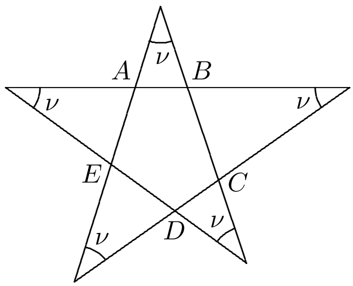
Uppgifter

537. Den femuddiga stjärnan i figuren är sammansatt av fem linjestycken av sammanlagd längd 1. Antag att de fem uddvinklarna är lika stora. Bestäm omkretsen av femhörningen $ABCDE$.



538. Vi har givet fyra naturliga tal $k < l < m < n$ för vilka $kn = lm$. Visa olikheten

$$\left(\frac{n-k}{2}\right)^2 \geq k+2.$$

539. Låt oss säga att en permutation $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ av $\{1, 2, \ldots, n\}$ är kvadratisk om det finns minst en heltalskvadrat bland talen a_1, $a_1 + a_2, \ldots, a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Bestäm alla naturliga tal n sådana att varje permutation av $\{1, 2, \ldots, n\}$ är kvadratisk.

540. Bestäm alla positiva heltal n och icke-negativa heltal $x_1, x_2, \ldots, x_n$ för vilka

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 + \frac{4}{4n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2.$$

541. Låt P vara en punkt på en sfär S med radien 1. Tre parvis ortogonala strålar från P skär S i punkterna A, B och C.

a) Betrakta de plan som innehåller trianglar med hörn i nämnda punkter A, B, C. Visa att det existerar en fix punkt genom vilken alla sådana plan passerar.

b) Bestäm den största möjliga arean av triangeln ABC.

542. Låt a, b, c vara reella tal sådana att polynomet $P(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ har tre reella rötter (inte nödvändigtvis olika). Visa att

$$12ab + 27c \leq 6a^3 + 10(a^2 - 2b)^{3/2}.$$

543. (*Kent Holing, Trondheim.*) La en monisk fjerdegradsligning med heltallskoeffisienter og irredusibel resolvent være gitt. Anta også at ligningen og dens kubiske resolvent har minst én felles rot.

a) Vis at kubikkleddet til fjerdegradsligningen ikke kan være null.

b) Bestem Galois-gruppen til fjerdegradsligningen.

c) (Vanskelig.) Gi to eksempler, og vis at disse eksemplene er de eneste mulige.

(Normat-artiklene om fjerdegradsligningen i hefte 1 og 2, 2003 gir nyttig bakgrunn for å løse oppgaven.)

(Uppgifterna 537–542 är hämtade från olympiadtävlingar i Ryssland, Vietnam och Taiwan.)

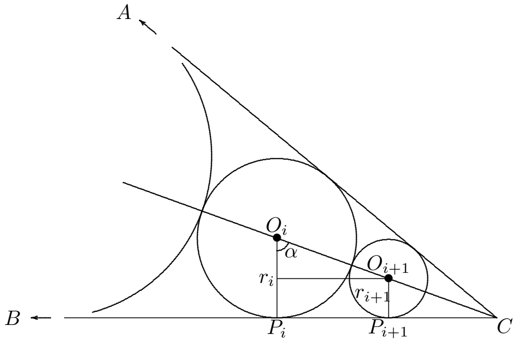
Lösningar skickas senast 15 juli 2011 till:

Dag Jonsson, nilsdag@hotmail.com
Paprikagatan 8
SE-75449 Uppsala

Anm. Vi välkomnar givetvis lösningar även efter angivet datum så länge inga andra lösningar har presenterats i tidskriften.

Lösningar till uppgifter i Normat 2009:4

527. (*Eike Petermann, Stockholm.*) Cirklarnas medelpunkter O_i och tangeringspunkterna mellan cirklarna kommer alla att ligga på bisektrisen till vinkeln vid C. Radierna från cirklarnas centra till cirklarnas tangeringspunkter P_i på BC är alla vinkelräta mot BC och vi kallar vinkeln mellan dessa radier och bisektrisen α.



Man får (se figuren):

$$\begin{aligned} r_i &= |O_iP_i| \\ &= |O_iO_{i+1}| \cdot \cos\alpha + r_{i+1} \\ &= (r_i + r_{i+1}) \cdot \cos\alpha + r_{i+1}, \end{aligned}$$

varav

$$\frac{r_{i+1}}{r_i} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},$$

som är oberoende av i. Cirklarnas radier bildar alltså en geometrisk följd.

Anm. Förutsättningen i uppgiften att triangeln ABC är likbent verkar vara onödig. Slutsatsen och beviset ovan gäller för alla slags trianglar.

(Även löst av *Con Amore Problemgruppe, København, Jørgen Olesen, Værløse och Kåre Vedøy, Fyllingsdalen.*)

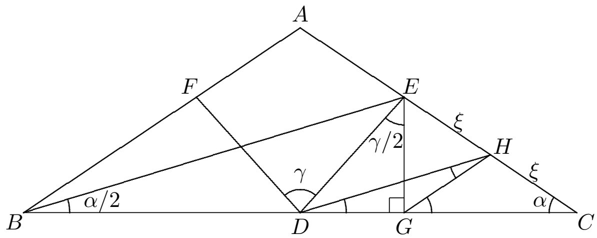
528. (Lösning av *Eike Petermann.*) Problemet kan reduceras till att visa att

$$\tan\frac{\gamma}{2} > \frac{1}{2}, \text{ där } \gamma = \angle EDF.$$

Man har då nämligen att

$$\cos\gamma = \frac{1-\tan^2\frac{\gamma}{2}}{1+\tan^2\frac{\gamma}{2}} = \frac{2}{1+\tan^2\frac{\gamma}{2}} - 1 < \frac{2}{1+\frac{1}{4}} - 1 = \frac{3}{5}.$$

Låt H vara mittpunkten på sträckan EC och $|EH| = |HC| = \xi$. För övriga beteckningar se nedanstående figur.



Sträckan DH är parallell med BE, eftersom D och H halverar BC respektive EC; $\angle HDC$ är därför $= \alpha/2$. $\triangle EGC$ är rätvinklig och H är centrum i dess omskrivna cirkel. Alltså är $|EH| = |HC| = |GH| = \xi$ och $\triangle GHC$ är likbent, vilket medför att $\angle HGC = \alpha$. Men då måste $\angle DHG = \alpha/2$ och även $\triangle DGH$ är likbent, vilket medför att $|DG| = \xi$. Ihop med att $|EG| < |EC| = 2\xi$ får man nu

$$\tan\frac{\gamma}{2} = \frac{|DG|}{|EG|} > \frac{\xi}{2\xi} = \frac{1}{2}.$$

(Även löst av *Hans Kaas Benner, Con Amore Problemgruppe och Kåre Vedøy.*)

529. (Lösning av *Norvald Midttun, Voss.*) At n deler $p-1$, betyr at $p = an+1 > n$, a heltall. At p deler $n^3-1 = (n-1)(n^2+n+1)$ og $p > n$, betyr at p deler n^2+n+1. Nå har vi at p deler $an+1 = n+1+(a-1)n$ og p deler n^2+n+1 $(an+1 \le n^2+n+1)$. Derfor må p dele differensen $n^2-(a-1)n = n(n-a+1)$. Da p ikke deler n, må p dele $n-a+1$, som bare er mulig dersom $n-a+1 = 0$. Vi får at $p = an+1 = a(a-1)+1$ og dermed $4p-3 = (2a-1)^2$.

Tillegg. Anta at p er et primtall slik at $4p-3 = (2m-1)^2$, $p = m^2-m+1$, $m > 1$. (Slike primtall finnes, for eksempel $p = 3, 7, 13, 31, 43, \ldots$, hvor alle har formen $6t+1$ bortsett i fra 3. Men ikke alle primtall av formen $p = 6t+1$ er slik at $4p-3$ er kvadrattall, 19 er et slikt). Da finnes det et naturlig tall $n > 1$ slik at n deler $p-1$ og p deler n^3-1.
Bevis. La $n = m-1$. Da vil $n = m-1$ dele $p-1 = m(m-1)$ og $p = m^2-m+1$ vil dele $n^3-1 = m^3-3m^2+3m-2 = (m-2)(m^2-m+1)$.
(Även löst av *Hans Kaas Benner, Con Amore Problemgruppe, Eike Petermann, Ole Somdalen och Kåre Vedøy.*)

531. (Lösning av *Con Amore Problemgruppe, København.*) Lad for $n \ge 1$ $A_{n,1}$ være delmængden af ord fra A_n, som ender på en vokal, og lad $A_{n,2}$ være delmængden af ord fra A_n, som ender på en konsonant. Lad endvidere for $n \ge 2$ $B_{n,1}$ være delmængden af ord fra B_n, som har to forskellige bogstaver på de sidste to pladser, og lad $B_{n,2}$ være delmængden af ord fra B_n, som har to ens bogstaver på de sidste to pladser.

Til et vilkårligt ord i A_n kan vi lade svare nogle ord fra A_{n+1} ved sidst i ordet at tilføje et tilladt bogstav. Vi bemærker, at vi på denne måde til et ord fra $A_{n,1}$ får dannet netop to ord fra A_{n+1}, nemlig et fra $A_{n+1,1}$ (den ene af vokalerne er det jo ikke tilladt at benytte) og et fra $A_{n+1,2}$. Og til et ord fra $A_{n,2}$ får vi dannet netop tre ord fra A_{n+1}, nemlig to fra $A_{n+1,1}$ (begge vokalerne er tilladte) og et fra

$A_{n+1,2}$. Omvendt kan ethvert ord fra A_{n+1} på netop én måde fås på den omtalte måde. Heraf fremgår rigtigheden af (1) nedenfor. Tilsvarende indses (2) at gælde for $n \geq 2$.

(1) $\quad |A_{n+1,1}| = |A_{n,1}| + 2|A_{n,2}|$ og $|A_{n+1,2}| = |A_{n,1}| + |A_{n,2}| = |A_n|$

(2) $\quad |B_{n+1,1}| = |B_{n,1}| + 2|B_{n,2}|$ og $|B_{n+1,2}| = |B_{n,1}| + |B_{n,2}| = |B_n|$

I overensstemmelse med påstanden begynder en tabel sådan:

n	$\lvert A_{n,1}\rvert$	$\lvert A_{n,2}\rvert$	$\lvert A_n\rvert$	$\lvert B_{n,1}\rvert$	$\lvert B_{n,2}\rvert$	$\lvert B_n\rvert$
1	2	1	3			3
2	4	3	7	6	3	9
3	10	7	17	12	9	21
4	24	17	41	30	21	51
5	58	41	99	72	51	123
6	140	99	239	174	123	297

Ifølge tabellen gælder påstanden specielt for $n = 1$ og for $n = 2$. Antag nu, at den gælder for alle tal $1, 2, \ldots n$, hvor $n \geq 2$. Ved benyttelse af (1) og (2) finder vi så:

$$\begin{aligned} |B_{n+2}| &= |B_{n+2,1}| + |B_{n+2,2}| = 2|B_{n+1,1}| + 3|B_{n+1,2}| = 2|B_{n+1}| + |B_{n+1,2}| \\ &= 2|B_{n+1}| + |B_n|, \end{aligned}$$

$$|A_{n+1}| = |A_{n+1,1}| + |A_{n+1,2}| = 2|A_{n,1}| + 3|A_{n,2}| = 2|A_n| + |A_{n,2}| = 2|A_n| + |A_{n-1}|.$$

Det fremgår heraf, at

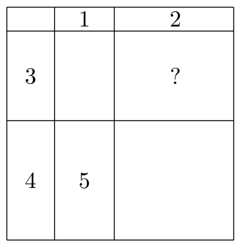
$$|B_{n+2}| = 2|B_{n+1}| + |B_n| = 6|A_n| + 3|A_{n-1}| = 3|A_{n+1}|,$$

dvs. påstanden gælder også for $n+1$. Påstandens rigtighet følger nu ved induktion. (Även löst av *Eike Petermann.*)

SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Kvalificeringstävling den 28 september 2010

1. En rektangel består av nio smårektanglar med areor (i m^2) enligt figur. Bestäm arean av rektangeln som markerats med ett frågetecken i figuren.



2. På dagen för en släktträff sommaren 2010 fyller Lennart, Lotten och Lisa år. Lennart har räknat ut att produkten av deras åldrar är 6958. En gång tidigare under 2000-talet har släktingarna sammanstrålat samma datum. Då var summan av Lennarts, Lottens och Lisas åldrar lika med 80, men vad var produkten den gången?

3. Differensen mellan två femsiffriga heltal är 246. Visa att de tio siffror som ingår i de båda talen inte alla kan vara olika.

4. På varje kant i en kub står ett heltal. För fem av kvadraterna gäller att summan av talen på motstående sidor är lika (summorna kan vara olika för olika kvadrater). Visa att detta även gäller för den sjätte kvadraten.

5. Den i triangeln ABC inskrivna cirkeln tangerar triangeln i punkterna A_1 på sidan BC, B_1 på sidan AC och C_1 på sidan AB. Den i triangeln $A_1B_1C_1$ inskrivna cirkeln tangerar triangeln $A_1B_1C_1$ i punkterna A_2 på sidan B_1C_1, B_2 på sidan A_1C_1 och C_2 på sidan A_1B_1. Bestäm vinklarna i triangeln $A_2B_2C_2$ då vinklarna vid A, B och C är givna.

6. Anton har röda och blåa pärlor. Med dem vill han försöka fylla en kvadrat med $n \times n$ piggar (på vilka pärlorna ska sättas) på ett sådant sätt att varje pärla har exakt två ”grannpärlor” med samma färg som pärlan själv. Två pärlor räknas som grannar om de ligger bredvid varandra, antingen i vertikal eller i horisontell ledd. För vilka n är detta möjligt?

Skrivtid: 5 timmar

Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!

Om några dagar kommer lösningar att finnas utlagda på nätet under adress *www.mattetavling.se*

SKOLORNAS MATEMATIKTÄVLING
Svenska Matematikersamfundet

Finaltävling i Lund den 20 november 2010

1. Finns det en triangel vars tre höjder har måtten 1, 2 respektive 3 längdenheter?

2. Betrakta fyra linjer $y = kx - k^2$ för olika heltal k. Fyra olika punkter (x_i, y_i), $i = 1, 2, 3, 4$, är sådana att var och en tillhör två olika linjer och på varje linje ligger precis två av dem.
   Låt $x_1 \leq x_2 \leq x_3 \leq x_4$. Visa att $x_1 + x_4 = x_2 + x_3$ och $y_1 y_4 = y_2 y_3$.

3. Finn alla naturliga tal $n \geq 1$ sådana att det finns ett polynom $p(x)$ med heltalskoefficienter för vilket $p(1) = p(2) = 0$ och där $p(n)$ är ett primtal.

4. Vi skapar en talföljd genom att sätta $a_1 = 2010$ och kräva att a_n är det minsta tal som är större än a_{n-1} och dessutom är delbart med n. Visa att $a_{100}, a_{101}, a_{102}, \ldots$ bildar en aritmetisk talföljd.

5. Betrakta mängden av trianglar där sidlängderna uppfyller

$$(a + b + c)(a + b - c) = 2b^2.$$

   Bestäm vinklarna i den triangel för vilken vinkeln mitt emot sidan med längden a är så stor som möjligt.

6. Ett ändligt antal rutor på ett oändligt rutat papper är målade röda. Visa att man på papperet kan rita in ett antal kvadrater, med sidor utefter rutnätets linjer, sådana att:
   (1) ingen ruta i nätet tillhör mer än en kvadrat (en kant kan däremot tillhöra mer än en kvadrat),
   (2) varje *röd* ruta ligger i någon av kvadraterna och antalet röda rutor i en sådan kvadrat är minst $\frac{1}{5}$ och högst $\frac{4}{5}$ av antalet rutor i kvadraten.

Skrivtid: 5 timmar
Formelsamling och miniräknare är *inte* tillåtna!