 Normat **58**:4, 180–183 (2010)

Appendix: Heisenberggruppen

Ulf Persson

Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola och
Göteborgs Universitet
ulfp@chalmers.se

Inledning

I den föregående oktahederartikeln nämns på sidan 175 utan bevis att gruppen $\overline{Q \times Q}$ är isomorf med Heisenberggruppen med 32 element. Vad menas med detta?

Den klassiska Heisenberggruppen $\mathbf{H}$ uppkommer i ett 1-dimensionellt kvantmekaniskt system och består av alla övre triangulära 3×3 matriser

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Koefficienterna a, b, c kan tas från en godtycklig kommutativ ring $\mathbf{A}$. I de klassiska fallen betraktar vi de reella talen $\mathbf{A} = \mathbf{R}$ eller heltalen $\mathbf{A} = \mathbf{Z}$. Gruppen är uppenbarligen icke-kommutativ. Vi noterar att den innehåller de två kommutativa delgrupperna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ och } \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

som vi kan beteckna B och A och vars snitt $C = A \cap B$ utgöres av centrum

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Betraktar vi delgruppen $B' \subset B$ bestående av matriserna

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

finner vi att H kan skrivas som en halv-direkt produkt av A med B' via verkan

$$b \mapsto ((a, c) \mapsto (a, c - ab))$$

Om $\mathbf{A} = \mathbf{Z/pZ}$ får vi en ändlig icke-kommuativ grupp med p^3 element. Sådana finns av två typer, och Heisenberggruppen är i detta fall, den som genereras av två element av ordning p. Speciellt i fallet $p = 2$ finner vi att Heisenberggruppen är isomorf med den dihedrala gruppen D_8 och inte den andra icke-kommutativa gruppen - kvaterniongruppen Q_8

Nu kan man generalisera Heisenberggruppen till det multi-dimensionella fallet H_n genom att på mostsvarande sätt betrakta matriser av formen

$$\begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & I_n & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

där I_n är identitetsmatrisen av storlek n. a, b blir då vektorer och prdukten ab skall tolkas som den standardiserade skalärformen $< a, b >$ som vi för enkelhetens skull kommer att skriva som $a \bullet b$. Sätter vi $n = 2$ och $\mathbf{A} = \mathbf{Z/2Z}$ erhåller vi en grupp med $2^5 = 32$ element. Men varför skall denna vara isomorf med vår grupp $\overline{Q_8 \times Q_8}$?

Förberedelser

Vi noterar att om elementen skrives som (a, b, c) erhåller vi produkten

$$(a, b, c)(a', b', c') = (a + a', b + b', c + c' + a \bullet b')$$

speciellt är $(0, 0, 0)$ identitetselementet och $(-a, -b, -c + a \bullet b)$ är inversen. Från och med nu antar vi implicit att ko-efficientringen är $\mathbf{Z/2Z}$ även om många påståenden nedan kommer att vara giltiga i allmänhet.

Vi gör först observationen att ett element är av ordning (högst) två omm $a \bullet b = 0$, och alla andra element är av ordning fyra. För att beräkna antalet sådana väljer vi först $a \neq 0$ vilket kan göras på tre sätt. Därefter har vi $a \bullet b = 0, 1$ och dessa delar upp Z_2^2 i två hyperplan med vardera två element. Således har vi sex olika möjligheter för valet av (a, b), c kan väljas godtyckligt, vilket gör att antalet möjligheter fördubblas till tolv.

Vi kan göra en liknande beräkning när det gäller antalet element av ordning fyra i $\overline{Q_8 \times Q_8}$. Vi inser lätt att dessa är av typ $(X, \pm 1), (\pm 1, X)$ där X är ett av de sex möjligheterna $\pm i, \pm j, \pm k$ och således uppstår även här tolv möjligheter.

Centrumet för båda grupperna är Z_2 och består i fallet $\overline{Q_8 \times Q_8}$ av $(\pm 1, \pm 1)$ varav vi inser att $(1, -1)$ måste motsvaras av $(0, 0, 1)$. Detta element kommer att spela en central roll senare och vi betecknar det härmed med γ.

På liknande sätt kan man finna mer och mer sammanträffande mellan de bägge till synes helt olika grupperna tills man blir mer och mer övertygad om att de utgör manifestationer av en och samma bakomliggande abstrakta grupp. Men för att göra processen kortare försöker vi nu att identifiera delgrupperna A, B i $\overline{Q_8 \times Q_8}$. Med andra ord vi söker på ett naturligt sätt finna åtta ömsesidigt kommuterande element av ordning två i $\overline{Q_8 \times Q_8}$. Den kritiska observationen är att två element $(x, y), (z, w)$ där $x, y, z, w = \pm i, \pm j, \pm k$ inte kommuterar i $Q_8 \times Q_8$ men kommer att göra det i $\overline{Q_8 \times Q_8}$ om både x, z och y, w inte kommuterar med varandra på grund av gemensam teckenväxling. Det är då lätt att skriva ner delgrupper i $\overline{Q_8 \times Q_8}$ som kommer att spela samma roller som A, B i Heisenberggruppen. Nämligen låt oss betrakta de åtta elementen

$$(\pm i, \pm j), (\pm j, \pm k), (\pm k, \pm i), (\pm 1, \pm 1)$$

samt dess naturliga speglingar

$$(\pm j, \pm i), (\pm k, \pm j), (\pm i, \pm k), (\pm 1, \pm 1)$$

Dessa utgör delgrupper isomorfa med Z_2^3 och de snittar varandra mycket riktigt i gruppens centrum $(\pm 1, \pm 1)$. För att erhålla en mostvarighet till B' bör vi finna i en av dessa (säg den sista) en delgrupp med fyra element och som *inte* innehåller elementet $\pm(1, -1)$. Ett exempel på en sådan är

$$(j, i), (k, j), (j, i)(k, j) = (jk, ji)^0 = (i, -k), (1, 1)$$

Det är nu klart hur vi måste fortsätta. Vi bör visa att $\overline{Q_8 \times Q_8}$ uppkommer som en halv-direkt produkt mellan Z_2^3 och Z_2^2 på ett isomorft sätt som i Heisenberggruppen.

Isomorfin

Först noterar vi att automorfismgruppen $\mathcal{A}$ av vektorrummet Z_p^3 är $GL(3, \mathbf{Z_p})$ som har $(p^3 - 1)(p^3 - p)(p^3 - p^2) = p^3(p-1)^3(p+1)(p^2+p+1)$ element (tre rader måste vara linjärt oberoende). För $p = 2$ erhåller vi 168 element. Detta är en välkänd grupp som även har andra inkarnationer såsom $PSL(2, \mathbf{Z_7})$. Det är lätt att ge matrisrepresentationer för gruppen B' i $\mathcal{A}$. Nämligen

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Dessa är alla involutioner som kan skrivas som $I + N_1, I + N_2, I + N_1 + N_2$, där N_1, N_2 är kommuterande nilpotenta avbildningar av rang 2, d.v.s. $N_i^2 = 0$. Detta data beskriver delgruppen unikt upp till konjugering via Jordans normalform.

Vi behöver nu visa att något liknande gäller i $\overline{Q_8 \times Q_8}$. Ta elementet (i, j), eftersom det är av ordning två, ges konjugering av $(x, y) \mapsto (i, j)(x, y)(i, j) = (ixi, jxj)$. Notera att $ixi = x$ om $x = |pmj, \pm k$ medan $ixi = -x$ för $x = \pm i$ och analogt för de övriga. Detta visar att konjugering med (i, j) lämnar invariant elementen $(\pm i, \pm j), (\pm 1, \pm 1)$ som bildar ett 2-dimensionellt delrum V_+. På dess komplement V_-, vilket är det parallella hyperplanet ges konjugering av multiplikation med γ. Detta utgör en linjär avbildning T, ty givet x, y har vi tre fall. $x, y \in V_+, x, y \in V_-$ och x, y tillhör olika V, med $x + y \in V_+$ i de två första fallen och $x + y \in V_-$ i det sista fallet. Vi verifierar i de tre olika fallen

[0]på högersidan spegelvändes multiplikationen

$T(xy) = xy = TxTy$
$T(xy) = xy = \gamma^2 xy = \gamma x \gamma y = TxTy$
$T(xy) = \gamma xy = (\gamma x)y = TxTy$

Betraktar vi nu $T - I$ kommer denna att verka som 0 på V_+ och $\gamma - I$ på V_-. En enkel räkning ger $(\gamma - I)^2 = \gamma^2 - 2\gamma + I = 2(I - \gamma) = 0$, således har vi att göra med en nilpotent avbildning av rang två. Att dessa tre kommuterar är uppenbart. Därur följer isomorfin.

En explicit isomorfi

Låt $\alpha = (i, j), \beta = (j, k)$ därav följer $\alpha\beta = (k, -i)$. Övriga element ges av $\gamma\alpha, \gamma\beta$ och $\gamma\alpha\beta$ samt givetvis γ och $0 = (1, 1)$. Vi kan då göra följande korrespondenser. Låt oss även beteckna med $\alpha' = (j, i), \beta' = (k, j)$ varur följer direkt att $\alpha'\beta' = (\alpha\beta)'$

α	$(1, 0; 0, 0; 0)$	α'	$(0, 0; 0, 1; 0)$
β	$(0, 1; 0, 0; 0)$	β'	$(0, 0; 1, 0; 0)$
$\alpha\beta$	$(1, 1; 0, 0; 0)$	$\alpha'\beta'$	$(0, 0; 1, 1; 0)$
$\gamma\alpha$	$(1, 0; 0, 0; 1)$	$\gamma\alpha'$	$(0, 0; 0, 1; 1)$
$\gamma\beta$	$(0, 1; 0, 0; 1)$	$\gamma\beta'$	$(0, 0; 1, 0; 1)$
$\gamma\alpha\beta$	$(1, 1; 0, 0; 1)$	$\gamma\alpha'\beta'$	$(0, 0; 1, 1; 1)$

Notera hur $(x, y, 0, 0, *)$ avbildas på $(0, 0, y, x, *)$ anledningen till detta är att $\alpha\alpha' = (k, k), \beta\beta' = (i, i)$ och $\alpha\beta\alpha'\beta' = (j, j)$ alla har ordning två, och således må vi ha $a \mathbin{.} b = 0$ vilket automatiskt uppfylles på detta sätt. Och vi listar för fullständighetens skull

(i, i)	$(0, 1; 1, 0; 0)$	(j, j)	$(1, 1; 1, 1; 0)$	(k, k)	$(1, 0; 0, 1; 0)$
$(i, -i)$	$(0, 1; 1, 0; 1)$	$(j, -j)$	$(1, 1; 1, 1; 1)$	$(k, -k)$	$(1, 0; 0, 1; 1)$

Ur detta kan vi nu generera den fullständiga avbildningen. Detta möjliggör speciellt för oss att även lista ut hur Q_8 sitter inuti matrisrepresentationen av Heisenberggruppen. Vi kan sätta upp följande tabell

$(i, 1)$	$(1, 1; 0, 1; 0)$	$(1, i)$	$(1, 0; 1, 1; 0)$
$(-i, 1)$	$(1, 1; 0, 1; 1)$	$(1, -i)$	$(1, 0; 1, 1; 1)$
$(j, 1)$	$(1, 0; 1, 0; 1)$	$(1, j)$	$(0, 1; 0, 1; 1)$
$(-j, 1)$	$(1, 0; 1, 0; 0)$	$(1, -j)$	$(0, 1; 0, 1; 0)$
$(k, 1)$	$(0, 1; 1, 1; 0)$	$(1, k)$	$(1, 1; 1, 0; 0)$
$(-k, 1)$	$(0, 1; 1, 1; 1)$	$(1, -k)$	$(1, 1; 1, 0; 1)$

ur vilken allting följer. Vi noterar att de första fyra ko-ordinaterna utgör de icketriviala elementen i två disjunkta 2-dimensionella vektor-rum i det 4-dimensionella rum som utgöres av $H_2(\mathbf{Z_2})$ dividerat med sitt centrum. Dessa delrum kan givetvis väljas på många olika sätt, upp till automorfismer av Heisenberggruppen. Men till ett studium av detta räcker inte utrymmet till.