

Oktahedergruppen och dess generaliseringar III - Oktaplexen

Ulf Persson

Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola och
Göteborgs Universitet
ulfp@chalmers.se

Inledning

Detta är den tredje (och avslutande) delen av en serie om oktahedergruppen och dess omedelbara generaliseringar. Det började med en kort notis om kuben och dess symmetrier. Symmetrierna till en kub, och mera generellt en godtycklig platonisk kropp, kan lätt beskrivas såsom rotationer runt naturliga axlar, nämligen de som går genom hörn, mitt-punkter till kanter, samt mitt-punkter till sidor. Det kombinatoriska datat bestämmer detta entydigt. I fallet kuben (och automatiskt dess dual - oktahedern), kan man även beskriva denna grupp enkelt medelst matriser, om man placerar ko-ordinater till kubens hörn naturligt som $(\pm 1, \pm 1, \pm 1)$, genom att betrakta alla ortogonala matriser med heltals koefficienter. Vi inser då att dessa endast kan utgöras av $0, \pm 1$ och att varje rad och kolonn innehåller ett och endast ett element skilt ifrån noll. Att beskriva en matris är helt enkelt liktydigt med att ge i rätt ordning tre ömsesidigt ortogonala hörn i en oktaheder. Detta kan göras på $6 \times 4 \times 2 = 48$ olika sätt. Då räknar man med godtyckliga orienteringar av basen, håller man sig de till positiva, d.v.s. de matriser med determinant 1, får man oktahedergruppen av vridningar med 24 element. De olika vridningarna kommer då att motsvaras av olika karaktäristiska ekvationer av vilka det finns ett högst begränsat antal. Oktahedergruppen är en lösbargrupp och kan lätt lösas upp i cykliska faktorer.

Detta generaliseras lätt till 4-dimensioner. Hyperkuben har vi alla stött på, och den har blivit så populär i vissa science-fiction kretsar att den fått sitt eget namn - tesseracten. Dess dual har jag låtit kalla halv-tesseracten, speciellt som en hörnen i en hyperkub kan splittras upp på ett unikt sätt i två halv-tesseracter. Man kan nu beskriva matrisgruppen i termer av teckenvariationer och permutationer av fyra element. Det hela blir något mera komplicerat, men det kan lätt göras för hand och jag presenterar tabeller över konjugatklasser. Antalet element i den fullständiga gruppen beräknas lätt på samma sätt genom att finna fyra ömsesidigt ortogonala element i den duala hyperkuben. nämligen åtta gånger så många som i tre dimensioner, d.v.s. 384. Denna grupp betecknar jag med G i min artikelserie. Att beskriva dessa element geometriskt är lite mera komplicerat än i tre dimensioner. En typisk

ortogonal transformation i fyra dimensioner är givet av två ortogonala plan, och vridningar i bågge. Ett nytt fenomen uppträder i 4-dimensioner, nämligen icke-triviala element som har ett oändligt antal invarianta plan. Del två av artikelserien bestod i att bestämma dessa matriselement geometriskt, samt visa projektionsbilder av tesseracten. Om en tesseract avbildas på ett invariant plan, kommer bilden att uppvisa rotationssymmetri.

Allt detta är mer eller mindre 'straight-forward'. Dock i mina undersökningar av olika symmetriplan kom jag osökt att skriva ner en ny typ av ortogonal matris, vars element är av formen $(\pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{1}{2})$. Dessa genererar en större mängd av symmetriska element på den 4-dimensionella sfären S^3 nämligen unionen av en tesseract och dess dual. Dessa punkter kan sammanbindas och bilda en ny reguljär polytop i \mathbf{R}^4 vilken jag inte kände till innan. Mycket riktigt detta är 24-cellen, eller Oktaplexen som består av 24 hörn och 24 oktahedrar. I själva verket en självdual reguljär polytop som inte har någon motsvarighet i andra dimensioner. Fallet med högre-dimensionella platonska kroppar var det problem som fascinerade mig som ung ton-åring och som givetvis stod långt över min förmåga att undersöka. Jag fick sedan lära mig att denna generalisering är något av en återvändsgränd. Medan klassificeringen av ändliga delgrupper till de ortogonala matriserna blir mer och mer involverad ju högre dimensionen är (det är i själva verket elementärt att visa att varje ändlig grupp uppkommer oändligt antal gånger) trivialiseras de platonska kropparna. Tetrahedern, kuben och dess dual oktahedern generaliseras direkt i alla dimensioner. Men ingenting annat. I dimension fem eller högre är det enda som finns. Däremot i dimension fyra finns tre andra regelbundna polytoper, varav oktaplexen är den mest elementära. Dessa upptäcktes på 1800-talet av den schweiziske skolläraren Schläfli, och dessa och dess generaliseringar har utgjort den kombinatoriske geometrikern Coxeters livsverk. Hans 'Regular Polytops' är ett standardverk. Jag har dock inte konsulterat detta verk i utarbetandet av denna artikel. Det är alltid roligare att upptäcka själv.

Planen för artikeln är mycket enkel. Först introduceras Oktaplexen kombinatoriskt på två olika sätt, illustrerat av ett antal bilder. Sedan beskrivs gruppen H av symmetrier av denna. G har index tre i H men är inte normal. Detta har att göra med att Oktaplexen består av tre halv-tesseracter, medan tesseracten bara består av två. Oktaplexen kan således delas upp även i tre tesseracter, som snittar varandra i halv-tesseracter. Att beskriva konjugatklasserna till elementen i H är lite mera komplicerat än i fallet G . För ändamålet har jag då skrivit ett C-program, utvecklat rutiner för matrismultiplikation och kodningar av S_4 med talen $0 \dots 23$ och sedan helt enkelt låtit programmet tugga och bestämma konjugatklasserna med tillhörande karaktäristiska ekvationer. Dessa har jag presenterat i fyra tabeller. Man kan se setta som empiriskt rådata. Hur skall man förklara det? Sedan beskriver jag de olika elementen i gruppen geometriskt. Invarianta plan dyker upp, och projektioner till dessa plan ger vackra figurer, speciellt i fallet med elementet med ordning tolv, som ger en slående figur med \mathbf{Z}_{12} symmetri. Poängen är att dessa projektioner inte skulle ha uppdragats om man inte gjort lite linjär algebra (och faktorisering av 4-grads polynom i reella 2-grads polynom).

Nu är 4 dimensioner speciellt ty dessa utgör ramen för de Hamiltonska kvaternionerna \mathbf{H} . Halv-tesseracten utgör via den naturliga inbäddningen $\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k$ en grupp, liksom faktiskt även oktaplexen själv (dock ej tesseracten). Via den naturliga linjära avbildningen $x \mapsto axb$ kan vi beskriva många symmetrier, och alla

kommer det att visa sig, och det empiriska materialet får sin förklaring. Om $q \notin \mathbf{R}$ kommer $\mathbf{R}[q]$ vara isomorft med de komplexa talen \mathbf{C} och ge komplexa strukturer på \mathbf{H} både till vänster och till höger. De komplexa egenrummen kommer att motsvara de invarianta planen, och komplexa multiplikationer vridningar.

Jag avslutar med att diskutera metriska egenskaper hos dessa tre polytoper, vilket kommer att involvera lite sfärisk geometri.

Oktaflexen

Betrakta ortogonala baser för de två ortogonala planen $(a, a, b, b), (a, -a, b, -b)^0$, en sådan ges av

$$\begin{pmatrix} (1, 1, 1, 1) \\ (1, 1, -1, -1) \\ (1, -1, 1, -1) \\ (-1, 1, 1, -1) \end{pmatrix}$$

Genom att normalisera får vi följande ortogonala matris

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Den avbildar de åtta jämna elementen $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ (d.v.s. produkten av alla ko-ordinater är 1, eller ett jämnt antal minustecken) till de åtta elementen $(\pm 2, 0, 0, 0), (0, \pm 2, 0, 0) \dots, (0, 0, 0, \pm 2)$ som även de utgör en halv-tesseract. Medan dessa avbildas på de udda elementen, som i sin tur avbildas på de jämna. Om vi nu tar unionen av alla dessa 24 punkter på sfären med radien 2 erhåller vi en mycket symmetrisk konfiguration, bestående av tre disjunkta halv-tesseracter, vars hörn vi kan färga svarta, gråa och vita respektive. Vi kan även betrakta det som en union av tre tesseracter, genom att betrakta de tesseracter som uppkommer när man tar unionen av två halv-tesseracter. Dessa tesseracter kommer inte vara disjunkta utan överlappar i de tre halv-tesseracterna. Ett (grått) element $(2, 0, 0, 0)$ befinner sig på avstånd $\pi/3$ från de åtta punkterna $(1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ (som givetvis bildar en 3-dimensionell kub och splittras upp i två tetrahedrar en vit och en svart) och avstånd $2\pi/3$ från de åtta punkterna $(-1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ (som givetvis även utgör en kub och en union av en svart och vit tetraheder) medan avstånden till de sex (gråa) punkterna $(0, \pm 2, 0, 0) \dots (0, 0, 0, \pm 2)$ är $\pi/2$. Samma sak gäller för hörnen till hyperkuben, ty varje sådant hörn är ortogonalt till sex andra hörn, medan de åtta andra (icke-antipodala) hörnen splittras upp i två grupper av fyra med avstånden $\pi/3$ och $2\pi/3$. Till dessa bägge grupper lägger vi fyra respektive av de nya hörnen. (Till hörnet $(1, 1, 1, 1)$ lägger vi $(2, 0, 0, 0), (0, 2, 0, 0) \dots (0, 0, 0, 2)$ och $(-2, 0, 0, 0), (0, -2, 0, 0) \dots (0, 0, 0, -2)$ respektive). Till varje hörn korresponderar

⁰Dessa uppkommer naturligt för vissa symmetrier av tesseracten, se föregående artikel i Normat 2010:2 (58) s. 84

fem olika skikt, var och ett givet av snittet med fem parallella hyperplan. Vi kan sammanfatta det hela i följande diagram som bör vara mer eller mindre självförklarande (tredje kolumnen ges av det sfäriska avståndet från den givna hörnpunkten, med det euklidiska (sfären normaliserad till radie 2) inom parantes).

	(1)B	(0)	$x+y+z+w=4$
kub=tetraheder+tetraheder	4W 4G	$\pi/3$ (2)	$x+y+z+w=2$
oktaheder	6B	$\pi/2$ ($2\sqrt{2}$)	$x+y+z+w=0$
kub=tetraheder+tetraheder	4W 4G	$2\pi/3$ ($2\sqrt{3}$)	$x+y+z+w=-2$
	(1)B	π (4)	$x+y+z+w=-4$

Tabell 1.

Notera att ekvationerna ovan för nivåerna hänvisar till punkten $(1, 1, 1, 1)$, dessa ekvationer modifieras på ett uppenbart sätt för andra punkter. Speciellt för punkten $(2, 0, 0, 0)$ erhåller vi ekvationerna $2x = 0, \pm 2, \pm 4$. Med en sådan punkt som utgångspunkt blir det speciellt enkelt att visualisera uppdelningen, eftersom konfigurationen uppkommer genom att sammanställa hyperkuben med sin dual. En sådan punkt och dess antipod är uppenbarligen relaterade till en kub-sida och dessa antipodiska kub i den ursprungliga hyperkuben. Dessa kommer att korrespondera till nivåerna ± 2 , de sex ytterligare punkterna på nivå 0 korresponderar till de sex sidorna av en vanlig kub, ty så är de resterande sex kub-sidorna till en tesseract arrangerade, de utgör ju även dualen av en kub, nämligen en oktaheder. Vi noterar att det föreligger en naturlig bijektion mellan nivåerna ± 2 vilken går från vitt till grått och från grått till vitt.

Vi har nu en konfiguration av 24 punkter på sfären, och två punkter sammanbindes med en kant omm avståndet är (det minimala) $\pi/3$ på sfären. Vi kan referera till sådana punkter såsom varande närliggande (eller grannhörn). På detta sätt uppkommer $24 \times 8/2 = 96$ kanter. Notera att varje kant sammanbinder två olika färger, och befinner sig således i en unik deltesseract. Var och en av dessa har 32 kanter, och tillsammans får vi då mycket riktigt $3 \times 32 = 96$ kanter.

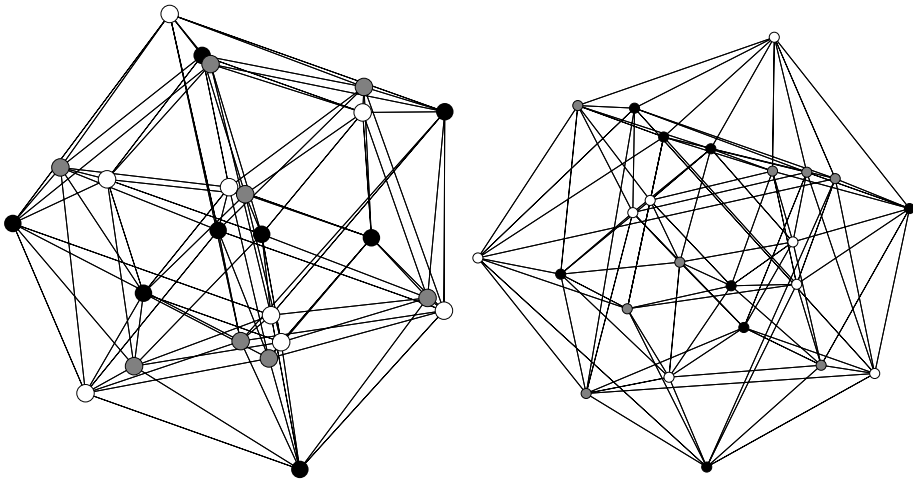
För att beräkna antalet liksidiga trianglar genom ett hörn, noterar vi först att en triangel måste ha hörn bestående av tre olika färger, eftersom ingen kant kan sammanbinda två hörn av samma färg. Betrakta nu kuben i det närmaste skiktet till vårt givna hörn. Varje hörn i en kub befinner sig på minimalt avstånd från tre hörn i kuben. Dessa hörn har samma färg, men motsatt det givna. Detta betyder att vi kan genom varje hörn forma $4 \times 3 = 12$ trianglar. (Ingen av dessa trianglar kan återfinnas i en deltesseract.) Vi ser således att dessa tolv trianglar motsvarar de tolv kanterna på kuben av närliggande punkter. Totalt finns det således $24 \times 12/3 = 96$ sådana triangelsidor. Tre kanter i en kub kan aldrig forma en liksidig triangel. Av detta sluter vi att fyra punkter kan aldrig vara sinsemellan närliggande, och därmed kan inte fyra triangelsidor begränsa en tetraheder. Däremot inser vi att de liksidiga trianglarna bildar oktahedrar. För att bestämma de oktahedrarnas som går genom en given punkt noterar vi att var och en av dem bestämmer en antipod punkt till den givna. Eftersom (euklidiska) kantlängderna är 2 skall avståndet till antipoden vara $2\sqrt{2}$, vilket betyder att dessa måste befinna sig på den 'mittoktaheder' som befinner sig på 'mittsnittet'. Omvänt givet en punkt på denna 'mittoktaheder' bestämmer denna en unik oktaheder. Som ett exempel tag den (svarta) hörnpunkten $(1, 1, 1, 1)$ och en punkt $(-1, -1, 1, 1)$ på rätt avstånd $2\sqrt{2}$. Vi finner då två (vita) punkter $(1, -1, 1, 1)$, $(-1, -1, 1, 1)$ och två

(gråa) punkter $(0, 0, 2, 0), (0, 0, 0, 2)$ som är närliggande till de bägge. Notera att dessa fyra punkter bildar en kvadrat, med punkter av samma färg diagonalt belägna mittemot varandra. Denna kvadrat är uppenbarligen en kvadrat på kuben av närliggande punkter. Således har vi en naturlig korrespondens mellan kubens sex sidor och punkter på 'mittoktahedern'. Notera även att kubens sidor är i ett till ett korrespondens med valet av två vita punkter.

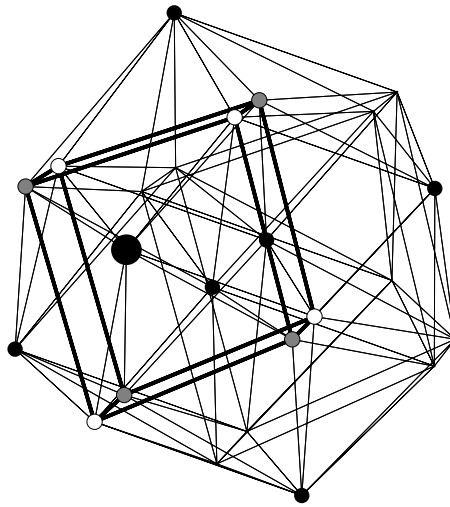
Vi har således demonstrerat att genom varje punkt kan vi finna 6 oktahedrar. Det totala antalet oktahedrar utgöres således av $24 \times 6/6 = 24$. Detta kan även ses genom att vi observerar att i en oktaheder återfinns vi tre kvadrater, var och en av dem korresponderande mot de tre par av antipoda punkter. Var och en av dessa kvadrater tillhör en deltesserakt, och varje deltesserakt innehåller precis en kvadrat från oktahedern. På så sätt får vi en naturlig 1-1 korrespondens mellan de 24 kvadraterna till en deltesserakt och de 24 oktahedrarna som utgör den uppkomna polytopens 3-dimensionella sidor. Omvänt kan vi beskriva alla oktahedrar genom att välja par av ortogonala svarta punkter. Detta kan göras på $8 \times 6/2 = 24$ olika sätt, var och en av punkterna har en kub associerad. Dessa två kuber snittar varandra i en kvadrat, som är det sökta komplementet.

Vi har nu beskrivit en regelbunden polytop i fyra dimensioner som dessutom är själv-dual och som inte har någon motsvarighet i tre dimensioner, ej heller i någon annan dimension skild ifrån fyra. Den har ett antal olika namn såsom 24-cell (ikositetraoron) refererande till de 24 oktahedrarna (tesserakten är således en 8-cell medan halv-tesserakten utgör en 16-cell), eller oktaplex. Vi kommer nästan uteslutande använda den sista beteckningen.

Två projektioner av denna ses nedan, med hörnen i de tre olika halv-tesserakterna utmärkta i vitt, grått och svart.



Genom att välja en svart punkt som referens, kan vi visa dels kuben av närliggande punkter, samt 'mittoktahedern' av svarta punkter. Notera att inga kanter förbinder dessa. Genom att välja vår svarta punkt och en godtycklig annan svart punkt i oktahedern, bestäms en sida på kuben, och därmed en oktaheder.



Alternativ kombinatorisk beskrivning av Oktaplexen

Vi kan betrakta de 24 punkterna av typ $(\pm 1, \pm 1, 0, 0)$ (d.v.s punkter (a, b, c, d) med $a, b, c, d = 0, \pm 1$ samt $|(a, b, c, d)|^2 = 2$)

Notera att man får en Oktaplex från tesseracten genom att betrakta medelpunkterna till de 24 kvadraterna. Denna korrespondens har vi redan tidigare framhåvt genom ett rent kombinatoriskt resonemang.

Dessa 24 punkter uppdelas naturligt i tre delmängder med 8 punkter i varje. Nämligen varje punkt definierar naturligt en partition av ko-ordinaterna i två disjunkta två-punktsmängder. Således om a, b betecknar ± 1 i de tre delmängderna

$(0, 0, a, b)$	$(a, b, 0, 0)$
$(0, a, 0, b)$	$(a, 0, b, 0)$
$(a, 0, 0, b)$	$(0, a, b, 0)$

Dessa delmängder utgör givetvis hörnen till de tre halv-tesseracterna. Ur tabellen ovan ser vi direkt att de delas upp i två lika stora delmängder vars element är ortogonala mot varandra. Var och en av dessa mängder utgör kvadrater.

Givet två hörn från olika delmängder har de precis en icke-noll ko-ordinat gemensam. Detta betyder att deras skalärprodukt är ± 1 . Varje element i en mängd delar därmed upp elementen i en disjunkt mängd i en partition av två 4-punkts mängder. Dessa utgör 4-simplex. Denna uppdelning kan göras på $2 \times 8/2 = 8$ olika sätt, ty ett hörn och dess antipod ger upphov till samma partition. Detta motsvaras av att välja två antipoda 4-simplex i halv-tesseracten, som är en 16-cell.

Speciellt noterar vi att ett hörn inte sammanbindes med något hörn i den egna halv-tesseracten, men däremot med fyra ur varje av de två övriga, d.v.s sammanlagt åtta kanter utgår från varje hörn.

Lägger vi ihop hörnen till en kant får vi ett uttryck av formen $(0, a, b, 2c)$. Det finns uppenbarligen $4 \times 3 \times 2^3 = 96$ sådana uttryck. Givet en kant $(0, a, b, 2c)$ kan vi lätt läsa ut de två hörnpunketrna $(0, a, 0, c)$ och $(0, 0, b, c)$.

Givet ett hörn $(a, b, 0, 0)$ kan vi således associera de åtta grannhörnen

$$(a, 0, c, 0), (a, 0, 0, c), (0, b, c, 0), (0, b, 0, c)$$

vilka bildar en kub.

En triangel, är antingen av typ $(2a, 2b, 2c, 0)$ från vilken vi kan återskapa hörnen

$$(a, b, 0, 0), (a, 0, c, 0), (0, b, c, 0)$$

eller av typ $(a, b, c, 3d)$ som ger upphov till de tre hörnen

$$(a, 0, 0, d), (0, b, 0, d), (0, 0, c, d)$$

Notera att en triangel uppenbarligen har ett hörn från vardera halv-tesseracten, ty hörn från samma halv-tesseract kan inte förbindas med en kant.

Av den första typen trianglar finns det uppenbarligen $4 \times 2^3 = 32$ stycken, medan av den andra typen har vi ett antal av $4 \times 2^4 = 64$. Totalt finns det således 96 trianglar.

Given en triangel har vi två val för dess dual, nämligen

$(2a, 2b, 2c, 0)$	$(a, b, c, \pm 3)$
$(a, b, c, 3d)$	$(2a, 2b, 2c, 0), (-a, -b, -c, 3d)$

En triangel och dess dual bestämmer en entydig oktaheder. Varje triangel är således gemensam för två oktahedrar. Antalet oktahedrar gives av $96 \times 2/8 = 24$. Därav namnet 24-cell.

Adderar vi två duala trianglar får vi en kodning för oktahedern. Den ges uppenbarligen av antingen $(3a, 3b, 3c, 3d)$ eller $(6a, 0, 0, 0) \dots$ av vilka det uppenbarligen finns 24 stycken. 16 av den första typen och 8 av den andra. Upp till skalning ger detta ko-ordinaterna för vår första representation av oktaplexen.

Ur en kodning för en tetraheder kan vi återskapa dess hörn. Givet en kodning $(3a, 3b, 3c, 3d)$ betraktar vi alla sex kombinationerna $(a, b, 0, 0) \dots (0, 0, c, d)$. Och givet $(0, 0, 0, 6d)$ betraktar vi $(\pm a, 0, 0, d), (0, \pm b, 0, d), (0, 0, \pm c, d)$

Ur detta ser vi även att ett hörn $(a, b, 0, 0)$ tillhör 6 oktahedrar, Nämligen de fyra $(3a, 3b, \pm 3, \pm 3)$ och de två $(6a, 0, 0, 0), (0.6b, 0, 0)$.

Givet ett hörn $(a, b, 0, 0)$ finner vi 12 trianglar associerade till detta hörn, nämligen 4 av typ $(2a, 2b, 2c, 0), (2a, 2b, 0, 2d) \dots$ och 8 av typ $(3a, b, c, d), (a, 3b, c, d) \dots$

De 24 oktahedrarna spaltas upp i tre olika typer (mostvarande de tre olika typerna av hörn), beroende på om produkten av dess ko-ordinater är noll, positivt eller negativt. I varje hörn möts då alltid två oktahedrar av samma färg, som dock endast har denna punkt gemensam. Varje oktaheder möter åtta andra oktahedrar via sina åtta sidor, och varje kant ligger i tre olika oktahedrar med var sin färg. Allt detta är givetvis ingenting annat än explicita uttryck för oktaplexens själv-dualitet. Slutligen möts sex oktahedrar i varje hörn.

Oktapelexens dualitet

Vi har presenterat två kombinatoriska beskrivningar av Oktapelexen. De bägge är i en viss mening duala. Vi noterar att vi kan skriva upp 24 hyperplan, som naturligt splittras upp i två typer. En typ består av de åtta hyperplanen $\pm x_i = 1$ den andra typen av de sexton hyperplanen $\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 = 2$. Var och ett av dessa hyperplan skär oktapelexen i en oktaheder. Vi erhåller således ett nytt sätt att beskriva de 24-cellerna som utgör en oktapelex. Vi kan betrakta dessa hyperplan som punkter i det duala rummet. Det kan då vara lämpligt att skriva om de första ekvationerna som $\pm 2x_i = 2$. I dual notation finner vi exakt den första kombinatoriska beskrivningen. Vi inser om två hyperplans punkter är förbundna med en kant, kommer snittet av de motsvarande hyperplanen att utgöra en triangel på oktapelexen. Och en triangel i dualrummet kommer att snitta ut en linje. Slutligen genom en punkt finner vi en hel oktaheder av hyperplan. För att vara specifik. Punkten $(1, 1, 0, 0)$ ligger i sex hyperplan, nämligen de två hyperplanen $x_1 = 1, x_2 = 1$ samt de fyra hyperplanen $(x_1 + x_2 \pm x_3 \pm x_4)$. Dessa sex punkter utgör en oktaheder i dualen.

Dualiteten framkommer även när vi betraktar kodningen av oktahedrar i den förra som antingen är av typ (a, b, c, d) eller $(2a, 0, 0, 0)$ (där vi har dividerat med tre och a, b, c, d refererar till ± 1). Från den alternativa kombinatoriska beskrivningen återfår vi den ursprungliga.

Unionen av Oktapelexen och dess dual kommer att utgöra en symmetrisk konfiguration av 48 punkter på en sfär. (Det är då naturligt att normalisera punkterna $(a, b, 0, 0)$ till $\frac{1}{\sqrt{2}}(a, b, 0, 0)$). Denna konfiguration är dock inte associerad till någon polytop. Oktapelexen och dess dual kommer att avbildas på varandra genom avbildningen

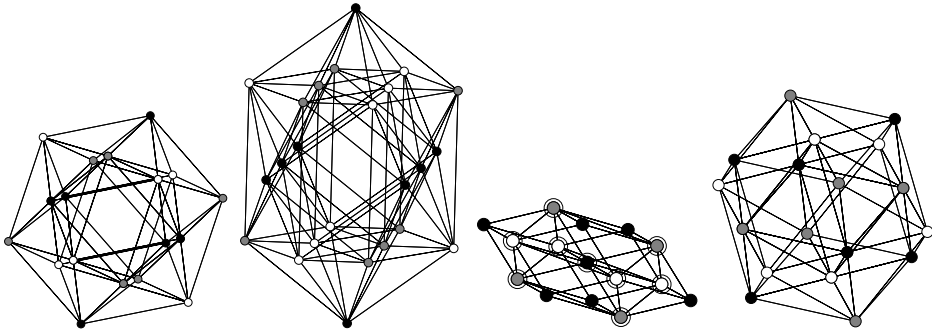
$$U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

som vi kommer att ha anledning att återkomma till.

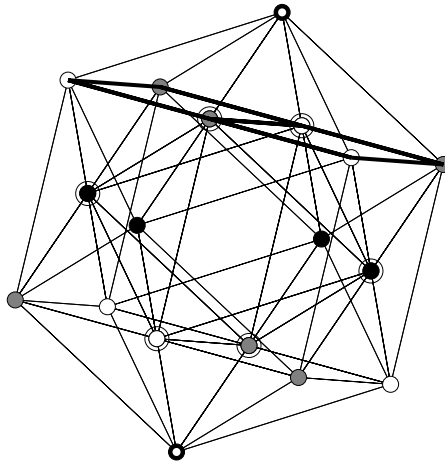
Speciella projektioner av Oktapelexen

Projektionerna ovan är generella, och dessutom något förvanskade av perspektivet. Resultatet är något förvirrande eftersom vi saknar instinktiv förmåga att föreställa oss något i den 4-dimensionella rymden. Nedan presenterar vi projektionerna av Oktapelexen in i det 3-dimensionella rummet via de naturliga riktningarna $(1, 1, 1, 1), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 0)$ och $(1, 0, 0, 0)$ respektive. Ortogonala projektioner (upp till skalning) ges t.ex. av respektive

ortogonal bas	avbildning
$(1, 1, -1, -1), (1, -1, -1, 1), (1, -1, 1, -1)$	$(x + y - z - w, x - y - z + w, x - y + z - w)$
$(1, -1, 0, 1), (1, 0, -1, -1), (0, 1, -1, 1)$	$(3x - 3y + w, 3x - 3z - w, 3y - 3z + w)$
$(1, -1, 1, 1), (1, -1, 1, 1), (0, 0, 1, -1)$	$(2x - 2y + z + w, 2x - 2y - z - w, z - w)$
$(0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$	(y, z, w)

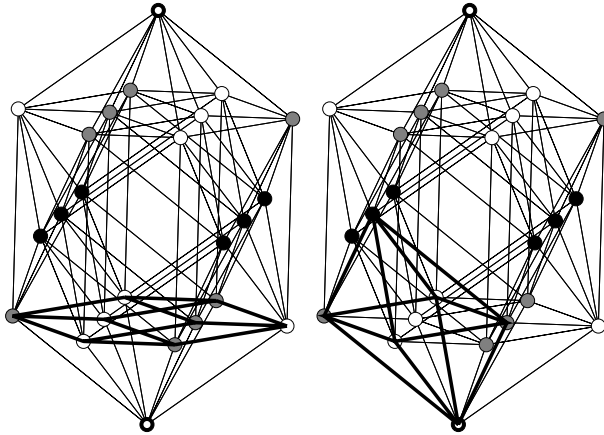


Betraktar vi den första projektionen ser vi endast 18 hörn. Detta beror på att de sex paren $(1, 1, 0, 0) - (0, 0, -1, -1)$ avbildas på samma punkt. I bilden nedan har vi ringat in dessa sex punkter.

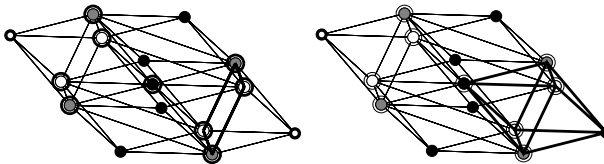


Vi har även markerat två antipoda svarta punkter med vita prickar samt markerat de kanter som tillhör den närliggande kuben till den ena. Vi ser att projektionen plattar till kuben till ett plan. (Det är helt enkelt en projektion av en kub längs en kort diagonal.) Den andra kuben ses lätt. De sex omringade punkterna utgör en av de 24 oktahedrar. Man kan även med en viss ansträngning urskilja andra tetrahedrar. Kuben visar bara två sidor. Fyra sidor har identifierats två och två, medan de två övriga sidorna har kollapsat till linjer. De inringade punktparen motsvaras av två oktahedrar till varje icke kollapsad sida, vilka har identifierats under projektionen. De två återstående svarta punkter är associerade till de två långa linjerna, och de motsvarande tetrahedrar har kollapsat till kvadrater.

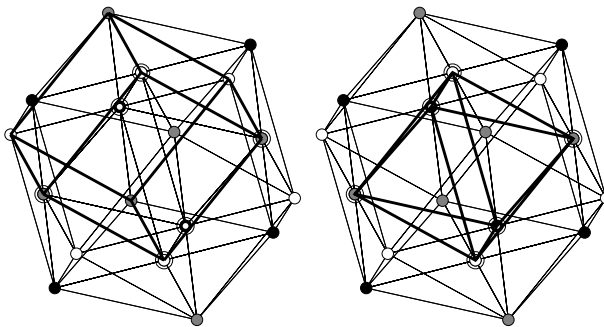
Den andra projektionen identifierar inga hörn. Vi har här märkt ut två antipoda punkter, samt på den vänstra bilden markerat kuben av närliggande punkter till den ena, och på den högra ett antal olika tetrahedrar som utgår från vår markerade punkt



En tredje projektion identifierar hörnet $(1, 1, 0, 0)$ med sin antipod, $(-1, -1, 0, 0)$ samt åtta andra par av punkter av typ $(1, 0, 1, 0)$ identifierat med $(0, -1, 1, 0)$ (d.v.s. i allmänhet $(1, 0, a, b)$ med $(0, -1.a, b)$ och $(0, 1, a, b)$ med $(-1, 0, a, b)$) vilka vi märker ut. Således ser vi bara 15 hörn. Liksom i fallet ovan visar vi på den vänstra bilden en kub, och på den högra en oktaheder. Notera att kuben har kollapsat till en kvadrat, och det är lätt att se sex andra kollapsade kuber vars kvadrater formar en kub.



Slutligen den sista projektionen identifierar sex par av hörn $((1, a, b, c)$ identifieras med $(-1, a, b, c)$), vilka är utmärkta. Vidare visar vänstra bilden en kub och den högra en oktaheder.



Vi kommer senare att betrakta speciella projektioner till plan, vilka uppkommer i samband med symmetrier till Oktaplexen. De senare kommer vi att studera systematiskt i nästa kapitel.

Oktaederns symmetrigrupp

Vi har även funnit dess symmetrigrupp H av transformationer. Den genereras av delgruppen G och elementen $1, A, A^2$ vilket ger en grupp bestående av element av typen $\epsilon\sigma A^k$ ($k = 0, 1, 2$) inalles $3 \times 384 = 1152$ element. Gruppen G är däremot inte normal i H . Elementet A normaliserar endast delgruppen G_0 . I själva verket permuterar gruppen H de tre disjunkta halvtesserakterna. Stabilisatorn till vara en av dessa är uppenbarligen en delgrupp av index tre i H isomorf med G (som givetvis är den fulla automorfismgruppen av halvtesserakten.) Dessa tre stabilisatorgrupper är konjugerade till varandra, och deras snitt utgör gruppen G_0 som således är normal.

Vi kan skriva ner följande tabeller. Den första tabellen ger $A\sigma A^2 = \epsilon\sigma_A$

σ	σ_A	ϵ
(0)(1)(2)(3)	(0)(1)(2)(3)	1 1 1 1
(01)(2)(3)	(0)(1)(23)	1 1 1 1
(021)(3)	(0)(123)	1 1 1 1
(0321)	(0)(13)(2)	1 -1 -1 1
(0)(12)(3)	(0)(12)(3)	1 1 1 1
(012)(3)	(0)(132)	1 1 1 1
(02)(1)(3)	(0)(13)(2)	1 1 1 1
(032)(1)	(0)(123)	1 -1 -1 1
(0)(132)	(0)(132)	1 -1 1 -1
(0132)	(0)(12)(3)	1 -1 1 -1
(02)(13)	(0)(1)(2)(3)	1 -1 1 -1
(0312)	(0)(1)(23)	1 -1 -1 1
(0)(1)(23)	(0)(1)(23)	1 1 -1 -1
(01)(23)	(0)(1)(2)(3)	1 1 -1 -1
(0231)	(0)(12)(3)	1 1 -1 -1
(031)(2)	(0)(132)	1 -1 -1 1
(0)(123)	(0)(123)	1 1 -1 -1
(0123)	(0)(13)(2)	1 1 -1 -1
(023)(1)	(0)(132)	1 1 -1 -1
(03)(1)(2)	(0)(12)(3)	1 -1 -1 1
(0)(13)(2)	(0)(13)(2)	1 -1 1 -1
(013)(2)	(0)(123)	1 -1 1 -1
(0213)	(0)(1)(23)	1 -1 1 -1
(03)(12)	(0)(1)(2)(3)	1 -1 -1 1

och den andra ger $A\epsilon A^2 = \sigma\epsilon_A$ för $|\epsilon| = 1$

ϵ	σ	ϵ_A
-1 -1 -1 -1	(0)(1)(2)(3)	-1 -1 -1 -1
1 1 -1 -1	(01)(23)	1 1 -1 -1
1 -1 1 -1	(02)(13)	1 -1 1 -1
-1 1 1 -1	(03)(12)	1 -1 -1 1
1 -1 -1 1	(03)(12)	-1 1 1 -1
-1 1 -1 1	(02)(13)	-1 1 -1 1
-1 -1 1 1	(01)(23)	-1 -1 1 1
1 1 1 1	(0)(1)(2)(3)	1 1 1 1

medan den tredje ger $A\epsilon A = \epsilon_A \sigma$ där $|\epsilon| = -1$

ϵ	σ	ϵ_A
1 -1 -1 -1	(03)(12)	1 1 1 -1
-1 1 -1 -1	(02)(13)	-1 -1 -1 1
-1 -1 1 -1	(01)(23)	-1 -1 -1 1
1 1 1 -1	(0)(1)(2)(3)	1 1 1 -1
-1 -1 -1 1	(0)(1)(2)(3)	-1 -1 -1 1
1 1 -1 1	(01)(23)	1 1 1 -1
1 -1 1 1	(02)(13)	1 1 1 -1
-1 1 1 1	(03)(12)	-1 -1 -1 1

Kanske inte så upplysande men det ger den fullständiga informationen hur man skall multiplicera element av typen $\epsilon \sigma A^k$ ($k = 0, 1, 2$)

Vi observerar att om $\epsilon = (1, 1, 1, -1)$ finner vi att $A\epsilon = \epsilon A^2$, och de sex elementen $1, A, A^2, \epsilon, \epsilon A, \epsilon A^2$ utgör en delgrupp isomorf med den symmetriska gruppen på tre element. Vidare är denna grupp disjunkt från G_0 samt normaliserar denna. Vi kan således presentera H som den halvdirekta produkten av G_0 med S_3 .

Vi kan även notera att elementen av typen $\epsilon \sigma A^k$ ($k = 1, 2$) utgöres av ortogonala matriser av typen $\frac{1}{2}M$ vars rader är av typen $\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1$. Sådana matriser ges av ett val av fyra sinsemellan ortogonala hörn i en hyperkub. Dessa kan beskrivas enkelt. Tag ett godtyckligt hörn, detta bestämmer en oktaheder i rummet av ortogonala vektorer. Välj sedan bland dessa tre ortogonala riktningar. Vi inser att detta kan göras på $16 \times 6 \times 4 \times 2 = 384$ olika sätt. Det totala antalet är således dubbelt av den fullständiga gruppen G , vilket var väntat.

Ett exempel på sådana är avbildningar som ges av reflektioner i de åtta hyperplanen $X_1 \pm X_2 \pm X_3 \pm X_4 = 0$. En sådan reflektion lämnar en halv-tesseract invariant, men permuterar de två övriga.

Vi noterar att varje element $X \in H$ är av ändlig ordning. Det betyder att X satisfierar en ekvation av typen $X^n - 1 = 0$. Vi definerar induktivt de cyklotomiska polynomen $\Phi_n(x)$ vis $x^n - 1 = \prod_{k|n} \Phi_k(x)$. Det visar sig att över de rationella talen är de cyklotomiska polynomen irreducibla. Om den karaktäristiska ekvation för X dessutom har heltals värden, måste ekvationen utgöras av en produkt av cyklotomiska polynom. Man kan lätt göra en lista av alla cyklotomiska polynom av grad högst fyra.

$\Phi_n(x)$	cyklotomiskt polynom
1	$x - 1$
2	$x + 1$
3	$x^2 + x + 1$
4	$x^2 + 1$
5	$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$
6	$x^2 - x + 1$
8	$x^4 + 1$
10	$x^4 - x^3 + x^2 - x + 1$
12	$x^4 - x^2 + 1$

Speciellt för varje 4×4 matris X som tillhör en ändlig grupp av matriser och vars karaktäristiska ekvation har heltals koefficienter, gäller att denna är en produkt av polynomen ovan. Detta ger totalt 24 olika möjligheter, varav 5 olika möjligheter som motsvarar determinant -1 . Av dessa kan vi utan vidare förkasta två möjligheter $\Phi_5(x), \Phi_{10}$ som motsvarar element med ordning fem eller tio.

Vi kan lätt via en dator göra en lista av all de olika karaktäristiska ekvationerna som uppkommer.

antal	ekvation	cyklotomisk faktorisering	typ
1	$X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$	$\Phi_1(x)^4$	I
1	$X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1$	$\Phi_2(x)^4$	II
90	$X^4 - 2X^2 + 1$	$\Phi_1(x)^2\Phi_2(x)^2$	III
12	$X^4 + 2X^2 + 1$	$\Phi_4(x)^2$	IV
36	$X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$	$\Phi_2(x)^2\Phi_4(x)$	V
36	$X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$	$\Phi_1(x)^2\Phi_4(x)$	VI
64	$X^4 + X^3 + X + 1$	$\Phi_2(x)^2\Phi_6(x)$	VII
64	$X^4 - X^3 - X + 1$	$\Phi_1(x)^2\Phi_3(x)$	VIII
144	$X^4 + 1$	$\Phi_8(x)$	IX
16	$X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$	$\Phi_3(x)^2$	X
16	$X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$	$\Phi_6(x)^2$	XI
96	$X^4 - X^2 + 1$	$\Phi_{12}(x)$	XII
24	$X^4 + 2X^3 - 2X - 1$	$(x - 1)(x + 1)^3$	A
24	$X^4 - 2X^3 + 2X - 1$	$(x - 1)^3(x + 1)$	B
192	$X^4 + X^3 - X - 1$	$(x - 1)(x + 1)\Phi_3(x)$	C
192	$X^4 - X^3 + X - 1$	$(x - 1)(x + 1)\Phi_6(x)$	D
144	$X^4 - 1$	$(x - 1)(x + 1)\Phi_4(x)$	E

Ur detta observerar vi att alla fem möjligheter med determinant -1 förekommer, men av de övriga endast tolv.

Vi noterar att om den karaktäristiska ekvationen $\Theta(x) = P(x)Q(x)$ splittras i två relativt prima polynom av grad två, kommer bilden av $P(X)$ vara kärnan av $Q(X)$ och vice versa. Vi får då en uppdelning av R^4 i två disjunkta plan, som dessutom är ortogonala mot varandra. Avbildningen X kommer då att verka som rotation av bägge planen. Vi har redan tidigare studerat detta för tesseracten, där avbildningen av grad åtta var precis av den typen. Uppdelningen i ortogonala plan kommer givetvis att bero på vilket X man väljer med den givna $\Theta(x)$, men denna uppdelning kommer bara att bero på konjugatklassen av X vilket är en *a priori* finare uppdelning än den given av karaktäristiska ekvationer. Vi tvingas nu att

bestämna konjugatklasserna till gruppen H vilket även kan göras med en dator, men vilket är något omständigare. Resultatet ses ur tabellerna nedan

antal	representant	karaktäristisk ekvation	typ
1	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$X^4 - 4X^3 + 6X^2 - 4X + 1$	I
1	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 + 4X^3 + 6X^2 + 4X + 1$	II
18	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 - 2X^2 + 1$	IIIa
72	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 - 2X^2 + 1$	IIIb
12	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + 2X^2 + 1$	IV
36	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 + 2X^3 + 2X^2 + 2X + 1$	V
36	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$X^4 - 2X^3 + 2X^2 - 2X + 1$	VI
32	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + X + 1$	VIIa
32	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$X^4 - X^3 - X + 1$	VIIIa
144	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 + 1$	IX

Den första tabellen visar alla konjugatklasser i SH som snittar SG , den andra de som är disjunkta från SG . Den tredje och fjärde tabellen visar motsvarande

för komplementet till SH . Speciellt är SG_0 en normal delgrupp som består av konjugatklasserna I,II,IIIa,IV,VIIa och VIIIa, medan de övriga konjugatklasserna som täcker hela G_0 ges av Aii,Bii och Eii.

antal	representant	karaktäristisk ekvation	typ
32	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 + X + 1$	VIIb
32	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$X^4 - X^3 - X + 1$	VIIIb
16	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 + 2X^3 + 3X^2 + 2X + 1$	X
16	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$X^4 - 2X^3 + 3X^2 - 2X + 1$	XI
96	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$X^4 - X^2 + 1$	XII

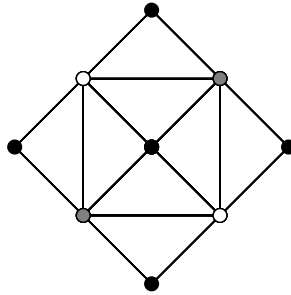
antal	representant	karaktäristisk ekvation	typ
12	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 + 2X^3 - 2X - 1$	Ai
12	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 + 2X^3 - 2X - 1$	Aii
12	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 - 2X^3 + 2X - 1$	Bi
12	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$X^4 - 2X^3 + 2X - 1$	Bii
96	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 - X - 1$	Ci
96	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$X^4 - X^3 + X - 1$	Di
72	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$X^4 - 1$	Ei
72	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	$X^4 - 1$	Eii
antal	representant	karaktäristisk ekvation	typ
96	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$X^4 + X^3 - X - 1$	Cii
96	$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$	$X^4 - X^3 + X - 1$	Dii

Geometriska tolkningar

Låt oss börja med det enklaste fallet. Speglingar i ett plan. Den karaktäristiska ekvationen måste då vara av formen $\Phi_1^2(x)\Phi_2^2(x)$, detta korresponderar mot typ III som splittras upp i två konjugatklasser en med 18 element, den andra med 72. Låt oss till att börja med koncentrera oss på den första. Ur tabellen ser vi att en representant är

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Reflektionsplanet P är givet av $x_1 = x_2 = 0$. För varje element $Y \in H$ kommer konjugatet YXY^{-1} ha reflektionsplanet YP . Stabilisatorn till P kommer att utgöras av matriser av formen $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ där A, B är 2×2 ortogonala matriser med heltals koefficienter. Antalet sådana inses lätt vara $8 \times 8 = 64$. Detta gör att banan kommer att ha förväntade 18 element. Dessa plan kan lätt beskrivas. Tag en halv-tesseract, och välj två par av antipodala hörn. Detta kan göras på $\binom{4}{2} = 6$ olika sätt.

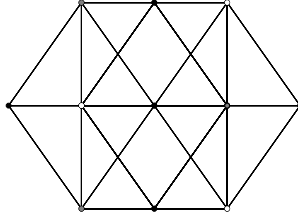


En oktaplex har tre halv-tesseracter. Genom att välja ett sådant plan och projicera på dess ortogonala komponent (projektionsplanet), framstår symmetrin klart. Notera att 4 punkter av den svarta halv-tesseracten avbildas på origo, och att de två övriga halv-tesseracterna delas var och en upp i två plan ortogonala mot projektionsplanet, så att dessa avbildas på två punkter. Notera att var och en av halv-tesseracterna avbildas på sig själva. Avbildningen tillhör således SG_0 . I det andra fallet betraktar vi en representant

$$X = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Det invarianta planet kommer att spännas av $(1, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)$. I detta fall kommer en halv-tesseract att avbildas på sig själv, medan de två andra kommer att permuteras av reflektionen. 24 av dessa avbildningar i konjugatklassen kommer således att tillhöra G men inte G_0 . De invarianta planen kan beskrivas genom att man tar en diagonal i en halv-tesseract, detta kan göras på $3 \times 4 = 12$ sätt. En sådan

diagonal splittrar upp halv-tesseracten i två delar, dels de antipoda punkterna, och dels sex punkter ortogonala mot bägge. Dessa utgör en oktaheder med tolv kanter, varav två och två är parallella. Diagonalen tillsammans med en kant spänner ett sådant plan. Detta kan göras på $12 \times 12/2 = 72$ olika sätt.

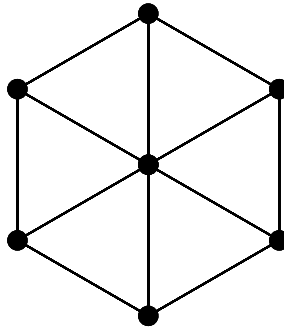


I första fallet har den projicerade figuren uppenbarligen Z_4 symmetri, och mycket riktigt konjugatklassen VI har samma invarianta delplan som IIIa, och avbildning $X \rightarrow X^2$ avbildar VI till IIIa.

Fallet VIIIa betraktar vi representanten

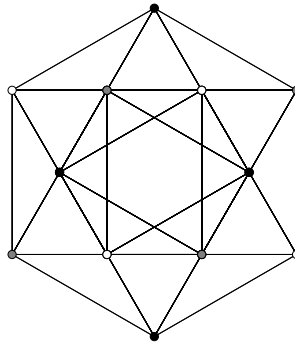
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dess invarianta plan spänns av $(0, 0, 0, 1)$, $(1, 1, -1, 0)$. Detta kan beskrivas genom att man tar två godtyckliga långa diagonaler i två olika halv-tesseracter. Dessa spänner ett plan. I själva verket finner vi i detta plan tre långa diagonaler, en från varje halv-tesseract. Antalet sådana plan blir således $12 \times 8/3! = 16$. Varje plan ger upphov till två element i konjugat-klassen. Man kan lätt finna ett ortogonalt plan, och en ortogonal projektion till denna. Vi erhåller då figuren nedan



Denna figur uppvisar Z_6 symmetri, speciellt Z_3 symmetri. Konjugatklassen tillhör SG_0 , d.v.s. den bevarar halv-tesseracterna.

Klassen VIIIb ligger helt utanför G . Genom att ta vår representant från tabellen finner vi att det invarianta planet beskrivs av $(a, b, 0, a - b)$. Denna typ av plan kan skrivas på formen $(a, b, \pm a \pm b, 0)$ varav vi beräknar $4 \times 4 = 16$ stycken sådana plan. De kan även beskrivas som snittet mellan hyperplan av typen $x_i = 0$ och $x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 = 0$. Betraktar vi den associerade projektionen erhåller vi figuren nedan.



Den har en tydlig Z_6 symmetri, men endast Z_3 symmetrin utnyttjas. Det framgår klart av figuren hur de tre halv-tesseracterna cykliskt permuteras.

Vi kan nu observera att avbildningen $X \mapsto -X$ permuterar konjugatklasserna V och VI samt VII(a,b) och VIII(a,b). Detta förklarar den hexagonala symmetrin hos projektionerna till VIII, i fallen VII blir det invarianta planet vridit ett halvt varv (reflektion i origo) och det ortogonala planet vrides $\pi/3$ istället för $2\pi/3$

Vi betraktar nu fallen IX och XII när det karaktäristiska polynomet splittras icke-trivialt i två kvadratiske polynom. Fallet

$$X^4 + 1 = (X^2 + \sqrt{2}x + 1)(X^2 - \sqrt{2}x + 1) = PQ$$

har vi redan träffat på i förra avsnittet. Vi finner de ortogonala planen genom att finna bildrummet av P och Q . Vi får dessa genom att ta bilderna av de två första elementen e_1, e_2 . Vi erhåller då följande fyra vektorer som spänner två ortogonala plan.

$$\left| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 1 \\ -1 & -\sqrt{2} \\ 0 & -1 \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ -\sqrt{2} & 1 \\ -1 & \sqrt{2} \\ 0 & -1 \end{array} \right|$$

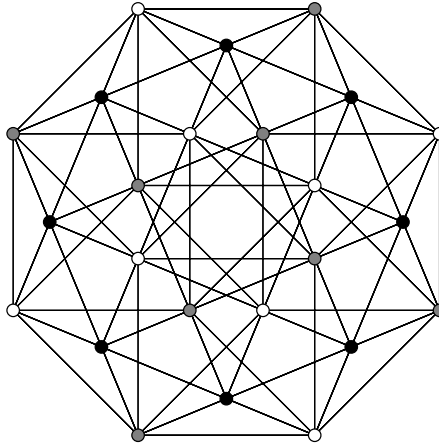
på vart och ett av planen kan vi göra en orthogonalisering och presentera

$$\left| \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{array} \right\| \left\| \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ -\sqrt{2} & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{array} \right|$$

Detta gör lämpliga projektioner (upp till skalning)

$$\begin{aligned} (x, y, z, w) &\mapsto (x - \sqrt{2}y - z, x + z - \sqrt{2}w) \text{ och} \\ (x, y, z, w) &\mapsto (x + \sqrt{2}y - z, x + z + \sqrt{2}w), \end{aligned}$$

vilket leder till följande bild.



Vi ser att en halv-tesseract är invariant, medan de två andra permuteras. Genom att den svarta är invariant, ser vi att avbildningen tillhör SG men inte SG_0 .

Eftersom konjugatklassen består av 144 element, förväntar vi oss 144 plan (Z_8 innehåller två element av ordning åtta, medan varje element bestämmer två ortogonala plan). En viss ledning ges av elementen ovan. Betrakta alla vektorer Γ som innehåller komponenter av formen $0, \pm 1, \pm 1, \pm\sqrt{2}$. Det är lätt att inse att det finns $4 \times 3 \times 2^3 = 96$ sådana element. Man kan även förvissa sig om att för varje element $\gamma\Gamma$ finns det 14 element i Γ ortogonala till g , alla dock är inte av intresse. Inget plan får ligga i samma hyperplan $x_i = 0$ detta utesluter två element. Varje plan innehåller fyra element $\pm\gamma_1, \pm\gamma_2 \in \Gamma$ ur vilket vi sluter $96 \times 12/8 = 144$.

Notera även att elementen i Γ alla har normen 2 och ligger på oktaplexens omskrivna sfär.

Kvadrerar vi element i IX får vi uppenbarligen element i IV vilket ses direkt ur den karaktäristiska ekvationen.

Vi kan nu faktorisera $X^4 - X^2 + 1 = (X^2 + \sqrt{3}X + 1)((X^2 - \sqrt{3}X + 1)(= PQ))$.

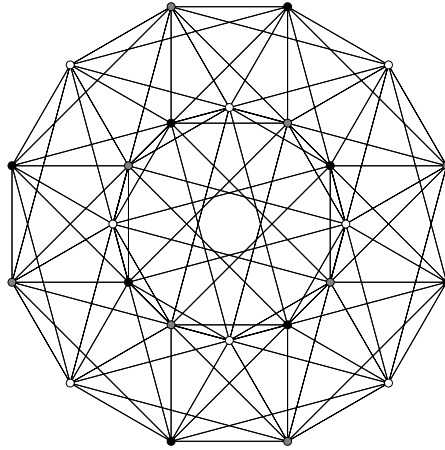
Vi erhåller på samma sätt ovan de två ortogonala planen

$$\left| \begin{array}{c|c} 3 - \sqrt{3} & -1 + \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 3 - \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & -1 - \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & 1 - \sqrt{3} \end{array} \right| \quad \left| \begin{array}{c|c} 3 + \sqrt{3} & -1 - \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & 3 + \sqrt{3} \\ 1 + \sqrt{3} & -1 + \sqrt{3} \\ 1 - \sqrt{3} & 1 + \sqrt{3} \end{array} \right|$$

Alla vektorerna råkar även vara ömsesidigt ortogonala, samt av samma längd ($2\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}$), detta gör det enkelt att skriva ner en projektion (upp till en likformig skalning)

$$(x, y, z, w) \mapsto (x(3 - \sqrt{3}) + y(1 - \sqrt{3}) + z(1 - \sqrt{3}) + w(1 + \sqrt{3}), \\ x(-1 + \sqrt{3}) + y(3 - \sqrt{3}) + z(-1 - \sqrt{3}) + w(1 - \sqrt{3}))$$

Vi får då följande spektakulära figur som uppvisar Z_{12} symmetri.



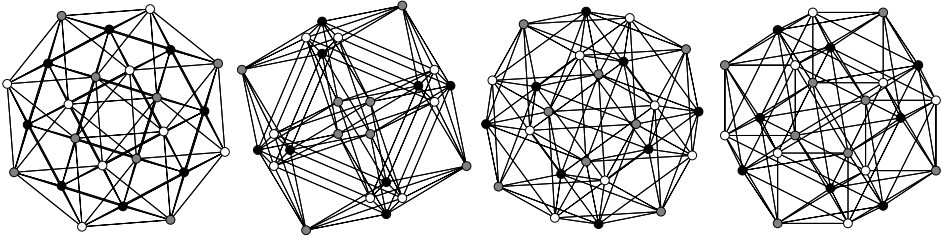
Rotationer av ordning 12 permuterar halv-tesseracterna, och ligger således inte i G . Detsamma gäller för dess kvadrater, som måste satisfiera $X^2 - X + 1 = 0$ och är således av typ XI, däremot kuber bevarar alla och måste tillhöra SG_0 . Eftersom inga egenvärden ± 1 är den enda möjligheten III och därmed IIIa eftersom ordningen är fyra.

I de fall när den karakteristiska ekvationen är en kvadrat är den minimala ekvationen kvadratroten ur denna. Detta motsvarar tre fall motsvarande ordning tre, fyra och sex. Vi får symmetriska bilder närhelst vi tar ett invariant plan (vilket uppkommer genom att ta en godtycklig icke-trivial vektor v och bilda planet som spänns av v, Xv). Avbildningen X kommer då att operera som vridningar i planet och dess ortogonala komplement.

Vi har en kontinuerlig familj av sådana plan. Grassmannianen av alla plan i \mathbf{R}^4 utgör en 4-dimensionell familj, medan invarianta plan utgör en 2-dimensionell familj. Planet bestäms av en vektor v detta ger 4-dimensioner, men varje vektor i det invarianta planet ger upphov till samma plan, vi får därmed dividera ut med en 2-dimensionell familj. Vi kan faktiskt beskriva denna 2-dimensionella familj. Om det kvadratiska polynomet är irreducibelt över de reella talen, definierar matrisen en komplex struktur på \mathbf{R}^4 och gör det till ett \mathbf{C}^2 (detta är speciellt transparent i fallet $X^2 + I = 0$ nedan, ty då kan man tolka $v \rightarrow Xv$ som multiplication med i). Ett invariant plan blir då en komplex linje, och de komplexa linjerna utgör en Riemannsfär \mathbf{CP}^1 isomorft med sfären S^2 . Att till varje plan ordna dess ortogonala komplement är då samma sak som antipodavbildningen på sfären.

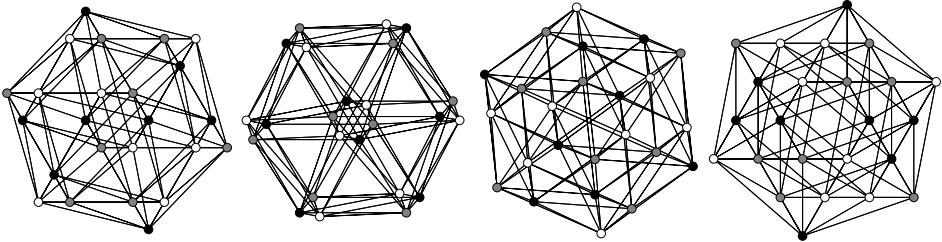
Vi ger några illustrationer. Eftersom $(X^2 + 1)^2$ representeras redan i G kommer dessa symmetrier att även manifesteras på tesseractnivån. Däremot ordning tre och sex manifesteras bara på oktaplexnivån.

Först ett par bilder på $(X^2 + 1)^2$ notera att svarta och gråa, samt svarta och vita ger upphov till uppenbara symmetrifigurer, däremot vita och gråa är inte lika uppenbar.

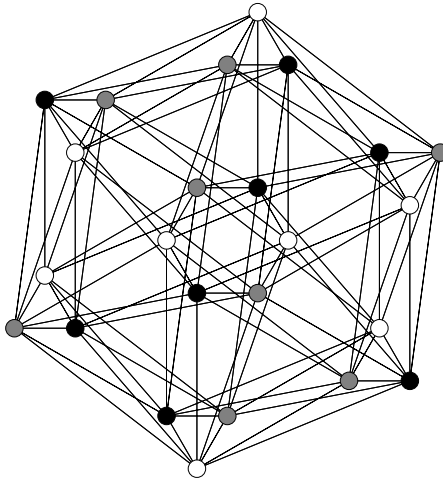


Det

visar sig att de invarianta delrummen kan beskrivas av den ortonorma basen $(a, b, c, d), (b, -a, d, -c)$ Sedan en par bilder på $(X^2 + X + 1)^2$



och slutligen $(X^2 - X + 1)^2$



De visar sig att dessa bägge symmetrier har samma invarianta delrum! Dessa gives av $(a, b, c, d), \frac{1}{\sqrt{3}}(b - c + d, -a - c - d, a + b - d, -a + b + c)$

Vi skall slutligen betrakta elementen med determinant -1 . Vi ser att konjugatklasserna av typ A och B består av speglingar i linjer respektive hyperplan. De är relaterade till varandra via $X \mapsto -X$. De splittras upp i två konjugatklasser vardera beroende på vilken typ av linje eller hyperplan. När det gäller A_i utgöres symmetrilinjen av en lång diagonal (riktningsvektorerna sammanfaller med banan av $(1, 0, 0, 0)$). Av dessa finns det tolv stycken. Den halvtesseract i vilken diagonalen ingår kommer att vara invariant. (Notera att i G består konjugatklassen av fyra element, i H tre gånger så många.) I fallet A_{ii} betraktar vi banan av $(1, -1, 0, 0)$, symmetrilinjerna utgöres av linjer parallella med oktaedrens kanter. Fallet B är helt dualt, symmetrihyperplanen är ortogonala mot symmetrilinjerna ovan.

De återstående elementen har ordning 3, 4 och 6 för typerna C , E och D respektive. Dessa typer splittras upp vardera i två konjugatklasser. C och D är relaterade via $X \mapsto -X$. Bägge konjugatklasserna till E snittar G och en ligger (Eii) ligger i G_0 , medan i de två andra fallen ligger en av konjugatklasserna utanför G . I samtliga fall har avbildningen två invarianta plan, i ett av planen har vi en spegling i linjen, i det andra en vridning av lämplig ordning. De förra kan vi referera till såsom speglingsplanen, de andra som vridningsplanen. Konjugatklasserna bestäms av typen av invarianta plan.

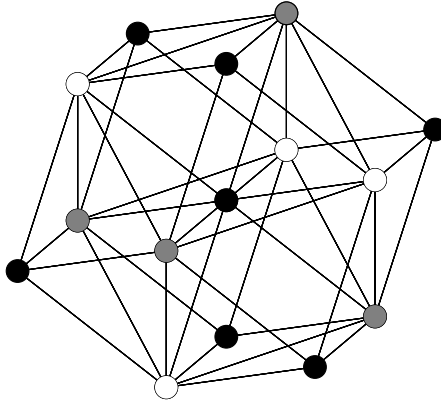
I fallet Eii utgöres speglingsplanet av en transformation av planet $x_3 = x_4 = 0$, dessa har vi redan betraktat i IIIa och den tillhörande bilden visar Z_4 symmetrin hos vridningsplanet. Notera att halv-tesseracterna är invarianta, ty speglingen i speglingsplanet permuterar urbilderna till de vita och gråa punkterna. Det finns 18 sådana plan, och eftersom Z_4 innehåller två element av ordning två, och det finns två sätt att välja speglingarna i speglingsplanet kommer konjugatklassen innehålla fyra gånger så många element. I fallet Ei kommer speglingsplanet att spännas av vektorerna $(0, 1, 0, -1)$, $(1, 0, -1, 0)$

Vi noterar slutligen att gruppen H är invariant under konjugering med elementet U ovan. Denna konjugering kommer att beskriva en yttre automorfism, som kommer att permutera vissa konjugatklasser. Den grupp J som genereras av H och U kommer att utgöra symmetrigruppen till den konfiguration av 48 element vi har tidigare betraktat. J kommer i själva verket vara den halvenkla produkten av Z_2 (representerat av U) och H .

Vi kan recapitulera. Genom att betrakta fyra ömsesidigt ortogonala hörn i en halv-tesseract av formen $(\pm 1, 0, 0, 0)$, $(0, \pm 1, 0, 0)$..., $(0, 0, 0, \pm 1)$ erhåller vi gruppen G med $8 \times 6 \times 4 \times 2 = 384$ matriselement. Genom att betrakta på motsvarande sätt ortogonala hörn i dess duala tesseract $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$ erhåller vi $16 \times 6 \times 4 \times 2 = 768$ matriselement som utgör de två sidoklasserna av G vi H . Och slutligen genom att betrakta istället den duala oktaplexen finner vi $24 \times 6 \times 4 \times 2 = 1152$ matriselement som utgör sidoklassen till H i J .

Stabilisatorundergrupper

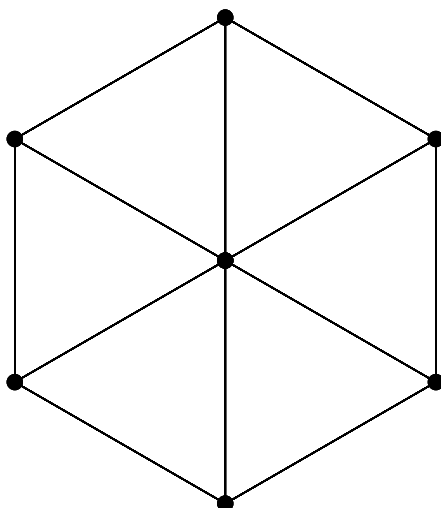
Till Oktaplexens 24 hörn kan vi även associera andra punkter på sfären, som mitt punkterna till kanterna, tyngdpunkterna till trianglarna och oktahederna. Samtliga dessa punktmängder är invariant under verkan av H och vi erhåller intressanta undergrupper genom att betrakta deras stabilisatorer.



Vi kan börja med stabilisatorerna till hörnen. Dessa är alla konjugerade och utgör således icke-normala delgrupper. Fixerar vi ett hörn $(2, 0, 0, 0)$ såg är det uppenbart att stabilisatorn består av matriser i G med en 1 i övre vänstra hörnet. Stabilisatorn i H utgör således symmetrierna av en 3-dimensionell kub (eller oktaheder). Om vi bara är intresserad av SH erhåller vi oktahedergruppen. En avbildning som stabiliserar ett hörn, stabiliserar även dess antipod, på detta sätt får vi 12 kopior av oktahedergruppen. Om vi projicerar Oktaplexen längs axelriktningen får vi en konfiguration bestående av en kub på en sfär med radien $\sqrt{3}/2$ och en oktaheder på en sfär med radien 1 (samt en punkt i origo - bilden av den stabila punkten och dess antipod). Stabilisatorn utgör uppenbarligen symmetrier av denna konfiguration.

Symmetrier som bevarar en kant, fixerar uppenbarligen dess mittpunkt. Eftersom det finns 96 sådana mittpunkter förväntar vi oss att stabilisatorn i SH är en grupp med sex element. Tar vi det specifika fallet $(2, 0, 0, 0), (1, 1, 1, 1)$ med mittpunkten $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ är det lätt att förvissa sig om att stabilisatorn består av matriser av typ

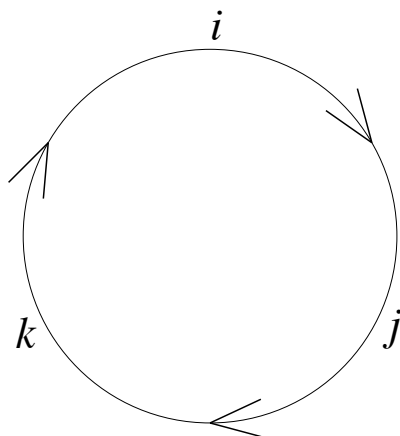
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & a' & b' & c' \\ 0 & a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & b & c \\ 1 & a' & b' & c' \\ 1 & a'' & b'' & c'' \end{pmatrix}$$



I det först fallet är $a, b, c = 0, 1$ och $a + b + c = 1$ osv för varje rad, i det andra fallet har vi $a, b, c = \pm 1$ och $a + b + c = -1$ likaledes för varje rad. I bägge fallen rör det sig om att placera ut en 1 en i varje rad och kolonn bland nollor respektive -1 :or. I det första fallet har vi en delgrupp S_3 under den naturliga permutationsrepresentationen, i det andra fallet dess sidoklass i en grupp som bör vara den halv-direkta produkten av S_3 med Z_2 . Om vi begränsar oss till SH återfår vi givetvis S_3 . Projicerar vi från det invariants planet får vi figuren ovan.

Oktaplexen och Kvationerna

De Hamiltonska kvaternionerna \mathbf{H} bör vara alltför välkända för en systematisk introduktion och jag nöjer mig med att påminna läsaren om att dessa utgör ett reellt vektorrum med bas $1, i, j, k$ och en associative men icke-kommutativ multiplikation given av $ij = k, ki = j, jk = i$ och $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.



Man finner att varje kvaternion $q = a+bi+cj+dk$ har ett konjugat $\bar{q} = a-bi-cj-dk$ så att $q\bar{q} = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 0$ med likhet om och endast om $q = 0$. Notera att konjugering är linjär och multiplikativ i meningen att $\overline{q_1q_2} = \bar{q}_2\bar{q}_1$. Detta ger en naturlig kvadratisk form på \mathbf{H} ofta betecknad med $Nm(q) (= q\bar{q}) = |q|^2$ samt visar att \mathbf{H} med sin multiplikativa struktur är en skev-kropp, d.v.s varje icke-noll element har en multiplikativ invers. Således utgör \mathbf{H}^* en grupp. Vidare splittras \mathbf{H} naturligt upp i summan av ett 1-dimensionellt delrum \mathbf{H}_+ bestående av $z = \bar{z}$ (de reella talen) och ett 3-dimensionellt \mathbf{H}_- för vilka $\bar{z} = -z$ (de rent imaginära kvaternionerna d.v.s. $a = 0$). Dessa två delrum är ortogonala med avseende på den kvadratiske formen. Det finns således naturliga projektioner till dessa delrum. Avbildningen $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H}_+$ betecknas med spåret $Tr(q)$ av en kvaternion q , och är helt enkelt given av $q \mapsto 2a = q + \bar{q}$. Man inser nu lätt att varje kvaternion q satisfierar en kvadratisk ekvation genom att utnyttja att $(q-a)(\overline{q-a}) = -(q-a)^2$ ur vilket följer

$$q^2 - Tr(q)q + Nm(q) = 0$$

Låt oss beteckna denna ekvation med Ξ_q . (Ifall q är en reell kvaternion är Ξ_q en perfekt kvadrat $[q - \frac{1}{2}Tr(q)]^2$).

Givet en icke-reell kvaternion q kommer således $\mathbf{H}_q = \mathbf{R} + \mathbf{R}q$ utgöra en 2-dimensionell delalgebra isomorf med de komplexa talen \mathbf{C} , och även utgöra centralisatorn till q , nämligen delalgebran av alla kvaternioner som kommuterar med q . Vidare kommer den även att definera en komplex vektorrum struktur på \mathbf{H} antingen genom vänster eller högermultiplikation. \mathbf{H} kan naturligt bäddas in i $GL(4, \mathbf{R})$ via $\mathbf{H} \ni h \mapsto (x \mapsto hx)$ och representeras då av reella 4×4 matriser. (Vi låter \hat{h} beteckna denna linjära avbildning.) Men i och med att kvaternionerna \mathbf{H} har en naturlig komplex struktur via högermultiplikation ger detta även en representation med komplexa 2×2 matriser, d.v.s. en inbäddning in i $GL(2, \mathbf{C})$. (Notera att den associativa lagen kan tolkas kommutativt! Nämligen $h(x\lambda) = (hx)\lambda$.) De karaktäristiska ekvationerna för den reella representationen kommer att vara kvadraten på de karaktäristiska för de komplexa representationerna, vilka helt enkelt är de kvadratiske ekvationerna ovan. Vidare noterar vi att om h är en enhets kvaternion d.v.s. $|h|=1$, kommer \hat{h} respektera den kvadratiske formen $((hx)\bar{h}x = hx\bar{x}h = x\bar{x}h\bar{h} = x\bar{x})$. Enhetskvaternionerna kommer således att utgöra en 3-dimensionell delgrupp (isomorf med S^3) av $SO(4, \mathbf{R})$.

Om q är en icke-reell kvaternion kommer den ha invarianta delrum av dimension två. Nämligen $\mathbf{H}_q r$ och för godtyckliga $r \in \mathbf{H}$. Dessa delrum kommer att utgöra komplexa linjer i den komplexa (höger)strukturen given av \mathbf{H}_q på \mathbf{H} . Och ifall $|q| = 1$ kommer \hat{q} representeras av vridningar i varje delrum. I komplex notation givet av matrisen $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \bar{\lambda} \end{pmatrix}$ med $|\lambda| = 1$.

Vi kommer att ha anledning att mera allmänt betrakta linjära avbildningar av formen $x \mapsto qxq'$ (som är produkten av de två kommuterande avbildningarna $x \mapsto qx$ och $x \mapsto xq'$) så låt oss undersöka dessa närmare med avseende på karaktäristiska ekvationer och invarianta plan

För att behandla detta kan det vara lämpligt att närmare studera de linjära avbildningarna $x \mapsto qxq'$. Dessa är av tre olika slag. Om något av q, q' är reella har vi situationen $x \mapsto qx$ ($x \mapsto xq'$) som vi redan har studerat tidigare. Vi erinrar oss

om att den karaktäristiska ekvationen är kvadraten på den kvadratiska för q och att de invarianta delrummen utgör en Riemannsfär. De övriga fallen splittras upp i huruvida q, q' kommuterar eller icke. Låt oss börja med det senare.

Först gör vi den allmänna observationen att om q, q' inte kommuterar kan avbildningen betraktas som komplex linjär för två olika komplexa strukturer på \mathbf{H} , nämligen de givna av $\mathbf{R}(q)$ med vänster multiplikation och $\mathbf{R}(q')$ med högermultiplikation. En naturlig bas i det första fallet ges av $1, q'$ och i det andra fallet av $1, q$. Det är nu lätt att skriva ner respektive matriser, om vi sätter $q^2 = Aq - B$ och $q'^2 = A'q' - B'$ de två karaktäristiska ekvationerna för q, q' respektive (vi påminner om att $A = q + \bar{q}, B = q\bar{q}$) erhåller vi

$$\begin{pmatrix} 0 & -qB' \\ q & qA' \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -q'B \\ q' & q'A \end{pmatrix}$$

med komplexa koefficienter. Låt oss nöja oss med att betrakta den vänstra (den högra är helt analog). Den ger upphov till den karaktäristiska ekvationen

$$X^2 - qA'X + q^2B' = 0$$

eller om vi föredrar

$$X^2 - qA'X + (Aq - B)B' = 0$$

Multiplikerar vi ihop den vänstra med den högra, får vi den karaktäristiska ekvationen över \mathbf{R} . Denna multiplikation förenklas av observationen att den högra måste vara komplexa konjugatet av den vänstra, ty produkten måste ha reella koefficienter. Eftersom konjugering ges av $q \mapsto A - q$ kan vi skriva ner den senare som

$$X^2 - (A - q)A'X + (A(A - q) - B)B' = 0$$

varvid det blir enkelt om än något omständligt att skriva ner produkten.

$$X^4 - AA'X^3 + (A^2B' + BA'^2 - 2BB')X^2 - AA'BB'X + B^2B'^2 = 0$$

Detta påstående kan bevisas genom att observera att den minimala ekvationen för en komplex linjär avbildning delar den minimala ekvationen för samma avbildning betraktad som reell. Har vi två olika komplexa strukturer och de motsvarande polynomen är relativt prima följer påståendet direkt. I annat fall kan vi göra ett gränsförfarande.

Som vi tidigare noterat gäller att för varje icke reell kvaternion q att delkroppen $\mathbf{R}[q](= \mathbf{H}_q)$ är isomorft med \mathbf{C} , isomorfin unik upp till en konjugering. Låt oss fixera isomorfier mellan $\mathbf{H}_q, \mathbf{H}_{q'}$ och \mathbf{C} . Detta betyder dels att vi betraktar dessa kvaternioner som 'abstrakta' komplexa tal, och omvänt att varje 'abstrakt' komplext tal är givet två olika representationer, nämligen en i vardera av de två delkropparna. Vi finner därvid att de komplexa egenvärdena för den linjära avbildningen med komplex struktur till vänster är givna av $\lambda\lambda'$ och $\lambda\bar{\lambda}'$ respektive, medan de till höger är givna av $\lambda\lambda'$ och $\bar{\lambda}\lambda'$ där λ, λ' är de abstrakta realizationerna av q och q' respektive. Det är nu lätt att beräkna korresponderande egenvektorer. I det vänstra fallet är dessa givna av respektive $\zeta'q' - B'$ och $\bar{\zeta}'q' - B'$ där ζ' är en

kvaternionisk representation av λ' i delkroppen $\mathbf{R}[q]$. På motsvarande sätt finner vi i det högra fallet egenvektorerna $q\mu - B$ och $q\bar{\mu} - B'$ där μ är en representation av λ i $\mathbf{R}[q']$. En komplex egenlinje blir ett reellt invariant plan. Av allmänna principer inser vi att de korresponderande komplexa egenlinjerna bör motsvara samma reella invarianta plan, av vilka vi följdaktligen har två ortogonala. Detta bör kunna verifieras via en uträkning, och mycket riktigt

$$(\zeta'q' - B')\mu = \zeta'B - q\zeta'\mu = -\zeta'(q\mu - B)$$

De invarianta planen motsvaras av en uppdelning av den kvartiska ekvationen i två kvadratiska med reella koefficienter. Detta kan göras explicit genom kvadratrots utdragningar av uttryck i A, A', B, B' .

I fallet q, q' måste vi välja ett element r utanför \mathbf{H}_q men räkningarna leder till precis samma resultat som ovan, nämligen ett kvartiskt karaktäristiskt polynom som kan uttryckas explicit i koefficienterna till de kvadratiska relationerna till q, q' och som splittras i två kvadratiska polynom korresponderande till två invarianta plan.

Låt oss nu återvända till vår Oktaplex. Normaliserar vi Oktaplexens hörn så att den ligger på enhetssfären och sedan identifierar dessa hörn med kvaternionerna $\frac{1}{2}(\pm 1 \pm i \pm j \pm k)$ samt $\pm 1, \pm i, \pm j \pm k$ visar sig att den utgör en grupp delgrupp O av \mathbf{H}^* . Gruppen har halv-tesseracten $\pm 1, \pm i, \pm j \pm k$ som normal delgrupp och denna grupp är isomorf med kvaterniongrupp $Q_8 (= Q)$ med åtta element. Dess konjugatklasser utgöres av $\{1\}, \{-1\}, \{\pm i\}, \{\pm j\}, \{\pm k\}$. Detta ses lätt genom att vi känner centralisatorn till varje element, och därmed antalet element i konjugatklassen. Normalisatorn till i består av fyra element $\pm 1 \pm i$ således består konjugatklassen till i av två element.

O är den halvdirekta produkten av \mathbf{Z}_3 med Q . Och opererar på Q via konjugering. Speciellt koagulerar de tre givna konjugatklasserna $\{\pm i\}, \{\pm j\}, \{\pm k\}$ till en enda $\{\pm i, \pm j, \pm k\}$. (Notera att centralisatorn till i är den samma i O som i Q , således består dess konjugatklass av sex element). Vidare givet ett element $z = \frac{1}{2}(1 \pm i \pm j \pm k)$ finner vi $z^2 = -\bar{z}$ (och därmed $z^3 = -z\bar{z} = -1$), medan för $z = \frac{1}{2}(-1 \pm i \pm j \pm k)$ och $z^2 = \bar{z}$ (d.v.s. $z^3 = 1$). Således den första typen av element har ordning sex, den andra typen ordning tre. Medan elementen i Q uppenbarligen har ordning fyra med de uppenbara undantagen ± 1 . Ur detta är det lätt att dela upp O i konjugatklasser (varav konjugatklasserna C_1, C_2 och C_4 kommer att bilda Q).

ordning	konjugatklass	typiskt element	antal
1	C_1	1	1
2	C_2	-1	1
3	C_3	$\frac{1}{2}(-1 \pm i \pm j \pm k)$	8
4	C_4	$\pm i, \pm j \pm k$	6
6	C_6	$\frac{1}{2}(1 + \pm i \pm j \pm k)$	8

Vi noterar sambandet med tabell 1. C_1, C_2, C_4 bildar en halv-tesseract - Q , och C_3 och C_6 halveras var, och motsvarade halvor kombineras till sidoklasser till Q . Notera att varje element i C_3 kommer att generera en grupp \mathbf{Z}_3 disjunkt från Q .

Vi kanske även skall notera att O fastän den har 24 element inte är S_4 (eller vad som är ekvivalent - oktahedergruppen). Inget element i S_4 har ordning sex

I representationen $h \mapsto \hat{h}$ ovan kommer bilden av O att ligga i H , i själva verket i SH , eftersom O är sluten under multiplikation. Delgruppen Q kommer att respektera en given uppdelning av en oktaplex i en tesseract och dess duala halv-tesseract. Elementen i $O \setminus Q$ kommer att cykliskt permutera de tre halv-tesseracter som oktaplexen är uppbyggd av.

Men i tillägg till representationen av \mathbf{H} har vi även en representation av $\mathbf{H} \times \mathbf{H}$ via $(h_1, h_2) \mapsto (x \mapsto h_1 x h_2^{-1})$. Dess kärna är given av diagonalavbildningen $\mathbf{R} \rightarrow \Delta\mathbf{H}$ via $t \mapsto (t, t)$. Om vi begränsar oss till enhets-kvaternioner får vi en avbildning av $S^3 \times S^3$ modulo $\mathbf{Z}_2 = (1, 1), (-1, -1)$ på $SO(4, \mathbf{R})$. Och begränsar man till diagonalen erhåller man den välbekanta representationen av $SO(3, \mathbf{R})$ såsom det projektiva rummet $\mathbf{R}P^3 = PH = S^3 / \pm I$ ty \mathbf{H}_- är invariant under diagonalen Δ .

Speciellt finner vi en stor delgrupp $O \times O / \pm I$ i SH . Denna delgrupp har $24^2/2 = 288$ element och är således av index två i SH och utgör en normal delgrupp. Hur kan vi identifiera denna?

Det första naturliga steget är att dela upp den i konjugatklasser. Först gör vi den elementära observationen att om en grupp $G = A \times B$, där elementen $(a, 1)$ och $(1, b)$ uppenbarligen kommuterar med varandra, kommer konjugatklasserna av G helt enkelt vara produkten $\mathfrak{a} \times \mathfrak{b}$ av konjugatklasser $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ i A, B respektive. Speciellt erhåller vi $5 \times 5 = 25$ konjugatklasser i $O \times O$. Nu är vi intresserade i kvotgruppen $O \times O / \mathbf{Z}_2$. Vi har att $z \mapsto -z$ permuterar konjugatklasserna $C_1 \leftrightarrow C_2; C_3 \leftrightarrow C_6, C_4 \leftrightarrow C_5$, d.v.s. $-C_n = C_{\pi(n)}$ där π är permutationen (12)(36). Konjugatklasserna för $O \times O$ blir då $C_i \times C_k$ med identifikationen $C_i \times C_k = C_{\pi(i)} \times C_{\pi(k)}$.

Nästa steg är att identifiera de karaktäristiska ekvationerna. Vi erinrar oss först att element av formen \hat{q} lämnar varje plan av formen $\mathbf{H}_q r$ invariant. Dess reella karaktäristiska ekvation blir helt enkelt kvadraten på dess komplexa Ξ_q . Vidare om vi har en avbildning $x \mapsto qxq^{-1}$ hittar vi lätt två egenvektorer med egenvärde ett, nämligen q, q^{-1} . Denna egenskap är invariant under konjugering. Vilket betyder att $(x - 1)^2$ blir en faktor i den karaktäristiska ekvationen. Om q är rent imaginärt, kan vi även betrakta det ortogonala komplementet till $\langle 1, q \rangle$. Detta utgörs av rent imaginära x (ortogonalt till 1) som satisfierar $qx + xq = 0$, d.v.s. $qxq^{-1} = -x$. Vi får således en faktor $(x + 1)^2$. Vi kan sedan lätt skriva ner följande tabell

konjugatklasser	antal	ekvation	typ
$C_1 \times C_1$	1	$\Phi_1(x)^4$	I
$C_1 \times C_2$	1	$\Phi_2(x)^4$	II
$C_1 \times C_3, C_3 \times C_1$	16	$\Phi_3(x)^2$	X
$C_1 \times C_6, C_6 \times C_1$	16	$\Phi_6(x)^2$	XI
$C_1 \times C_4, C_4 \times C_1$	12	$\Phi_4(x)^2$	IV
$C_3 \times C_3$	64	$\Phi_3(x)\Phi_1(x)^2$	VIIIa, VIIIb
$C_3 \times C_6$	64	$\Phi_6(x)\Phi_2(x)^2$	VIIa, VIIb
$C_4 \times C_4$	18	$\Phi_1(x)^2\Phi_2(x)^2$	IIIa
$C_3 \times C_4, C_4 \times C_3$	96	$\Phi_{12}(x)$	XII

De enda ekvationerna som inte inses omedelbart av ovan är fallen $C_3 \times C_6$ och $C_3 \times C_4$. I det senare fallet rör det sig om element av ordning 12 vilket ger den

enda möjligheten. I det förra fallet noterar vi att ordningen är sex, och betraktar vi elementet $x \mapsto qxq^2$ opererar detta som $q^3 = -1$ på planet $\mathbf{R}[q]$.

Denna tabell skall jämföras med den på sidan 157. Vi noterar att de karaktäristiska ekvationerna $\Phi_1(x)^2\Phi_4(x)$, $\Phi_2(x)^2\Phi_4(x)$, $\Phi_8(x)$ saknas. Samt att fallet $\Phi_1(x)^2\Phi_2(x)^2$ splittras upp i två konjugatklasser (IIIa,IIIb), varav bara den ena (IIIa) tillhör vår grupp.

Notera att vi har betraktat två naturliga representationer av Oktaplexen. Varför inte lägga samman dem? Detta innebär att vi även betraktar element av typen $\frac{i+j}{\sqrt{2}}$ som också bildar en Oktaplex. Unionen av dessa bägge Oktaplexer utgör inte en regelbunden polytop, som vi redan tidigare noterat men det utgör en mängd $Z \subset S^3$ som även den utgör en grupp. Låt oss skriva $Z = O + O'$ där O' utgör den nya Oktaplexen. I denna grupp kommer O att utgöra en normal delgrupp av Z av index två, speciellt $OO' = O'$ och $O'O' = O$. Symmetrigruppen J till mängden Z kommer, som vi redan tidigare ha påpekat, att utgöra en extension av H i vilken denna kommer att utgöra en normal delgrupp av index två. Således är $|J| = 2304$ och SJ har 1152 element. En naturlig delgrupp av SJ kommer att utgöras av $Z \times Z/\pm 1$ vilken har $48 \times 48/2 = 1152$ element och således kommer att utgöra hela gruppen. En naturlig fråga är hur SH sitter i denna grupp. Först noterar vi att $O'O' = O$, vilket gör att $x \mapsto zxw$, $z, w \in O'$ ger de resterande symmetrierna av Oktaplexen.

Det är lätt att finna konjugatklasserna i O' . Vi har tre typer av element $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$, $\frac{-1+i}{\sqrt{2}}$ och $\frac{i+j}{\sqrt{2}}$ centralisatorn till de två första består av åtta element $\pm 1, \pm i, \frac{1\pm i}{\sqrt{2}}$ och konjugatklasserna innehåller därmed sex element var; medan i det sista fallet centralisatorn har endast fyra element $\pm 1, \pm \frac{i+j}{\sqrt{2}}$ och därmed konjugatklassen tolv element. De motsvarande karaktäristiska ekvationerna utgörs av $x^2 + \sqrt{2}x + 1$, $x^2 - \sqrt{2}x + 1$, $x^2 + 1$ respektive. Vi noterar också att $q \rightarrow -q$ permuterar de två första konjugatklasserna och lämnar den sista invariant. Låt oss beteckna dessa konjugatklasser med D_8^+, D_8^-, D_4 respektive.

Vi kan nu skriva upp en motsvarande tabell

konjugatklasser	antal	ekvation
$D_4 \times D_4$	72	$\Phi_1(x)^2\Phi_2(x)^2$
$D_8^+ \times D_8^+$	36	$\Phi_1(x)^2\Phi_4(x)$
$D_8^+ \times D_8^-$	36	$\Phi_2(x)^2\Phi_4(x)$
$D_8^+ \times D_4, D_4 \times D_8^+$	144	$\Phi_8(x)$

Den första är uppenbar, samma argument gäller som för fallet $C_4 \times C_4$ ovan. De andra är inte lika fullt uppenbara. Men istället för att presentera ad-hoc argument kan vi lätt beräkna alla involverade karaktäristiska ekvationer via formeln (K) ovan. Notera att samtliga kvadratiske uttryck för våra element är av formen $x^2 - \alpha x + 1$ och därmed skrives de kvartiska polynomen som $x^2 - \beta x^3 + \gamma x^2 - \beta x + 1$ där således $\beta = \alpha\alpha', \gamma = \alpha^2 + (\alpha')^2 - 2$. Vi presenterar en tabell över alla typer av element, och sedan två tabeller för motsvarande karaktäristiska ekvationer.

element	konjugatklass	antal	α	element	konjugatklass	antal	α
1	C_1	1	2	$\frac{1 \pm i}{\sqrt{2}}$	D_8^+	6	$\sqrt{2}$
-1	C_2	1	-2	$\frac{-1 \pm i}{\sqrt{2}}$	D_8^-	6	$-\sqrt{2}$
$\pm i$	C_4	6	0	$\frac{\pm i \pm j}{\sqrt{2}}$	D_4	12	0
$\frac{1}{2}(1 \pm i \pm j \pm k)$	C_6	8	1				
$\frac{1}{2}(-1 \pm i \pm j \pm k)$	C_3	8	-1				

Vilket ger upphov till följande tabeller där vi ger (antal; β, γ)

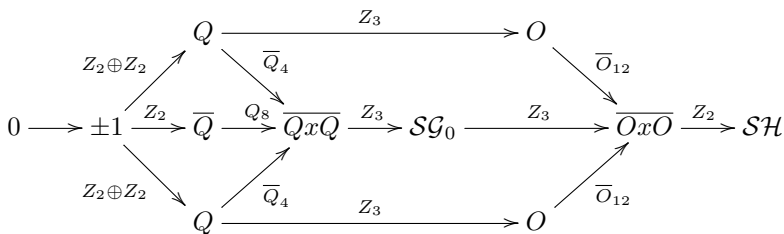
C_1	C_1				
C_1	1; 4, 6	C_2			
C_2	1; -4, 6	1; 4, 6	C_4		
C_4	6; 0, 2	6; 0, 2	36; 0, -2	C_6	
C_6	8; 2, 3	8; -2, 3	48; 0, -1	64; 1, 0	C_3
C_3	8; -2, 3	8; 2, 3	48; 0, -1	64; -1, 0	64; 1, 0

	D_4		
D_4	144; 0, -2	D_8^+	
D_8^+	72; 0, 0	36; 2, 2	D_8^-
D_8^-	72; 0, 0	36; -2, 2	36; 2, 2

Gruppstrukturen

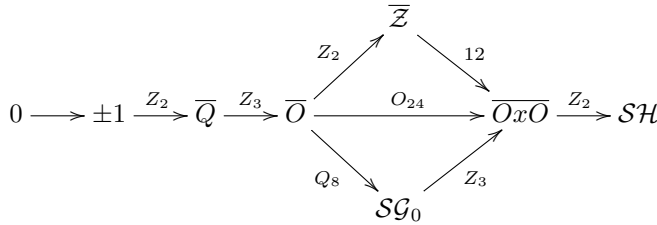
Vi noterar att det endast finns två icke-kommutativa grupper av ordning 8, nämligen dihedral gruppen D_8 och kvaterniongruppen Q . I bägge fallen har vi faktoriseringar $0 \rightarrow \mathbf{Z}_2 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2 \rightarrow 0$ och $0 \rightarrow \mathbf{Z}_4 \rightarrow \mathcal{G} \rightarrow \mathbf{Z}_2 \rightarrow 0$ men i dihedralfallet splittras den senare. Vidare betrakar vi stabilisatorn till 1 erhåller vi gruppen $Z/\pm 1$ som således är isomorf med S_4 . Ur detta sluter vi att $O/\pm 1$ är isomorf med A_4 och vi skall således jämföra extensionerna $0 \rightarrow \mathbf{Z}_2 \rightarrow O \rightarrow \mathbf{A}_4 \rightarrow 0$ och den 'duala' $0 \rightarrow \mathbf{A}_4 \rightarrow S_4 \rightarrow \mathbf{Z}_2 \rightarrow 0$.

Vi är nu beredda att närmare beskriva strukturen av SH . Först låt oss betrakta följande diagram i vilken vi skriver $A \xrightarrow{B/A} B$



Grupperna Q och O kan bäddas in antingen från höger eller vänster, eller via diagonal avbildningen $q \mapsto (x \mapsto xq^{-1})$. I det senare fallet dividerar man ut med centrum ± 1 . Vi erhåller då \bar{Q} isomorf med $\mathbf{Z}_2 \oplus \mathbf{Z}_2$ och \bar{O} isomorf med \mathbf{A}_4 . Samtliga dessa inbäddningar in i $O \times O$ är normala. Gruppen $\bar{Q} \times \bar{Q}$ är isomorf

med Heisenberggruppen med 32 element. Vidare kan vi betrakta följande diagram



samt

$$0 \longrightarrow \pm 1 \xrightarrow{Z_2} \bar{Q} \xrightarrow{Z_3} \bar{O} \xrightarrow{Q_8} SG_0 \xrightarrow{Z_2} SG \xrightarrow{Z_3} SH$$

vilka tillsammans ger en ganska bra bild av den lösbara strukturen av gruppen

Metrisk egenskaper

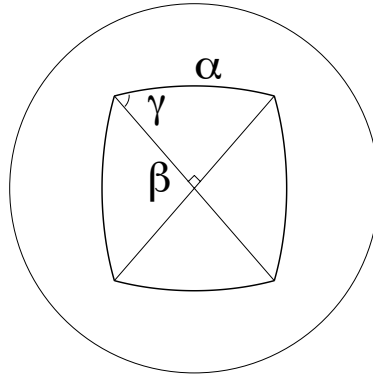
En tesseract och en oktaflex inskrivna i en sfär med radius 1, har kantlängder lika med 1. (Hörnen kan ges via $\frac{1}{2}(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1), (1, 0, 0, 0) \dots (0, 0, 0, 1)$). De inskrivna halv-tesseracterna däremot kommer att ha kantlängd $\sqrt{2}$. Den 3-dimensionella sfären S^3 har 'area' (3-dimensionell volym) $4\pi^2$, den motsvarande bollen kommer då att ha 4-dimensionell volym $\frac{1}{4}4\pi^2 = \pi^2 \sim 10$ ty den 4-dimensionella volymen av en kon ges av $\frac{1}{4}Bh$ där B är den 3-dimensionella volymen av basen och h är höjden. Tesseractens (4-dimensionella) volym är uppenbarligen 1, och dess (3-dimensionella) area 8. Oktaflexen erhålles genom att till varje kubsida lägga till en pyramid med höjd $\frac{1}{2}$. Varje sådan pyramid har volymen $\frac{1}{4}\frac{1}{2} = \frac{1}{8}$. Det finns åtta sådana pyramider, så den totala volymen blir 2. Varje 3-dimensionell sida är en oktaheder med kantlängd 1. En sådan oktaheder består av två pyramider med höjd $\frac{1}{\sqrt{2}}$, dess volym blir således $\frac{2}{3}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Oktaflexens (3-dimensionella) area blir således $8\sqrt{2}$ eftersom den har 24 sådana sidor. Slutligen halv-tesseracten består av två koner över oktahedern med kantlängd $\sqrt{2}$ och höjd 1. Detta ger en volym av $2 \times \frac{1}{4} \times (\sqrt{2})^3 \times \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{2}{3}$ och dess area är given av 16 tetrahedrar, vars kantlängder är $\sqrt{2}$. Dessa passar in i en kub med sida 1, med fyra pyramider med sammanlagd volym $\frac{2}{3}$. Arealen blir således $\frac{16}{3}$. Ur dessa beräkningar finner vi lätt den inskrivna sfärens radie (r), ty $\frac{1}{4}Ar = V$. Detta ger för tesseracten, oktaflexen och halv-tesseracten $\frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2}$.

Vi kan sammanfatta detta i en tabell.

polytop	kantlängd	4-dim volym	3-dim area	inskriven radie
halv-tesseract	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{1}{2}$
tesseract	1	1	8	$\frac{1}{2}$
oktaflex	1	2	$8\sqrt{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$

I varje hörn av hyperkuben, samsas fyra kubiska hörn, som motsvarar rymdvinklar. Dessa kan beskrivas av polygoner på sfären, och ges ett mått via dess sfäriska area.

I kubens fall består dessa rymdvinklar av liksidiga trianglar med längden $\pi/2$. Sådana trianglar är lätt att beräkna arean av, ty dess samtliga vinklar är även $\pi/2$ vilket medför arean $3\pi/2 - \pi - \pi/2$. Fyra stycken ger upphov till arean 2π som är halva sfärens. Detta ger en uppfattning om tesseractens spetsighet. Vill vi beräkna på motsvarande sätt rymdvinklarna i fallet med tetrahedern och oktahedern blir det något krångligare. I första fallet utgör rymdvinkeln en liksidig sfärisk triangel med sidan $\pi/3$ och i det andra fallet en sfärisk kvadrat med sidlängden $\pi/3$. Att beräkna dess areor utgör en trevlig övning i sfärisk geometri. Låt oss först börja med kvadraten, ty den är enklast.



Vi finner av vidstående figur

$$\begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{\sin \beta}{\sin \gamma} \\ \frac{\sin 2\beta}{\sin 2\gamma} &= \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \\ \cos \alpha &= \cos^2 \beta \end{aligned}$$

där de två första följer ur den sfäriska sinussatsen och den tredje är den sfäriska versionen av Pythagoras sats. Vi kan skriva om dessa till

$$\begin{aligned} \sin \beta &= \sin \alpha \sin \gamma \\ 2 \cos \gamma &= \frac{\sin 2\beta}{\sin \alpha} \\ \cos \beta &= \sqrt{\cos \alpha} \end{aligned}$$

och ur detta följer $\cos \gamma = \sin \gamma \sqrt{\cos \alpha}$ och vi kan lösa ut $\sin^2 \gamma = \frac{1}{1 + \cos \alpha}$. Vidare har vi

$$\begin{aligned} \cos 2\gamma &= 1 - 2 \sin^2 \gamma \\ \sin 2\gamma &= 2 \sin^2 \gamma \sqrt{\cos \alpha} \end{aligned}$$

vilket tillåter oss att beräkna

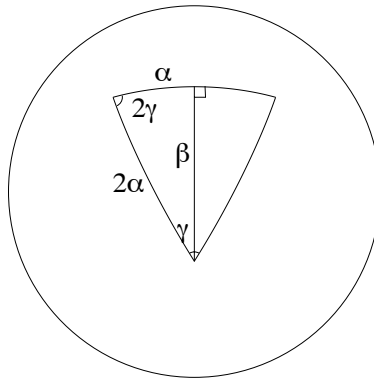
$$\sin 4\gamma = 4 \frac{\cos \alpha - 1}{\cos \alpha + 1} \frac{1}{1 + \cos \alpha} \sqrt{\cos \alpha}$$

Halva kvadratens area är givet av vinklexcessen $4\gamma - \pi$. Eftersom $\sin(4\gamma - \pi) = -\sin(4\gamma)$ kan vi ge följande formel för kvadratens area.

$$2\arcsin\left(4\frac{(1 - \cos \alpha)\sqrt{\cos \alpha}}{(1 + \cos \alpha)^2}\right)$$

Notera att om α är litet ger detta approximativt α^2 och för $\alpha = \pi/2$ då kvadraten är en hemisfär, tolkar vi $\arcsin(0)=\pi$. I vårt aktuella fall med $\alpha = \pi/3$ erhåller vi arean $2\arcsin(\frac{8}{9}\sqrt{\frac{1}{2}}) \sim 1.35949\dots$. Eftersom sex oktahedrar möts i varje hörn blir den totala rymdvinkeln strax över 8 och därmed drygt två tredjedelar av den totala arean av sfären. Vilket skall jämföras med halva sfären i fallet med tesseracten. Oktaflexen är således betydligt trubbigare.

I triangelfallet



finner vi på motsvarande sätt

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha &= \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \\ \frac{\sin \beta}{\sin 2\gamma} &= \frac{\sin \alpha}{\sin \gamma} \\ \cos 2\alpha &= \cos \beta \cos \alpha\end{aligned}$$

vilket ger

$$\begin{aligned}\sin \gamma &= \frac{1}{2 \cos \alpha} \\ \cos \gamma &= \frac{\sin \beta}{2 \sin \alpha} \\ \sin 2\gamma &= \frac{\sin \beta}{\sin 2\alpha} \\ \cos 2\gamma &= \frac{\sin^2 \beta}{2 \sin^2 \alpha} - 1\end{aligned}$$

Betraktar vi nu \cos för halva arean ($A/2$) finner vi

$$\cos(3\gamma - \pi/2) = \sin(3\gamma)$$

Högerledet kan vi förenkla till

$$\frac{\sin^2 \beta - \sin^2 \alpha}{\sin \alpha \sin 2\alpha}$$

Ur det sfäriska Pythagorasteomet kan vi uttrycka

$$\sin^2 \beta = 1 - \frac{\cos^2 2\alpha}{\cos^2 \alpha}$$

och erhåller slutligen

$$\cos(A/2) = 2 \frac{\cos^4 \alpha - \cos^2 2\alpha}{\cos \alpha \sin^2 2\alpha}$$

En Taylor utveckling av detta uttryck för små α ger efter en hel del komplicerade uträkningar som mirakulöst förenklas till det enkla svaret $1 - \frac{3}{8}\alpha^4 + \dots$ ur vilket vi erhåller att $A = \frac{\sqrt{3}}{2}\alpha^2 + \dots$ vilket är den asymptotiskt euklidiska formeln. I fallet $2\alpha = \pi/2$ erhåller vi $\cos(A/2) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ d.v.s $A = \pi/2$ som förväntat. Likaså i fallet $2\alpha = 2\pi/3$ finner vi det förväntade $A = 2\pi$. Fallet $2\alpha = \pi/3$ motsvarar rymdvinkeln hos en tetraheder och ges av $\cos(A/2) = \frac{5}{3\sqrt{3}}$ vilket ger $A = 0.551082\dots$. Eftersom åtta tetrahedrar mötes i ett hörn i en halv-tesseract, kommer denna att bli definitivt spetsigare än tesseracten.