter vi nu figur 10. Den knytter ikke direkte til Rømers tandhjul. Vi har valgt en rullecirkel med radius r og to basiscirkler med radier $3r$ og $5r$. Talværdierne 3 og 5 er valgt for overskuelighedens skyld, argumentet og resultatet gælder for vilkårlige radier.



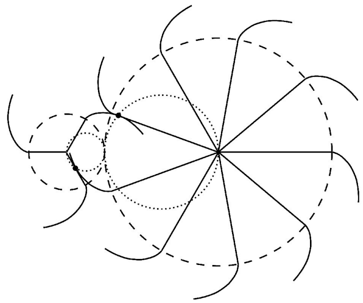
Figur 10

Vi tænker os nu, at de to basiscirkler drejer sig om deres centre, den vej pilene peger, og med de angivne vinkelhastigheder. Det medfører, at de to cirkler ruller på hinanden, og at bevægelsen er nedadgående i røringspunktet. Så lader vi den lille cirkel rulle opad på de to store cirkler. Med den angivne vinkelhastighed vil den lille cirkel rulle lige så hurtigt opad som de to store cirkler ruller nedad. Derfor vil den lille cirkels centrum ligge fast. Vi kigger så på et sort punkt på den lille cirkel. Det deltager i den lille cirkels rotation. Da nu den lille cirkel ruller inde i den venstre basiscirkel beskriver det sorte punkt en hypocykloide i den venstre basiscirkel. Hypocykloiden deltager i basiscirklens rotation. Den lille cirkel ruller også på den store basiscirkel, men uden på den. Derfor beskriver det sorte punkt en epicykloide med spidser på den store basiscirkel. Denne epicykloide deltager i den store basiscirkels rotation. Og nu kommer så pointen i det hele: Ifølge sætningen i afsnit 2 er linien PR vinkelret på begge de to cykloiders tangenter i punktet P. De to cykloider har altså samme tangent i punktet P, de rører altså hele tiden ved hinanden under den jævne rotation. Bevægelsen kan ses i en animation på [2]. Der gælder altså følgende

Sætning. Når to basiscirkler ruller på hinanden med røringspunkt R, og når et punkt P på en rullecirkel, der ruller på de to basiscirkler i R frembringer en hypocykloide i den ene og en epicykloide på den anden, da vil de to cykloider hele tiden røre hinanden. Cykloidernes røringspunkt er hele tiden punktet P på rullecirklen.



Figur 11

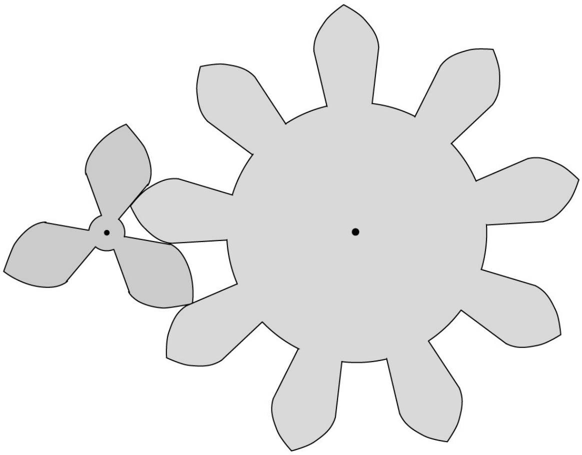


Figur 12

Vi vender nu med figur 11 tilbage til Rømers figur. Da rullecirklerne er halvt så store som basiscirklerne bliver hypocykloiderne liniestykker. Radierne RC_1 og RC_2 er altså dele af hypocykloider. På figur 11 og figur 12 har vi vist tandhjulene i to forskellige positioner. Vi tænker os at tandhjulene drejer sig med konstante vinkelhastigheder sådan at basiscirklerne ruller på hinanden, og så de bevæger sig nedad i omegnen af R. Lad os sige, at stillingen på figur 11 indtages til tidspunktet t_0. Hvis vi bruger den lille rullecirkel siger sætningen, at epicykloidestykket b_1 vil røre hypocykloidestykket RC_2 under den fortsatte bevægelse, indtil b_1 på et tidspunkt t_2 er "brugt op", hvilket er ved at ske ved det nederste sorte punkt på figur 12. Ved at "køre filmen baglæns" ud fra tidspunktet t_0, ser man på tilsvarende måde ved at bruge den store rullecirkel, at epicykloidestykket b_2 vil røre hypocykloidestykket RC_1 i et tidsinterval forud for t_0, lad os sige fra tidspunktet t_1 til t_0. Det øverste sorte punkt på figur 12 viser et af røringspunkterne. Under den jævne bevægelse i hele tidsintervallet fra t_1 til t_2 vil tanden C_1b_1 altså hele tiden røre tanden C_2b_2. Bevægelsen kan ses på en animation i [2].

Vi ser nu på de to næste tænder, dem der indeholder punkterne P og Q. Da tænderne er forskudt henholdsvis 120° og 40° fra de foregående, vil P og Q ankomme samtidig til R. Det lige beskrevne resultat gælder derfor også for disse tænder, og derfor vil bevægelsen kunne fortsætte ubegrænset med to konstante vinkelhastigheder. Dette er Rømers opdagelse, og den er langt fra triviel. Som nævnt vakte den jo også stor opmærksomhed i samtiden. På figur 12 er de aktuelle røringspunkter fremhævet. Som nævnt ligger de på rullecirklerne. Det er en tankevækkende kendsgerning, at røringspunkterne bevæger sig på denne smukke måde.

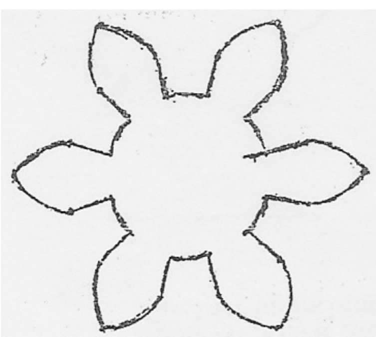
Det fremgår ikke af Huygens tegning, hvordan den anden side af tænderne konstrueres, men det giver sig selv, fordi tænderne skal være symmetriske. Så for eksempel fås den anden side af tanden C_1Rb_1 ved spejling i C_1R efterfulgt af en drejning på 20° og sletning af de overflødige stykker af cykloidebuerne. Og så skal den færdige tand naturligvis gentages henholdsvis tre og ni gange, med regelmæssige mellemrum. Resultatet er, at Huygens tegning er konstruktionstegning til tandhjulene på figur 13.



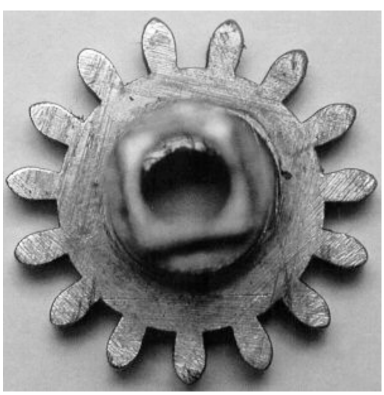
Figur 13

Stillingen af det ene tandhjul bestemmer hele tiden entydigt stillingen af det andet. Og når det ene tandhjul drejer med konstant vinkelhastighed, drejer det andet sig også med konstant vinkelhastighed, og det var ideen med det hele. På den ikke alt for blaserte læser bør det virke fantastisk, at tænderne på de to tandhjul hverken går i klemme mellem hinanden eller efterlader et slip, så det ene tandhjul kan rokke selv om det andet holdes stille. Den samme konstruktion kan anvendes når forholdet mellem de to vinkelhastigheder er et vikårligt rationalt tal. De to tandantal skal forholde sig omvendt af de ønskede vinkelhastigheder, men med denne restriktion kan tandantallene vælges frit. Tallene må dog ikke være for små, for så kan det ske, at det ene tandhjuls stilling ikke fastlægger det andets.

At konstruktionen ovenfor virkelig er den, som Rømer havde i tankerne, kan dokumenteres på to måder. Dels viser figur 14 en anden af Huygens tegninger af Rømers tandhjul; ligheden med figur 13 er slående.



Figur 14



Figur 15

Og endelig viser vi på figur 15 et fotografi af et tandhjul fra et ur, som under Rømers ophold i Paris blev lavet af den franske urmager Isaac Thuret, som Rømer samarbejdede med. Også her stemmer det fint med figur 13.

Vi skylder Huygens tak, fordi han med sine kopier af Rømers tegninger har bevaret viden om Rømers tandhjulskonstruktion, en konstruktion der også set med vore dages øjne fortjener stor respekt.

Den løsning på på tandhjulsproblemet, som Rømer gav, er langt fra den eneste. Senere har man fundet tandformer, som teknisk set er mere hensigtsmæssige. Men det fratager ikke Rømer æren af at have konstrueret det første teoribaserede maskinelement! Den historiske baggrund for Rømers konstruktion omtales udførligt i en artikel i den bog om Rømer, der udgives i anledning af, at det i 2010 er 300 år siden, at Rømer døde, [4].

Artiklen er udsprunget af Else Høyrups og mit fælles arbejde med hjemmesiden www.fysikhistorie.dk. Jeg siger også her Else tak for samarbejdet. Tak til Vagn Lundsgaard Hansen og Ivan Tafteberg Jakobsen for forslag til væsentlige forbedringer af artiklen.

Litteratur

[1] Ole Rømer: *Korrespondance og afhandlinger samt et udvalg af dokumenter*. Udgivet af Per Friedrichsen og Chr. Gorm Tortzen. København 2001, s.265

[2] Else Høyrup, Frank Nielsen: www.fysikhistorie.dk/merer2/roemmer4.html

[3] C.Huygens: *Oeuvres Complètes*. The Hague, 1888-1950, 22 vols., vol 18, p. 599-620.

[4] Frank Nielsen: *Rømers tandhjul*. I kommende bog om Rømer, redigeret af Karin Tybjerg og Jakob Danneskiold-Samsøe, Aarhus 2011.