

# Rækkefremstillinger i $L^2(\mathbb{R})$ frembragt af trigonometriske funktioner

*Ole Christensen<sup>a</sup> og Mads Sielemann Jakobsen<sup>b</sup>*

Technical University of Denmark

<sup>a</sup>Ole.Christensen@mat.dtu.dk

<sup>b</sup>s082776@student.dtu.dk

Rækkeudviklinger spiller en central rolle i matematik og dens anvendelser. For eksempel giver Fourierrækkerne en bekvem fremstilling af periodiske funktioner i termer af komplekse eksponentialfunktioner. Imidlertid er Fourierrækkernes anvendelighed begrænset til periodiske funktioner; man kan altså ikke benytte dem til at opnå rækkefremstillinger af generelle funktioner i  $L^2(\mathbb{R})$ .

Vi skal i denne artikel give en kort introduktion til den moderne teori for *Gabor systemer*, og vise hvorledes de såkaldte *Gabor frames* og deres *duale frames* leder til bekvemme rækkefremstillinger af funktioner i  $L^2(\mathbb{R})$ . De konstruktioner der optræder i litteraturen er baseret på kompakt støttede funktioner  $g$ , der tilfredsstiller den såkaldte *partition of unity condition*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - k) = 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (0.1)$$

I artiklen viser vi hvorledes man kan konstruere nye eksempler på Gabor frames og tilhørende duale frames, baserede på visse funktioner der ikke opfylder betingelsen (0.1). Konstruktionerne er baserede på elementære trigonometriske funktioner.

Vi begynder i afsnit 1 med en kort gennemgang af de nødvendige resultater fra Fourieranalysen og en række centrale resultater fra Gabor analysen. De nye resultater præsenteres i afsnit 2. Beviserne er elementære, men omfattende; de er derfor placerede separat i appendiks A og appendiks B.

## 1 Fourierrækker og Gabor analyse

Vi vil i dette afsnit give en kort præsentation af de centrale aspekter af Fourieranalysen og Gabor analysen.

### 1.1 Fourierrækker

Lad os betragte vektorrummet

$$L^2(0, 1) := \left\{ f : ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_0^1 |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Det er velkendt at  $L^2(0, 1)$  er et Hilbertrum med hensyn til det indre produkt givet ved

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2(0, 1). \quad (1.1)$$

Til enhver funktion  $f \in L^2(0, 1)$  knyttes den såkaldte *Fourierrække*, givet ved

$$f \sim \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m e^{2\pi im(\cdot)}, \quad (1.2)$$

hvor *Fourierkoefficienterne*  $c_m$  er givet ved

$$c_m = \int_0^1 f(x) e^{-2\pi imx} dx = \langle f, e^{2\pi im(\cdot)} \rangle. \quad (1.3)$$

Antagelsen  $f \in L^2(0, 1)$  sørger for at koefficienterne  $c_m$  er veldefinerede. Det er velkendt at funktionerne  $\{e^{2\pi imx}\}_{m \in \mathbb{Z}}$  udgør en ortonormalbasis for  $L^2(0, 1)$ , og at Fourierrækken er den tilsvarende rækkeudvikling. Den præcise fortolkning af (1.2) er således at

$$\int_0^1 \left| f(x) - \sum_{m=-N}^N c_m e^{2\pi imx} \right|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{for } N \rightarrow \infty. \quad (1.4)$$

Specielt er der altså i (1.2) ikke nødvendigvis tale om punktvis konvergens, hvilket er grunden til at vi har benyttet symbolet " $\sim$ ".

## 1.2 En speciel ortonormalbasis for $L^2(\mathbb{R})$

Som nævnt er Fourierrækkernes anvendelighed stort set begrænset til periodiske funktioner. Målet for denne artikel er at konstruere rækkefremstillinger for kvadratisk integrable funktioner på  $\mathbb{R}$ , altså funktioner i vektorrummet

$$L^2(\mathbb{R}) := \left\{ f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx < \infty \right\}.$$

Det er velkendt at  $L^2(\mathbb{R})$  er et Hilbertrum med hensyn til det indre produkt givet ved

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}). \quad (1.5)$$

Ideerne i den klassiske Fourieranalyse kan benyttes til at konstruere en speciel ortonormalbasis for  $L^2(\mathbb{R})$ :

**Eksempel 1.1** Lad  $\chi_{[0,1]}$  betegne den karakteristiske funktion for intervallet  $[0, 1]$ . Ifølge den klassiske Fourieranalyse er  $\{e^{2\pi imx} \chi_{[0,1]}(x)\}_{m \in \mathbb{Z}}$  en ortonormalbasis for  $L^2(0, 1)$ . Det følger heraf at funktionerne

$$\{e^{2\pi im(x-n)} \chi_{[0,1]}(x-n)\}_{m \in \mathbb{Z}} = \{e^{2\pi imx} \chi_{[0,1]}(x-n)\}_{m \in \mathbb{Z}}$$

for enhver given værdi af  $n \in \mathbb{Z}$  udgør en ortonormal basis for  $L^2(n, n+1)$ . Ved at tage foreningen af disse baser, opnås at  $L^2(\mathbb{R})$  har ortonormalbasen

$$\{e^{2\pi imx} \chi_{[0,1]}(x-n)\}_{m,n \in \mathbb{Z}}.$$

Bemærk at alle funktionerne i denne ortonormalbasis består af translaterede udgaver af funktionen  $\chi_{[0,1]}$ , som er blevet *moduleret*, det vil sige multipliceret med komplekse eksponentialfunktioner. Vi vil se at denne struktur går igen i de generelle Gabor systemer.  $\square$

### 1.3 Generel definition af et Gabor system

Ved indførelsen af generelle Gabor systemer er det bekvemt at benytte operatorer. For et givet  $a \in \mathbb{R}$  definerer vi *translationsoperatoren*

$$T_a : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), (T_a f)(x) := f(x-a).$$

Tilsvarende defineres for  $b \in \mathbb{R}$  den tilhørende *modulationsoperator*

$$E_b : L^2(\mathbb{R}) \rightarrow L^2(\mathbb{R}), (E_b f)(x) := e^{2\pi ibx} f(x).$$

Begge operatorer er lineære, begrænsede, og unitære. For en nærmere analyse henviser vi til bogen [1].

Vælg nu en funktion  $g \in L^2(\mathbb{R})$  og to parametre  $a, b > 0$ . Ved *Gabor systemet* frembragt af funktionen  $g$  og parametrene  $a, b$  forstås systemet af funktioner bestående af

$$\{(E_{mb} T_{na} g)(x)\}_{m,n \in \mathbb{Z}} = \{e^{2\pi imbx} g(x-na)\}_{m,n \in \mathbb{Z}}.$$

Bemærk at denne generelle definition netop svarer til strukturen af det funktions-system vi konstruerede i eksempel 1.1. Vi vil normalt undertrykke variabelen  $x$  og blot betegne Gabor systemet med  $\{E_{mb} T_{na} g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ .

Gabor systemet motiveres altså naturligt ud fra Fourierrækkerne og ønsket om at opnå rækkefremstillinger i  $L^2(\mathbb{R})$ . Lad os vise at det også indføres naturligt ud fra Fouriertransformationen:

**Eksempel 1.2** Fouriertransformationen af en funktion  $f \in L^1(\mathbb{R})$  defineres ved

$$\widehat{f}(\gamma) := \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi ix\gamma} dx, \quad \gamma \in \mathbb{R}.$$

Det er velkendt at Fouriertransformationen kan udvides til en unitær operator på  $L^2(\mathbb{R})$ . Det er også velkendt at Fouriertransformationen indeholder information om de frekvenser der optræder i signalet  $f$ : hvis  $f$  for eksempel beskriver et musikstykke med stort indhold af en bestemt frekvens  $\nu$ , så vil  $|\widehat{f}(\gamma)|$  have en stor værdi netop ved  $\gamma = \nu$ . Imidlertid kan Fouriertransformationen ikke lokalisere *hvor* i musikstykket denne frekvens optræder. I praksis løses dette problem ved at man betragter en såkaldt *vinduesfunktion*  $g$ , der typisk vælges til at være en funktion

med kompakt støtte, som er konstant på et begrænset interval  $I$  og aftager til nul udenfor intervallet  $I$ . Figur 1 giver et eksempel for en sådan funktion. Betragt nu den såkaldte *short-time Fourier transform*

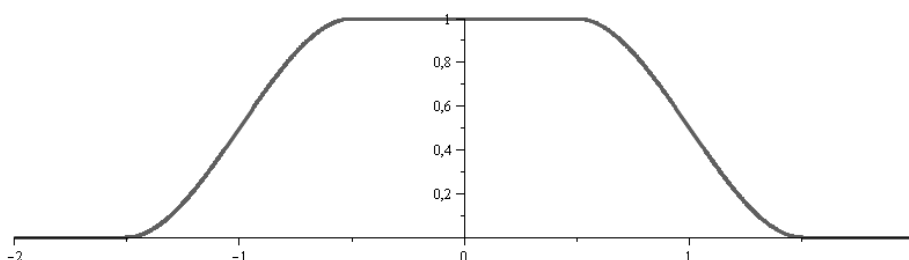
$$V_g f(t, \gamma) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x-t)} e^{-2\pi i x \gamma} dx, \quad t, \gamma \in \mathbb{R}. \quad (1.6)$$

Det ses at  $V_g f(t, \gamma)$  for en given værdi af variabelen  $t$  netop er Fouriertransformationen af funktionen  $f \overline{T_t g}$ . Derfor vil  $V_g f(t, \gamma)$  indeholde information om frekvensindholdet af signalet  $f$  over intervallet  $t + I$ . Parameteren  $t$  sørger herefter for at flytte intervallet  $I$  over den reelle akse således at frekvensindholdet i hele signalet kan analyseres.

Bemærk at hvis vi lader  $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ , så kan vi skrive

$$V_g f(t, \gamma) = \langle f, E_\gamma T_t g \rangle. \quad (1.7)$$

Gabor systemer opstår nu helt naturligt ud fra (1.7): istedet for at tillade  $\gamma$  og  $t$  at antage alle værdier på den reelle akse, så begrænser vi de to parametre til gitteret  $\{(mb, na)\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  med  $a, b > 0$ . Herved bliver  $\{E_\gamma T_t g\}_{\gamma, t \in \mathbb{R}}$  til Gabor systemet  $\{E_{mb} T_{na} g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ .



Figur 1: Et typisk eksempel på en vinduesfunktion.

□

### 1.4 Gabor systemer og baser

Vi har allerede i eksempel 1.1 set at det er muligt at konstruere et Gabor system som udgør en ortonormalbasis for  $L^2(\mathbb{R})$ . Imidlertid er det i mange sammenhænge ubekvemt at den er baseret på funktionen  $\chi_{[0,1]}$ , som ikke er kontinuert. For eksempel bevirker det at dens Fouriertransformation  $\widehat{\chi_{[0,1]}}(\gamma)$  går meget langsom mod nul når  $\gamma \rightarrow \infty$ , som det fremgår af udtrykket

$$|\widehat{\chi_{[0,1]}}(\gamma)| = \left| \frac{\sin(\pi\gamma)}{\pi\gamma} \right|.$$

Det er naturligt at spørge om bedre resultater kan opnås ved at benytte andre Gabor ortonormalbaser. Resultatet er nedslående, og er i litteraturen kendt under navnet *Balian-Low's theorem*:

**Sætning 1.3** Lad  $g \in L^2(\mathbb{R})$ . Hvis  $\{E_m T_n g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  er en ortonormalbasis for  $L^2(\mathbb{R})$ , så er

$$\left( \int_{-\infty}^{\infty} |xg(x)|^2 dx \right) \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\gamma \hat{g}(\gamma)|^2 d\gamma \right) = \infty. \quad (1.8)$$

I ord siger sætningen at en funktion  $g$  som frembringer en Gabor ortonormalbasis ikke kan være *lokaliseret* både i tid og frekvens: for eksempel er det umuligt at de to betingelser

$$|g(x)| \leq \frac{C}{1+x^2}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |\hat{g}(\gamma)| \leq \frac{C}{1+\gamma^2}, \quad \gamma \in \mathbb{R}$$

begge er opfyldt. Et bevis for sætningen kan findes i referencerne [7] og [11]. I næste afsnit beskrives hvorledes dette problem kan løses.

### 1.5 Gabor frames

At kræve at en samling funktioner er en ortonormalbasis for  $L^2(\mathbb{R})$  er en meget skrap betingelse. Dette illustreres tydeligt af Balian-Low's sætning, der viser at det kan være umuligt at konstruere ortonormalbaser som opfylder ekstra betingelser. Vi vil i dette afsnit introducere de såkaldte *frames*, som tillader os at opnå rækkefremstillinger i stil med dem vi kender fra ortonormalbaser, men under svagere betingelser. Frames er således mere fleksible end ortonormalbaser, og ofte kan man konstruere frames med egenskaber som er uforenelige med ortonormalbaser.

Vi bemærker at frames kan betragtes i generelle Hilbertrum, se f.eks. bøgerne [2], [6], [19]. I denne artikel vil vi nøjes med at betragte Gabor frames i  $L^2(\mathbb{R})$ .

**Definition 1.4** Lad  $g \in L^2(\mathbb{R})$  og  $a, b > 0$  være givet. Systemet  $\{E_{mb} T_{na} g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  kaldes en Gabor frame hvis der findes konstanter  $A, B > 0$  således at

$$A \|f\|^2 \leq \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} |\langle f, E_{mb} T_{na} g \rangle|^2 \leq B \|f\|^2, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (1.9)$$

Systemet  $\{E_{mb} T_{na} g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  kaldes en Besselfølge hvis den øvre betingelse i (1.9) er opfyldt.

En funktion  $g$  der frembringer en Gabor frame  $\{E_{mb} T_{na} g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  for passende parametre  $a, b > 0$  kaldes i litteraturen for en *generator* eller *window function*.

Vi bemærker straks at der i litteraturen findes mange eksempler på Gabor frames  $\{E_{mb} T_{na} g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$ , for hvilke funktionen  $g$  ikke lider af begrænsningen i Balian-Low's sætningen. For eksempel blev det vist i 1991 af Lyubarski [15] og Seip & Wallsten [18] at Gaussfunktionen  $g(x) = e^{-x^2}$  frembringer en Gabor frame  $\{E_{mb} T_{na} g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  hvis og kun hvis  $ab < 1$  (beviset er kompliceret og kræver et dybt kendskab til kompleks analyse). Da Fouriertransformationen af en Gaussfunktion selv er en Gaussfunktion er de to integraler i (1.8) endelige. Et centralt resultat for Gabor frames fortæller at en Gabor frame ydermere leder til rækkefremstillinger i stil med hvad vi kender for ortonormalbaser, se f.eks. side 214 i [2]:

**Sætning 1.5** *Antag at  $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  er en Gabor frame. Så findes der (mindst) en funktion  $h \in L^2(\mathbb{R})$  således at*

$$f = \sum_{m,n \in \mathbb{Z}} \langle f, E_{mb}T_{na}h \rangle E_{mb}T_{na}g, \quad \forall f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (1.10)$$

Man kan vise at hvis  $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  er en Gabor frame og  $\{E_{mb}T_{na}h\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  er en Bessel følge for hvilken (1.10) gælder, så er  $\{E_{mb}T_{na}h\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  også en Gabor frame. Man kalder  $\{E_{mb}T_{na}h\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  en *dual frame*, og funktionen  $h$  kaldes en *dual generator*. Gabor frames  $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  og de tilhørende duale generatorer er karakteriserede af Ron & Shen [16], samt Janssen [12]. Vi formulerer resultatet under de tekniske betingelser der er relevante for vores videre analyse:

**Sætning 1.6** *Lad  $g, h \in L^2(\mathbb{R})$  være begrænsede funktioner med kompakt support, og lad  $a, b > 0$  være givne. Så er (1.10) opfyldt hvis og kun hvis*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{g(x - n/b - ka)} h(x - ka) = b\delta_{n,0}, \quad \text{a.e. } x \in [0, a]. \quad (1.11)$$

Eksplícitte konstruktioner af duale Gabor frames er blevet foretaget af Christensen og Kim [3], [5], samt Laugesen [14]. Specielt nævnes det følgende resultat fra [3]:

**Sætning 1.7** *Lad  $N \in \mathbb{N}$ . Lad  $g \in L^2(\mathbb{R})$  være en begrænset funktion der antager reelle værdier, og for hvilken  $\text{supp } g \subseteq [0, N]$ . Antag endvidere at*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - k) = 1, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (1.12)$$

*Lad  $b \in ]0, \frac{1}{2N-1}]$ . Så vil funktionen  $g$  og funktionen  $h$  givet ved*

$$h(x) = bg(x) + 2b \sum_{k=1}^{N-1} g(x+k) \quad (1.13)$$

*frembringe duale Gabor frames  $\{E_{mb}T_{na}g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  og  $\{E_{mb}T_{na}h\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  for  $L^2(\mathbb{R})$ .*

Sætning 1.7 kan for eksempel benyttes til at konstruere Gabor frames baseret på de velkendte B-splines, som vides at opfylde betingelsen (1.12); se [3]. Generelt er betingelsen (1.12) dog særdeles restriktiv. Formålet med de følgende afsnit er at vise hvorledes det for specielle trigonometriske funktioner er muligt at konstruere duale par af Gabor frames som ikke nødvendigvis opfylder denne betingelse.

Som et første lille skridt nævnes at hvis en funktion  $g$  opfylder betingelsen

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - k) = c \neq 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (1.14)$$

så vil  $\frac{1}{c}g$  opfylde (1.12). Hvis de øvrige betingelser i sætning 1.7 er opfyldt kan resultatet hermed anvendes på funktionen  $\frac{1}{c}g$ . Vi vil dog se andre eksempler, hvor man ikke på denne måde kan benytte de kendte resultater via en simpel normalisering.

## 2 Frames frembragt af trigonometriske funktioner

Formålet med dette afsnit er at vise at det er muligt at konstruere duale par af Gabor frames baseret på funktioner  $g$ , der ikke opfylder betingelsen (1.12). Resultaterne er nye, og er opnåede som en del af fagprojektet [13].

Vi vil betragte funktioner af typen

$$g(x) = \sin\left(\frac{\eta}{3}\pi x\right)\chi_{[0,3]}(x) \quad (2.1)$$

og

$$g(x) = \sin^\eta\left(\frac{1}{3}\pi x\right)\chi_{[0,3]}(x), \quad (2.2)$$

hvor  $\eta \in \mathbb{N}$ . Vi vil koncentrere os om at søge duale frames frembragt af funktioner  $h$  svarende til den der benyttes i sætning 1.7, altså

$$h(x) = Cg(x) + Dg(x+1) + Eg(x+2)$$

for passende konstanter  $C, D, E \in \mathbb{R}$ .

Vi betragter først funktioner af typen (2.1) Vi starter med at vise at betingelsen (1.14) ikke er opfyldt for sådanne funktioner:

**Proposition 2.1** *Lad  $\eta \in \mathbb{N}$  og betragt funktionen (2.1). Da gælder følgende:*

(i) *Funktionen  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x-k)$  er konstant hvis og kun hvis*

$$\eta \in \{2, 4, 8, 10, \dots\} = \{2 + 6k \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\} \cup \{4 + 6k \mid k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

(ii) *Hvis  $\eta \in \{2, 4, 8, 10, \dots\}$ , så er*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x-k) = 0.$$

**Bevis.** Bemærk at  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x-k)$  er 1-periodisk. Vi behøver derfor kun betragte intervallet  $x \in [0, 1]$ . På dette interval har vi

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x-k) &= \sin\left(\frac{\eta}{3}\pi x\right) + \sin\left(\frac{\eta}{3}\pi(x+1)\right) + \sin\left(\frac{\eta}{3}\pi(x+2)\right) \\ &= \sin\left(\frac{\eta}{3}\pi x\right)\left[1 + \cos\left(\frac{\eta}{3}\pi\right) + \cos\left(\frac{2\eta}{3}\pi\right)\right] \\ &\quad + \cos\left(\frac{\eta}{3}\pi x\right)\left[\sin\left(\frac{\eta}{3}\pi\right) + \sin\left(\frac{2\eta}{3}\pi\right)\right]. \end{aligned}$$

Eftersom  $\{1, \sin(\frac{\eta}{3}\pi x), \cos(\frac{\eta}{3}\pi x)\}$  er et sæt lineært uafhængige funktioner er ovenstående konstant, hvis og kun hvis

$$\begin{cases} 0 = 1 + \cos\left(\frac{\eta}{3}\pi\right) + \cos\left(\frac{2\eta}{3}\pi\right), \\ 0 = \sin\left(\frac{\eta}{3}\pi\right) + \sin\left(\frac{2\eta}{3}\pi\right). \end{cases}$$

Sinus- og cosinusfunktionerne er  $2\pi$ -periodiske, så det er nok at se på de to ligninger for  $\eta = 1, \dots, 6$ . Det viser sig, at ligningerne er opfyldt for  $\eta = 2, 4$ , for hvilke  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - k) = 0$ . Af  $2\pi$ -periodiciteten følger at dette resultat også holder for alle lige  $\eta$  hvor  $\eta \notin 6\mathbb{N}$ .  $\square$

Proposition 2.1 viser at vi for funktioner af typen (2.1) ikke kan anvende sætning 1.7. Alligevel viser det sig muligt at konstruere duale generatorer af tilsvarende form:

**Sætning 2.2** *Lad  $\eta \in \mathbb{N}$ ,  $b \in ]0, 1/5]$  og  $C, D, E \in \mathbb{R}$ , og betragt funktionerne (2.1) og*

$$h(x) = \frac{4}{3}b(Cg(x) + Dg(x + 1) + Eg(x + 2)). \quad (2.3)$$

Så gælder følgende:

- (i) *Funktionen  $g$  frembringer en Gabor frame  $\{E_{mb}T_n g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  med en dual generator  $h$  af formen (2.3) hvis og kun hvis  $\eta \in \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N} = \{1, 2, 4, 5, \dots\}$ .*
- (ii) *Hvis  $\eta \in \mathbb{N} \setminus 3\mathbb{N}$ , så er de duale generatorer  $h$  på formen (2.3) karakteriserede ved*

$$C \in \mathbb{R}, \quad D = (2C - 1)(-1)^\eta, \quad E = 2C - 1. \quad (2.4)$$

Beviset for sætning 2.2 er elementært, men ret langt; se Appendiks A. For  $\eta = 1, 4$  viser figur 2 og 3 nogle eksempler på duale generatorer  $h$ .

**Korrolar 2.3** *Under antagelserne i sætning 2.2(ii) kan de duale generatorer i (2.4) skrives på formen*

$$h(x) = h_1(x) + Ch_2(x), \quad C \in \mathbb{R}, \quad (2.5)$$

hvor

$$h_1(x) = \frac{4}{3}b \left( (-1)^{\eta+1}g(x + 1) - g(x + 2) \right) \quad (2.6)$$

og

$$h_2(x) = \frac{4}{3}b \left( g(x) + 2(-1)^\eta g(x + 1) + 2g(x + 2) \right). \quad (2.7)$$

**Bevis.** Via (2.4) ses at udtrykket for de duale generatorer kan skrives som

$$\begin{aligned} h(x) &= \frac{4}{3}b \left( Cg(x) + (2C - 1)(-1)^\eta g(x + 1) + (2C - 1)g(x + 2) \right) \\ &= \frac{4}{3}b \left( (-1)^{\eta+1}g(x + 1) - g(x + 2) \right) \\ &\quad + \frac{4}{3}b \left( g(x) + 2(-1)^\eta g(x + 1) + 2g(x + 2) \right) C \\ &= h_1(x) + Ch_2(x). \end{aligned}$$



□

Bemærk lighederne imellem  $h_2$  og de duale generatorer fra sætning 1.7. Når  $\eta$  er lige fås (pånær en faktor  $\frac{4}{3}$ ) det samme udtryk for  $h_2$  som for funktionen  $h$  i (1.13), på trods af at funktionen  $g$  i (2.1) ikke opfylder betingelsen (1.14). Af proposition 2.1 følger at ikke en gang en skalering af  $g$  kan få (1.12) opfyldt.

Vi vender os nu mod behandlingen af den anden type generator  $g$  beskrevet i (2.1). Analogt til proposition 2.1 gælder følgende:

**Proposition 2.4** *Lad  $\eta \in \mathbb{N}$  og betragt  $g(x) = \sin^\eta(\pi x/3)\chi_{[0,3]}(x)$ . Da opfylder  $g$  betingelsen (1.14) hvis og kun hvis  $\eta \in \{2, 4\}$ . For  $\eta = 2$  er*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - k) = \frac{3}{2}$$

og for  $\eta = 4$  er

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - k) = \frac{9}{8}.$$

På trods af at betingelsen (1.14) ikke er opfyldt for  $\eta \notin \{2, 4\}$  er der alligevel tilfælde hvor en dual generator af den ønskede form eksisterer:

**Sætning 2.5** *Lad  $\eta \in \mathbb{N}$ ,  $b \in ]0, 1/5]$  og  $C, D, E \in \mathbb{R}$ , og betragt funktionerne*

$$g(x) = \sin^\eta\left(\frac{1}{3}\pi x\right)\chi_{[0,3]}(x)$$

og

$$h(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^\eta b(Cg(x) + Dg(x+1) + Eg(x+2)). \quad (2.8)$$

Så gælder følgende:

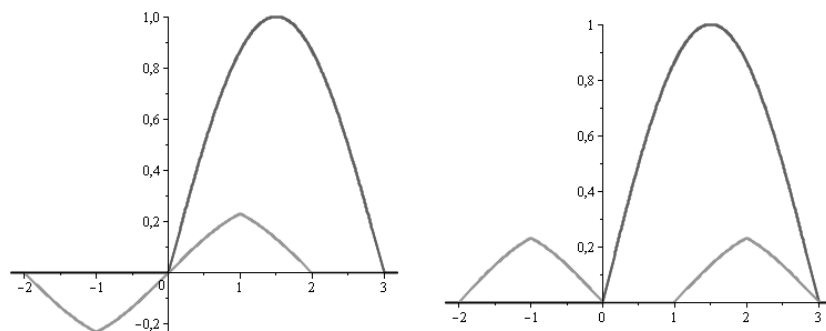
- (i) *Funktionen  $g$  frembringer en Gabor frame  $\{E_{mb}T_n g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  med en dual generator  $h$  af formen (2.8) hvis og kun hvis  $\eta < 6$ .*
- (ii) *For  $\eta < 6$  er de duale generatorer  $h$  på formen (2.8) karakteriserede af følgende:*

$$\begin{aligned} \eta &= 1 : C \in \mathbb{R}, D = 1 - 2C, E = 2C - 1; \\ \eta &= 2 : C \in \mathbb{R}, D = 1 - 2C, E = 1 - 2C; \\ \eta &= 3 : C = 1/3, D = 1/3, E = -1/3; \\ \eta &= 4 : C = 1/4, D = 1/2, E = 1/2; \\ \eta &= 5 : C = 1/5, D = 3/5, E = -3/5. \end{aligned}$$

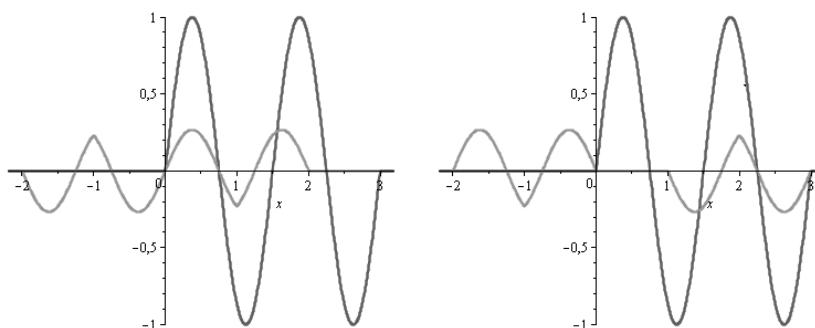
Beviset for sætningen kan læses i Appendiks B.

Strukturen af løsningerne i sætning 2.5 er interessant. For eksempel ses at løsningerne for  $\eta = 1$  og  $\eta = 2$  har samme form, på nær et fortegnsskift på koefficienten  $E$ . Det er også påfaldende at der for  $\eta = 1, 2$  er mulighed for at vælge parameteren  $C$  frit, mens der for  $\eta = 3, 4, 5$  er en entydig løsning. På figur 4 og 5 ses eksempler på disse par af duale generatorer.

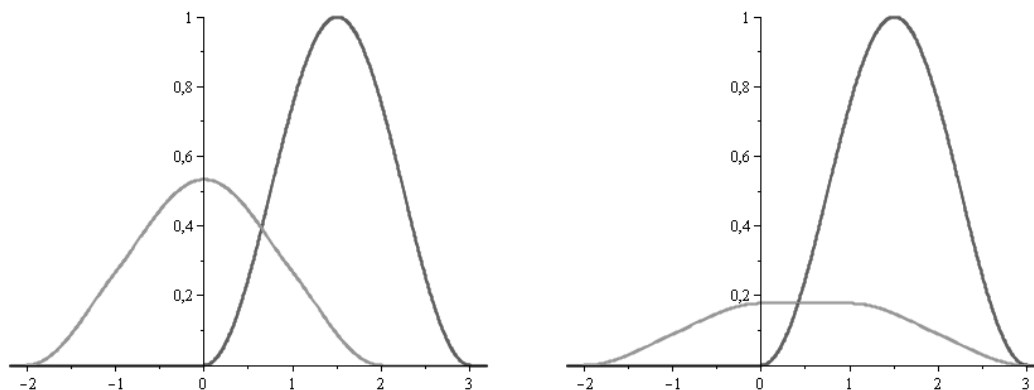
Af proposition 2.4 følger at vi kan opfylde partition of unity condition for  $\eta = 2, 4$  ved skalering af  $g$ . Det bemærkes at den entydige dual givet af sætning 2.5 for  $\eta = 4$  også er karakteriseret af sætning 1.7.



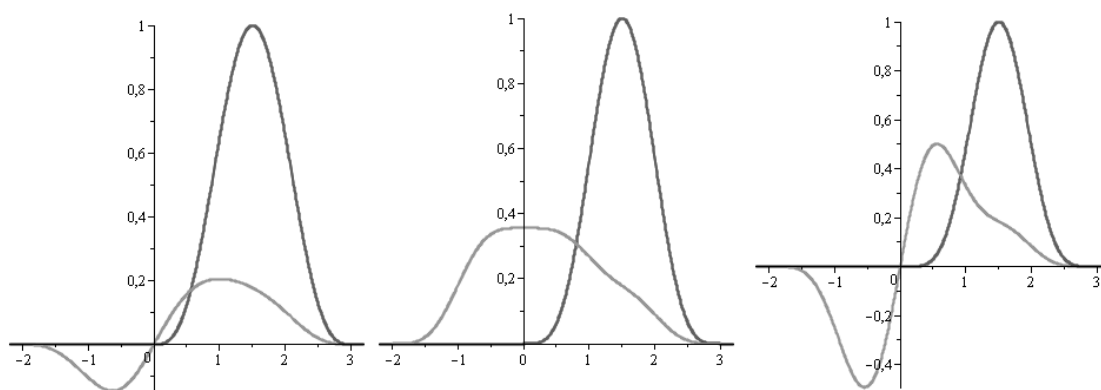
Figur 2: Plot af funktionen  $g(x) = \sin(\frac{1}{3}\pi x)\chi_{[0,3]}(x)$  og de duale generatorer  $h$  fra sætning 2.2 for  $C = 0$  (tv.) og  $C = 1$  (th.).



Figur 3: Plot af funktionen  $g(x) = \sin(\frac{4}{3}\pi x)\chi_{[0,3]}(x)$  og de duale generatorer  $h$  fra sætning 2.2 for  $C = 0$  (tv.) og  $C = 1$  (th.).



Figur 4: Plot af funktionen  $g(x) = \sin^2(\frac{1}{3}\pi x)\chi_{[0,3]}(x)$  og de duale generatorer fra sætning 2.5 med  $C = 0$  (tv.) og  $C = 1/3$  (th.).



Figur 5: Plot af funktionerne  $g(x) = \sin^\eta(\frac{1}{3}\pi x)\chi_{[0,3]}(x)$  for  $\eta = 3, 4, 5$  samt de tilhørende duale generatorer i sætning 2.5.

## A Bevis for sætning 2.2

Lad  $\eta \in \mathbb{N}$ . Vi vil karakterisere alle funktioner  $h \in \text{span}\{T_{-k}g\}_{k=0}^2$  således at  $\{E_{mb}T_n g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  og  $\{E_{mb}T_n h\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  er duale frames for  $L^2(\mathbb{R})$ . En fuldstændig repræsentation af alle funktioner  $h \in \text{span}\{T_{-k}g\}_{k=0}^2$  er givet ved

$$h(x) = r g(x) + p g(x + 1) + q g(x + 2), \quad p, q, r \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1})$$

Tydeligvis er  $g$  og dermed også  $h$  begrænset, begge har kompakt support og ligger i  $L^2(\mathbb{R})$ . For at  $\{E_{mb}T_n g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  og  $\{E_{mb}T_n h\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  er duale frames for  $L^2(\mathbb{R})$ , skal de to funktioner ifølge sætning 1.6 opfylde

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - n/b - k) h(x - k) = b \delta_{n,0}, \quad a.e. \ x \in [0, 1]. \quad (\text{A.2})$$

Da  $\text{supp } g = [0, 3]$  og  $\text{supp } h = [-2, 3]$  er (A.2) opfyldt for  $n \neq 0$  hvis  $1/b \geq 5$ , dvs.  $b \in ]0, 1/5]$ . For  $n = 0$  skal vi vise at  $g$  og  $h$  opfylder

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - k) h(x - k) = b, \quad a.e. \ x \in [0, 1]. \quad (\text{A.3})$$

Bemærk at hvis  $h$  opfylder

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - k) h(x - k) = c \neq 0, \quad a.e. \ x \in [0, 1], \quad (\text{A.4})$$

hvor  $c$  er en arbitrær konstant, så vil funktionen  $\frac{b}{c}h$  opfylde (A.3). Vi vil nu finde de funktioner  $h$  der opfylder (A.4).

Bemærk først, at da  $\text{supp } g = [0, 3]$  og  $x \in [0, 1]$ , er

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x + k) h(x + k) = \sum_{k=0}^2 g(x + k) h(x + k). \quad (\text{A.5})$$

Indsættes udtrykkende for  $g$  og  $h$  i (A.5) fås

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x + k) h(x + k) \\ &= r \sin^2\left(\frac{\eta}{3}\pi x\right) + r \sin^2\left(\frac{\eta}{3}\pi(x + 1)\right) + r \sin^2\left(\frac{\eta}{3}\pi(x + 2)\right) \\ & \quad + p \sin\left(\frac{\eta}{3}\pi x\right) \sin\left(\frac{\eta}{3}\pi(x + 1)\right) + q \sin\left(\frac{\eta}{3}\pi x\right) \sin\left(\frac{\eta}{3}\pi(x + 2)\right) \\ & \quad + p \sin\left(\frac{\eta}{3}\pi(x + 1)\right) \sin\left(\frac{\eta}{3}\pi(x + 2)\right). \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Ved brug af de trigonometriske identiteter

$$\begin{aligned}\sin^2 x + \cos^2 x &= 1, \quad \sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \cos x \sin y, \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y, \quad \sin 2x = 2 \sin x \cos x, \\ \cos 2x &= \cos^2 x - \sin^2 x, \quad 2 \sin^2 x = 1 - \cos 2x, \\ \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, \quad \cos x + \cos y = 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \\ \text{og } 2 \sin x \sin y &= \cos(x-y) - \cos(x+y)\end{aligned}$$

kan man omskrive (A.6) til

$$\begin{aligned}& \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x+k)h(x+k) \\ &= \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2}{3}\eta\pi x\right) \left[ p \sin\left(\frac{\eta}{3}\pi\right) + q \sin\left(\frac{2}{3}\eta\pi\right) \right] \\ & \quad - \frac{1}{2} \cos\left(\frac{2}{3}\eta\pi x\right) \left[ r + (-1)^\eta p + \left(2(-1)^\eta r + p\right) \cos\left(\frac{\eta}{3}\pi\right) + q \cos\left(\frac{2}{3}\eta\pi\right) \right] \\ & \quad + \frac{3}{2} r + p \cos\left(\frac{\eta}{3}\pi\right) + \frac{1}{2} q \cos\left(\frac{2}{3}\eta\pi\right).\end{aligned}\tag{A.7}$$

Højresiden i (A.7) er en linearkombination af de tre *lineært uafhængige* funktioner  $1$ ,  $\cos\left(\frac{2}{3}\eta\pi x\right)$  og  $\sin\left(\frac{2}{3}\eta\pi x\right)$ . Derfor er  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x+k)h(x+k)$  konstant, hvis og kun hvis

$$\begin{cases} 0 = p \sin\left(\frac{\eta}{3}\pi\right) + q \sin\left(\frac{2}{3}\eta\pi\right), & \text{(A.8a)} \\ 0 = r + (-1)^\eta p + \left(2(-1)^\eta r + p\right) \cos\left(\frac{\eta}{3}\pi\right) + q \cos\left(\frac{2}{3}\eta\pi\right). & \text{(A.8b)} \end{cases}$$

Da sinus- og kosinusfunktionerne er  $2\pi$ -periodiske kan vi nøjes med at løse (A.8) for  $\eta = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ . Vi betragter nu disse tilfælde separat.

**Tilfældet  $\eta = 1$ .** Ligningerne i (A.8) giver da

$$\begin{cases} 0 = p \sin\left(\frac{1}{3}\pi\right) + q \sin\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} p + \frac{\sqrt{3}}{2} q, & \text{(A.9a)} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 0 = r - p + (-2r + p) \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) + q \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} p - \frac{1}{2} q. & \text{(A.9b)} \end{cases}$$

Løsningen hertil er  $q = -p$ . Fra (A.7) får vi dermed

$$\begin{aligned}\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x+k)h(x+k) &= \frac{3}{2} r + p \cos\left(\frac{1}{3}\pi\right) - \frac{1}{2} p \cos\left(\frac{2}{3}\pi\right) = \frac{3}{2} r + \frac{3}{4} p \\ &= \frac{3}{4} (2r + p).\end{aligned}$$

Heraf følger at (A.3) har løsningerne

$$h(x) = \frac{4}{3} b(2r + p)^{-1} (rg(x) + pg(x + 1) - pg(x + 2)), \quad (\text{A.10})$$

hvor  $p, r \in \mathbb{R}, p \neq -2r$ .

**Tilfældet**  $\eta = 5$ . Ligningssystemet (A.8) bliver til

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{\sqrt{3}}{2} p - \frac{\sqrt{3}}{2} q, \\ 0 = -\frac{1}{2} p - \frac{1}{2} q. \end{array} \right. \quad (\text{A.11a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = -\frac{1}{2} p - \frac{1}{2} q. \end{array} \right. \quad (\text{A.11b})$$

Igen fås løsningen  $q = -p$ . De samme udregninger som i tilfældet  $\eta = 1$  leder atter til løsningen angivet i (A.10).

**Tilfældet**  $\eta = 3$ . Ligningssystemet (A.8) giver

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = 0, \\ 0 = 3r - 2p + q. \end{array} \right. \quad (\text{A.12a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = 3r - 2p + q. \end{array} \right. \quad (\text{A.12b})$$

Løsningen er  $r, p \in \mathbb{R}$  og  $q = -3r + 2p$ . Indsat i (A.7) giver dette at

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x+k)h(x+k) &= \frac{3}{2} r - p + \frac{1}{2} q \\ &= \frac{3}{2} r - p + \frac{1}{2} (-3r + 2p) = 0. \end{aligned}$$

I dette tilfælde er det altså ikke muligt at tilfredsstille (A.3).

Tilfældene  $\eta = 2, 4, 6$  gennemgås tilsvarende, og vi udelader detaljerne. Det viser sig, at kun for  $\eta = 1, 2, 4, 5$  kan  $g$  og  $h$  være duale generatorer for  $L^2(\mathbb{R})$ . Resultaterne kan sammenfattes til at vi for  $\eta \notin 3\mathbb{N}$  får de duale generatorer

$$h(x) = \frac{4}{3} b(2r - (-1)^\eta p)^{-1} (rg(x) + pg(x + 1) + (-1)^\eta pg(x + 2)), \quad (\text{A.13})$$

hvor  $p, r \in \mathbb{R}, p \neq (-1)^\eta 2r$ . For at omskrive disse løsninger som vist i sætningen sætter vi nu

$$C := \frac{r}{2r - (-1)^\eta p}.$$

Bemærk at hvis vi fastholder et  $r \neq 0$  og lader  $p$  gennemløbe alle reelle tal, så vil  $C$  kunne antage alle værdier i  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ . Og hvis  $r = 0$ , så er  $C = 0$ . Konstanten  $C$  kan altså antage alle reelle værdier. Bemærk ydermere, at

$$(2C - 1)(-1)^\eta = \frac{p}{2r - (-1)^\eta p}. \quad (\text{A.14})$$

Derfor kan alle duale generatorer  $h$  af den ønskede form karakteriseres ved

$$h(x) = \frac{4}{3} b \left( Cg(x) + (2C - 1)(-1)^n g(x + 1) + (2C - 1)g(x + 2) \right),$$

hvor  $C \in \mathbb{R}$ . □

## B Bevis for sætning 2.5

Inden vi går i gang med beviset for sætning 2.5 skal vi have nogle resultater omkring trigonometriske funktioner på plads.

**Lemma B.1** *Lad  $n \in \mathbb{N}$ . Så findes der koefficienter  $c_{k,n}, d_{k,n} \neq 0$  således at*

$$\begin{aligned} \sin^{2n} x &= \sum_{k=0}^n c_{k,n} \cos(2kx), \\ \sin^{2n-1} x \cos x &= \sum_{k=1}^n d_{k,n} \sin(2kx). \end{aligned} \tag{B.1}$$

**Bevis.** Vi får brug for følgende tre idenditeter. Fra [17] har vi

$$\sin^{2n} x = \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} + \frac{2}{(-4)^n} \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \binom{2n}{k} \cos((n-k)2x). \tag{B.2}$$

Endvidere kan man vise, at

$$\sin^3(x) \cos(x) = -\frac{1}{8} \sin(4x) + \frac{1}{4} \sin(2x) \tag{B.3}$$

og ved brug af bla. (B.2), at for  $n \geq 2$  gælder

$$\begin{aligned} \sin^{2n+1}(x) \cos(x) &= \frac{1}{2 \cdot (-4)^n} \sin(2(n+1)x) + \frac{n}{(-4)^n} \sin(2nx) \\ &+ \frac{1}{2 \cdot (-4)^n} \sum_{k=0}^{n-2} \left[ (-1)^k \left[ \binom{2n}{k+2} - \binom{2n}{k} \right] \sin(2(n-k-1)x) \right]. \end{aligned} \tag{B.4}$$

Det viser, at vi for ethvert  $n \in \mathbb{N}$  kan skrive

$$\begin{aligned} \sin^{2n} x &= \sum_{k=0}^n c_{k,n} \cos(2kx), \\ \sin^{2n-1} x \cos x &= \sum_{k=1}^n d_{k,n} \sin(2kx). \end{aligned} \tag{B.5}$$

Koefficienterne i (B.3) er tydeligvis forskellige fra nul. Eftersom  $\binom{n}{k} \neq 0$  for  $n \geq k \geq 0$  er det klart at at koefficienterne i (B.2) heller ikke er nul. De to første koefficienter i (B.4) er åbenlyst ikke nul. Bemærk endvidere at

$$0 = \frac{(-1)^k}{2(-4)^n} \left( \binom{2n}{k+2} - \binom{2n}{k} \right) \Leftrightarrow 0 = \binom{2n}{k+2} - \binom{2n}{k} \quad (\text{B.6})$$

$$\Leftrightarrow \frac{(2n)!}{k!(2n-k)!} = \frac{(2n)!}{(k+2)!(2n-k-2)!}.$$

Simplificeres den sidste ligning fås  $k = n - 1$ . I (B.4) antager  $k$  dog værdier fra  $k = 0$  op til  $k = n - 2$ . Koefficienten bliver derfor heller ikke nul. Vi har altså vist at alle koefficienter  $c_{k,n}, d_{k,n}$  i (B.1) er forskellige fra nul.  $\square$

**Lemma B.2** *Lad  $n \in \mathbb{N}$ . Mængden af funktioner givet ved*

$$\{ 1, \sin x \cos x, \sin^2 x, \sin^3 x \cos x, \sin^4 x, \dots, \sin^{2n-1} x \cos x, \sin^{2n} x \}$$

*er et sæt af lineært uafhængige funktioner.*

**Bevis.** Vi skal vise, at hvis

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \cdot \sin^2 x + a_2 \cdot \sin^4 x + \dots + a_n \cdot \sin^{2n} x + b_1 \cdot \sin x \cos x + b_2 \cdot \sin^3 x \cos x + \dots + b_n \cdot \sin^{2n-1} x \cos x = 0, \quad (\text{B.7})$$

så er  $a_0 = 0, a_k = b_k = 0$ , hvor  $k = 1, \dots, n$ .

Fra lemma B.1 fås, at vi for ethvert  $n \in \mathbb{N}$  kan skrive

$$\sin^{2n} x = \sum_{k=0}^n c_{k,n} \cos(2kx),$$

$$\sin^{2n-1} x \cos x = \sum_{k=1}^n d_{k,n} \sin(2kx), \quad (\text{B.8})$$

hvor alle koefficienter er forskellige fra nul. Ved brug af (B.8) kan vi omskrive (B.7) til

$$a_0 \cdot 1 + a_1 \sum_{k=0}^1 c_{k,1} \cos(2kx) + a_2 \sum_{k=0}^2 c_{k,2} \cos(2kx) + \dots + a_n \sum_{k=0}^n c_{k,n} \cos(2kx) + b_1 \sum_{k=1}^1 d_{k,1} \sin(2kx) + b_2 \sum_{k=1}^2 d_{k,2} \sin(2kx) + \dots + b_n \sum_{k=1}^n d_{k,n} \sin(2kx) = 0$$



$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow 0 &= a_0 + \sum_{k=1}^n a_k c_{0,k} \\
&+ \left( \sum_{k=1}^n a_k c_{1,k} \right) \cos(2x) + \dots + \left( \sum_{k=l}^n a_k c_{l,k} \right) \cos(2lx) + \dots + \left( \sum_{k=n}^n a_k c_{n,k} \right) \cos(2nx) \\
&+ \left( \sum_{k=1}^n b_k d_{1,k} \right) \sin(2x) + \dots + \left( \sum_{k=l}^n b_k d_{l,k} \right) \sin(2lx) + \dots + \left( \sum_{k=n}^n b_k d_{n,k} \right) \sin(2nx).
\end{aligned} \tag{B.9}$$

For ethvert  $n \in \mathbb{N}$  er mængden

$$\{ 1, \sin 2x, \cos 2x, \sin 4x, \cos 4x, \dots, \sin 2nx, \cos 2nx \}$$

et velkendt sæt af lineært uafhængige funktioner. Ligning (B.9) er derfor opfyldt, hvis og kun hvis

$$\left\{ \begin{array}{l} a_0 + \sum_{k=1}^n a_k c_{0,k} = 0, \end{array} \right. \tag{B.10a}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=l}^n a_k c_{l,k} = 0, \quad \text{hvor } l = 1, \dots, n, \end{array} \right. \tag{B.10b}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{k=l}^n b_k d_{l,k} = 0, \quad \text{hvor } l = 1, \dots, n. \end{array} \right. \tag{B.10c}$$

Lad nu  $l = n$ . Fra (B.10b) og (B.10c) får vi

$$a_n c_{n,n} = 0 \quad \text{og} \quad b_n d_{n,n} = 0.$$

Men eftersom alle  $c_{k,n}, d_{k,n} \neq 0$ , følger at

$$a_n = 0 \quad \text{og} \quad b_n = 0.$$

For  $l = n - 1$  og med  $a_n = b_n = 0$ , giver (B.10b) og (B.10c) at

$$a_{n-1} c_{n-1,n-1} + a_n c_{n-1,n} = a_{n-1} c_{n-1,n-1} = 0$$

$$b_{n-1} d_{n-1,n-1} + b_n d_{n-1,n} = b_{n-1} d_{n-1,n-1} = 0$$

Men igen, eftersom alle  $c_{k,n}, d_{k,n} \neq 0$  betyder dette at

$$a_{n-1} = 0 \quad \text{and} \quad b_{n-1} = 0.$$

Det fortsættes for  $l = n - 2, n - 3, \dots, 1$ . Endelig giver (B.10a) at  $a_0 = 0$ . □

Lemma B.2 vil blive benyttet i det følgende bevis for sætning 2.5.

**Bevis for sætning 2.5.** Lad  $\eta \in \mathbb{N}$ . Vi vil karakterisere alle funktioner  $h \in \text{span}\{T_{-k}g\}_{k=0}^2$  således at  $\{E_{mb}T_n g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  og  $\{E_{mb}T_n h\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  er duale frames for  $L^2(\mathbb{R})$ . En fuldstændig repræsentation af alle funktioner  $h \in \text{span}\{T_{-k}g\}_{k=0}^2$  er givet ved

$$h(x) = r g(x) + p g(x + 1) + q g(x + 2), \quad p, q, r \in \mathbb{R}. \quad (\text{B.11})$$

Tydeligvis er  $g$  og dermed også  $h$  begrænset, begge har kompakt support og ligger i  $L^2(\mathbb{R})$ . For at  $\{E_{mb}T_n g\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  og  $\{E_{mb}T_n h\}_{m,n \in \mathbb{Z}}$  er duale frames for  $L^2(\mathbb{R})$ , skal de to funktioner ifølge sætning 1.6 opfylde

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - n/b - k) h(x - k) = b \delta_{n,0}, \quad a.e. x \in [0, 1]. \quad (\text{B.12})$$

Supporten for  $g$  og  $h$  ligger hhv. i intervallet  $[0, 3]$  og  $[-2, 3]$ . Derfor vil (B.12) være opfyldt for  $n \neq 0$ , hvis  $1/b \geq 5$ , dvs.  $b \in ]0, 1/5]$ .

For  $n = 0$  skal vi vise at  $g$  og  $h$  opfylder

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - k) h(x - k) = b, \quad a.e. x \in [0, 1]. \quad (\text{B.13})$$

Bemærk at hvis  $h$  opfylder

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x - k) h(x - k) = c \neq 0, \quad a.e. x \in [0, 1], \quad (\text{B.14})$$

hvor  $c$  er en arbitrær konstant, så vil funktionen  $\frac{b}{c}h$  opfylde (B.13). Vi vil nu finde de funktioner  $h$  der opfylder (B.14).

Fordi  $\text{supp } g = [0, 3]$  og  $x \in [0, 1]$ , så er

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x + k) h(x + k) = \sum_{k=0}^2 g(x + k) h(x + k). \quad (\text{B.15})$$

Indsættes udtrykkende for  $g$  og  $h$  i (B.15) fås

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x + k) h(x + k) \\ &= r \sin^{2\eta} \left( \frac{1}{3} \pi x \right) + r \sin^{2\eta} \left( \frac{1}{3} \pi (x + 1) \right) + r \sin^{2\eta} \left( \frac{1}{3} \pi (x + 2) \right) \\ & \quad + p \sin^\eta \left( \frac{1}{3} \pi x \right) \sin^\eta \left( \frac{1}{3} \pi (x + 1) \right) + q \sin^\eta \left( \frac{1}{3} \pi x \right) \sin^\eta \left( \frac{1}{3} \pi (x + 2) \right) \\ & \quad + p \sin^\eta \left( \frac{1}{3} \pi (x + 1) \right) \sin^\eta \left( \frac{1}{3} \pi (x + 2) \right). \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Inden vi går videre, indfører vi følgende fire variable.

$$\begin{aligned} \alpha(m, k) &= 2(-1)^k \frac{3^m}{4^\eta} \binom{m}{k} \binom{2\eta}{2m}, \quad \beta(m, k) = (-1)^{k+m} \frac{3^m}{4^\eta} \binom{m}{k} \binom{\eta}{m}, \\ \gamma(m, k) &= (-1)^k \frac{3^m}{2^\eta} \binom{m}{k} \binom{\eta}{2m}, \quad \delta(m, k) = (-1)^k \sqrt{3} \frac{3^m}{2^\eta} \binom{m}{k} \binom{\eta}{2m+1}. \end{aligned}$$

Vi vil nu omskrive (B.16) til en linearkombination af lineært uafhængige funktioner. Bemærk først at

$$\sin\left(\frac{1}{3}\pi(x+k)\right) = \sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right) \cos\left(\frac{1}{3}\pi k\right) + \cos\left(\frac{1}{3}\pi x\right) \sin\left(\frac{1}{3}\pi k\right).$$

Ved brug af

$$(a+b)^n = \sum_{m=0}^n \binom{n}{m} a^{n-m} b^m, \text{ for } n \in \mathbb{N}$$

fås at

$$\begin{aligned} & \sin^\eta\left(\frac{1}{3}\pi(x+k)\right) \\ &= \sum_{m=0}^{\eta} \binom{\eta}{m} \left[ \sin\left(\frac{1}{3}\pi x\right) \cos\left(\frac{1}{3}\pi k\right) \right]^{\eta-m} \left[ \cos\left(\frac{1}{3}\pi x\right) \sin\left(\frac{1}{3}\pi k\right) \right]^m. \end{aligned}$$

Ved brug af dette udtryk kan man ved at betragte lige og ulige værdier for  $\eta$  separat omskrive (B.16) til

$$\begin{aligned} & \sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x+k)h(x+k) \\ &= \left[ r + \sum_{m=0}^{\eta} \left( r\alpha(m, m) + (-1)^\eta p \beta(m, m) \right) + \sum_{m=0}^{\lfloor \eta/2 \rfloor} \gamma(m, m) [p + (-1)^\eta q] \right] \sin^{2\eta}\left(\frac{1}{3}\pi x\right) \\ &+ \sum_{d=1}^{\lfloor \eta/2 \rfloor} \left( \left[ \sum_{m=d}^{\eta} \left( r\alpha(m, m-d) + (-1)^\eta p \beta(m, m-d) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \sum_{m=d}^{\lfloor \eta/2 \rfloor} \gamma(m, m-d) [p + (-1)^\eta q] \right] \sin^{2\eta-2d}\left(\frac{1}{3}\pi x\right) \right) \\ &+ \sum_{d=\lfloor \eta/2 \rfloor+1}^{\eta-1} \left( \left[ \sum_{m=d}^{\eta} \left( r\alpha(m, m-d) + (-1)^\eta p \beta(m, m-d) \right) \right] \sin^{2\eta-2d}\left(\frac{1}{3}\pi x\right) \right) \\ &+ \sum_{d=0}^{\lfloor (\eta-1)/2 \rfloor} \left( \left[ \sum_{m=d}^{\lfloor (\eta-1)/2 \rfloor} \delta(m, m-d) [p - (-1)^\eta q] \right] \sin^{2\eta-2d-1}\left(\frac{1}{3}\pi x\right) \cos\left(\frac{1}{3}\pi x\right) \right) \\ &+ r\alpha(\eta, 0) + (-1)^\eta p \beta(\eta, 0). \end{aligned} \tag{B.17}$$

Bemærk at højresiden i (B.17) er en linearkombination af funktionerne

$$\left\{ 1, \sin x \cos x, \sin^2 x, \sin^3 x \cos x, \sin^4 x, \dots, \sin^{2n-1} x \cos x, \sin^{2n} x \right\}. \tag{B.18}$$

I lemma B.2 vises at funktionerne i denne mængde er *lineært uafhængige*. Ifølge (B.14) skal nu  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x+k)h(x+k) = c \neq 0$ , *a.e.*  $x \in [0, 1]$ . Det er muligt, hvis

og kun hvis

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 = r + \sum_{m=0}^{\eta} \left( r\alpha(m, m) + (-1)^n p\beta(m, m) \right) + \sum_{m=0}^{\lfloor \eta/2 \rfloor} \gamma(m, m) [p + (-1)^n q] \quad (\text{B.19a}) \\ 0 = \sum_{m=d}^{\eta} \left( r\alpha(m, m-d) + (-1)^n p\beta(m, m-d) \right) + \sum_{m=d}^{\lfloor \eta/2 \rfloor} \gamma(m, m-d) [p + (-1)^n q] \quad (\text{B.19b}) \\ 0 = \sum_{m=d}^{\eta} \left( r\alpha(m, m-d) + (-1)^n p\beta(m, m-d) \right) \quad (\text{B.19c}) \\ 0 = \sum_{m=d}^{\lfloor (\eta-1)/2 \rfloor} \delta(m, m-d) [p - (-1)^n q] \quad (\text{B.19d}) \end{array} \right.$$

Ligning (B.19b), (B.19c) og (B.19d) skal være opfyldt for hhv. alle heltal  $d$  for hvilke  $1 \leq d \leq \lfloor \frac{\eta}{2} \rfloor$ ,  $\lfloor \frac{\eta}{2} \rfloor + 1 \leq d \leq \eta - 1$  og  $0 \leq d \leq \lfloor \frac{\eta-1}{2} \rfloor$ . Bemærk at afhængig af  $\eta$  vil (B.19b), (B.19c) og (B.19d) give et forskelligt antal ligninger og i nogle tilfælde endda ingen. Vi vil nu løse ligningsystemet (B.19) for specifikke  $\eta$ . Tilfældet  $\eta = 1$  er allerede behandlet i sætning 2.2.

**Tilfældet  $\eta = 3$ .** Ligning (B.19a) bliver til

$$0 = 3r - 2p + q. \quad (\text{B.20})$$

Ligning (B.19b) skal gælde for  $1 \leq d \leq \lfloor \frac{3}{2} \rfloor$ , altså for  $d = 1$ , og giver

$$0 = -\frac{9}{2}r + \frac{27}{8}p - \frac{9}{8}q. \quad (\text{B.21})$$

Ligning (B.19c) skal gælde for  $\lfloor \frac{3}{2} \rfloor + 1 \leq d \leq 2$ , altså for  $d = 2$ , og er

$$0 = \frac{27}{16}r - \frac{27}{16}p. \quad (\text{B.22})$$

Ligning (B.19d) skal gælde for  $0 \leq d \leq 1$ , altså for  $d = 0$  og  $d = 1$ , som giver de to ligninger

$$0 = 0, \quad 0 = \frac{3}{8}\sqrt{3}(p + q). \quad (\text{B.23})$$

De 5 ligninger har løsningen  $r \in \mathbb{R}$ ,  $p = -q = r$ . Fra (B.17) fås nu at funktionen

$$h(x) = rg(x) + rg(x + 1) - rg(x + 2) \quad (\text{B.24})$$

opfylder

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x + k)h(x + k) = r\alpha(3, 0) - p\beta(3, 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 3r. \quad (\text{B.25})$$

Dermed vil funktionen

$$h(x) = \left(\frac{4}{3}\right)^3 b \left(\frac{1}{3}g(x) + \frac{1}{3}g(x+1) - \frac{1}{3}g(x+2)\right) \quad (\text{B.26})$$

være være den éntydige løsning til (B.13) af formen (B.11).

Tilsvarende beregninger foretages for  $\eta = 2, 4$  og  $5$ , disse undlades dog her. Resultaterne ses under punkt (ii) i sætningen.

Lad os nu vise at der ikke er dualer på formen (B.11) for  $\eta \geq 6$ .

Bemærk først at hvis alle ligninger i (B.19) er opfyldt, så følger der fra (B.17) at

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x+k)h(x+k) = r\alpha(\eta, 0) + (-1)^\eta p\beta(\eta, 0) = \left(\frac{3}{4}\right)^\eta (2r+p). \quad (\text{B.27})$$

Når  $\eta \geq 6$  vil (B.19c) indeholde mindst to ligninger. Betragt de to ligninger fra (B.19c) for  $d = \eta - 1$  og  $d = \eta - 2$ , dvs.

$$p = r(\eta - 2) \quad \text{og} \quad p = -\frac{1}{6}r(\eta^2 - 11\eta + 12). \quad (\text{B.28})$$

Bemærk at begge ligninger er opfyldt hvis  $r = p = 0$ . I dette tilfælde følger dog fra (B.27), at

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} g(x+k)h(x+k) = 0. \quad (\text{B.29})$$

En skalering af  $h$  sådan at (B.13) er opfyldt er i dette tilfælde umulig. Vi må derfor kræve at

$$\eta - 2 = -\frac{1}{6}(\eta^2 - 11\eta + 12).$$

Dette er dog kun tilfældet for  $\eta = 0$  eller  $\eta = 5$ . Derfor er det ikke muligt at finde  $p, r \in \mathbb{R}$  således at alle ligninger i (B.19) er opfyldt når  $\eta \geq 6$ .  $\square$

## Litteratur

- [1] Christensen, O.: *Functions, spaces, and expansions*. Birkhäuser 2010.
- [2] Christensen, O.: *Frames and bases. An introductory course*. Birkhäuser 2007.
- [3] Christensen, O.: *Pairs of dual Gabor frames with compact support and desired frequency localization*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 20, 403–410 (2006)
- [4] Christensen, O., Kim, H.O., Kim, R.Y.: *Gabor windows supported on  $[-1, 1]$  and compactly supported dual windows*. Appl. Comp. Harm. Anal. 28, 89–103 (2010)

- 
- [5] Christensen, O., Kim, R.Y.: *On dual Gabor frame pairs generated by polynomials*. J. Fourier Anal. Appl. 16, 1–16 (2010)
  - [6] Daubechies, I.: *Ten lectures on wavelets*. SIAM, Philadelphia, 1992.
  - [7] Daubechies, I.: *The wavelet transformation, time-frequency localization and signal analysis*. IEEE Trans. Inform. Theory **36** (1990), 961–1005.
  - [8] Feichtinger, H. G. and Strohmer, T. (eds.): *Gabor Analysis and Algorithms: Theory and Applications*. Birkhäuser, Boston, 1998.
  - [9] Feichtinger, H. G. and Strohmer, T. (eds.): *Advances in Gabor Analysis*. Birkhäuser, Boston, 2002.
  - [10] Gröchenig, K. H.: *Foundations of time-frequency analysis*. Birkhäuser, Boston, 2000.
  - [11] Hernandez, E. and Weiss, G.: *A first course on wavelets*. CRC Press, Boca Raton, 1996.
  - [12] Janssen, A.J.E.M.: *The duality condition for Weyl-Heisenberg frames*. In: Feichtinger, H.G., Strohmer, T. (eds.) *Gabor analysis: Theory and Applications*, Birkhäuser, Boston, 1998.
  - [13] Jakobsen, M.S.: *Gabor frames in  $L^2(\mathbb{R})$* , DTU Fagprojekt, 2010.
  - [14] Laugesen, R.S.: *Gabor dual spline windows*. Appl. Comput. Harmon. Anal. 27, 180–194 (2009).
  - [15] Lyubarskii, Y.: *Frames in the Bargmann space of entire functions*. Adv. in Soviet Math. **11** (1992), 167–180.
  - [16] Ron, A., Shen, Z.: *Weyl-Heisenberg frames and Riesz bases in  $L^2(\mathbb{R}^d)$* . Duke Math. J. 89, 237–282 (1997)
  - [17] Spiegel, M. R.: *Mathematical Handbook of formulas and tables*, McGraw-Hill, Inc., 1993.
  - [18] Seip, K. and Wallsten, R.: *Sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space II*. J. Reine Angew. Math. **429** (1992), 107–113.
  - [19] Young, R.: *An introduction to nonharmonic Fourier series*. Academic Press, New York, 1980 (revised first edition 2001).