# Om Eulers $\gamma$, $\Gamma$ och $\pi^2/6$ ur sannolikhetsteoretisk synvinkel

***Lars Holst***

Matematiska Institutionen
Kungliga Tekniska Högskolan
10044 Stockholm
lholst@kth.se

Resultat i matematisk analys kan ibland belysas med sannolikhetsteori. Nedan studeras egenskaper hos Gammafunktionen. Resultaten är inte nya, men de sannolikhetsteoretiska härledningarna är kanske inte så välkända. Bakgrunden till våra överväganden är följande egenskap hos exponentialfördelningen: Låt $X_1, X_2, \dots$ vara oberoende exponentialfördelade stokastiska variabler alla med väntevärdet ett, dvs

$$P(X_k > x) = e^{-x}, \quad x > 0, \quad k = 1, 2, \dots .$$

Då gäller att de stokastiska variablerna $\max(X_1, \dots, X_n)$ och $\sum_{k=1}^{n} X_k/k$ har samma sannolikhetsfördelning (visas nedan i Avsnitt 3).

Vårt arbete har inspirerats av [1] och [6], men framför allt av den fascinerande framställningen i [5], avsedd för matematikstuderande och deras lärare, av Eulers konstant

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left( \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n \right) = 0.5772156649\dots ,$$

Eulers Gammafunktion

$$\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1} e^{-x}\, dx, \quad t > 0,$$

och Eulers lösning av det s.k. *Baselproblemet*, dvs den förbluffande identiteten

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Om geniet Leonhard Euler, kanske 1700-talets främste matematiker, och hans arbeten kan läsas i [2]. En med vår besläktad men mer matematisk uppsats är [4], som också innehåller en mängd referenser till Gammafunktionen.

För fullständighets skull ges i Avsnitt 2 ett bevis av existensen av gränsvärdet $\gamma$. Avsnitt 3 innehåller egenskaper hos exponentialfördelningen. Några olika representationer av Gammafunktionen härleds i Avsnitt 4. Momentgenererande funktioner och konvergens av moment studeras i Avsnitt 5. Slutligen visas reflektionsformeln för Gammafunktionen och Eulers produktformel för sinusfunktionen i Avsnitt 6.

I fortsättningen betecknar $X_1, X_2, X_3, \ldots$ oberoende exponentialfördelade stokastiska variabler alla med väntevärdet ett.

## 1 Eulers konstant.

Sätt $H_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$, $A_n = H_n - \ln n$ och $B_n = H_n - \ln(n+1)$. Eftersom $1/x$ är avtagande i $x$ så gäller

$$A_{n+1} - A_n = \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x}\,dx < 0, \quad B_{n+1} - B_n = \frac{1}{n+1} - \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{x}\,dx > 0,$$

och

$$0 < A_n - B_n = \ln(1 + 1/n) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Följaktligen konvergerar talföljderna $A_1 = 1 > A_2 > A_3 > \ldots$ och $B_1 = 1 - \ln 2 < B_2 < B_3 < \ldots$ mot samma gränsvärde, Eulers $\gamma$. Det är anmärkningsvärt att redan 1735 beräknade Euler gränsvärdet med fem korrekta decimaler, se [2, s. 137–139] och [5, s. 51, s. 89–90]. Metoder för beräkning av $\gamma$ med ett stort antal decimaler anges i [3].

## 2 Egenskaper hos exponentialfördelningen.

För en exponentialfördelad stokastisk variabel $T$ med intensitet $a$ (och väntevärdet $1/a$) gäller *minneslösheten*

$$P(T > x + y \,|\, T > x) = e^{-a(x+y)}/e^{-ax} = e^{-ay} = P(T > y), \quad x, y > 0.$$

Denna kan tolkas: Ett objekt med exponentialfördelad livslängd åldras inte.

**Sats 1** *De stokastiska variablerna* $\max(X_1, \ldots, X_n)$ *och* $\sum_{k=1}^{n} X_k/k$ *har samma sannolikhetsfördeling och för alla reella tal* $x$ *så gäller då* $n \to \infty$

$$P(\max(X_1, \ldots, X_n) - \ln n \le x) = P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k/k - \ln n \le x\right) \to e^{-e^{-x}}.$$

*Bevis.* Betrakta $n$ objekt med livslängder $X_1, \ldots, X_n$. För den kortaste livslängden gäller

$$P(\min(X_1, \ldots, X_n) > x) = P(X_1 > x) \cdots P(X_n > x) = e^{-nx}, \quad x > 0,$$

dvs samma fördelning som $X_n/n$ har. När objektet med den kortaste livslängden dör så återstår $n-1$ objekt, som alla är som nya, eftersom objekten inte åldras. Därför gäller att tiden mellan den kortaste livslängden och den nästkortaste är fördelad som $X_{n-1}/(n-1)$ och oberoende av den kortaste, etc. Följaktligen har den längsta livslängden $\max(X_1,\dots,X_n)$ samma sannolikhetsfördelning som $\sum_{k=1}^n X_k/k$ med fördelningsfunktionen

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k/k \le x\right) = P\left(\max(X_1,\dots,X_n) \le x\right)$$

$$= P(X_1 \le x)\cdots P(X_n \le x) = (1-e^{-x})^n, \quad x>0.$$

Detta ger följande konvergens då $n\to\infty$

$$P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k/k - \ln n \le x\right) = P\left(\max(X_1,\dots,X_n) - \ln n \le x\right)$$

$$= \max\left(\left(1-e^{-x}/n\right)^n, 0\right) \to \exp\left(-e^{-x}\right)$$

mot den s.k. *Gumbelfördelningen.* ■

Lägg märke till att väntevärdena konvergerar mot Eulers konstant då $n\to\infty$

$$E\left(\max(X_1,\dots,X_n) - \ln n\right) = E\left(\sum_{k=1}^{n} X_k/k - \ln n\right) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \ln n \to \gamma.$$

För en exponentialfördelad stokastisk variabel $X$ med väntevärdet ett gäller

$$P(-\ln X \le x) = P(X \ge e^{-x}) = \exp\left(-e^{-x}\right),$$

dvs $-\ln X$ är *Gumbelfördelad.*

## 3 Representationer av Gammafunktionen.

Ursprungligen studerade Euler integralen $\int_0^1 (-\ln u)^{t-1}du$, $t>0$, som erhålles genom substitutionen $x=-\ln u$ i $\Gamma(t)=\int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}dx$. Beteckningen $\Gamma(t)$ och namnet Eulers Gammafunktion infördes av Legendre, se [5, s. 53].

Man ser lätt att $\Gamma(1)=1$ och genom partiell integration att $\Gamma(t+1)=t\Gamma(t)$ för $t>0$, varav följer att $\Gamma(n+1)=n!$ för $n=0,1,2,\dots$, dvs Gammafunktionen interpolerar fakulteter. Man kan visa att Gammafunktionen är den enda logaritmiskt konvexa funktion med dessa egenskaper, jfr [5, s. 56].

För interpolering av fakulteter föreslog Euler som ett alternativ till $\Gamma(t)$

$$\lim_{r\to\infty}\frac{r!\,r^t}{t(t+1)\cdots(t+r)}, \quad t>0,$$

se [5, s. 55]. Gauss gjorde en nogrann undersökning av gränsvärdet, som ibland kallas Gauss definition av Gammafunktionen. Det är ingalunda uppenbart att detta gränsvärde och $\Gamma(t)$ definierar samma funktion.

För ickeheltal $t<0$ kan Gammafunktionen definieras rekursivt genom

$$\Gamma(t) = \Gamma(t+1)/t.$$

**Sats 2** *För* $t \neq -1, -2, -3, \ldots,$

$$\Gamma(1+t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^t}{(t+1)\cdots(t+n)} = e^{-\gamma t} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{t/k}}{1+t/k}.$$

*Bevis.* För $t > -1$ gäller

$$E\left(e^{-t\sum_{k=1}^{n} X_k/k}\right) = \prod_{k=1}^{n} E\left(e^{-tX_k/k}\right) = \prod_{k=1}^{n} \int_0^{\infty} e^{-tx/k}\, e^{-x}\, dx = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{1+t/k},$$

och

$$E(e^{-t\max(X_1,\ldots,X_n)}) = \int_0^{\infty} e^{-tx} \frac{d}{dx}(1-e^{-x})^n\, dx = n^{-t} \int_0^n y^t\, (1-y/n)^{n-1}\, dy.$$

Eftersom $\sum_{k=1}^{n} X_k/k$ och $\max(X_1,\ldots,X_n)$ har samma sannolikhetsfördelning så följer att

$$\int_0^n y^t\, (1-y/n)^{n-1}\, dy = e^{-t\left(\sum_{k=1}^{n} 1/k - \ln n\right)} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{t/k}}{1+t/k}.$$

Olikheten

$$(n-1)\ln(1-y/n) = -(n-1)\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j}\left(\frac{y}{n}\right)^j \leq -\frac{y}{2}, \quad 0 \leq y \leq n,$$

och dominerad konvergens visar att då $n \to \infty$

$$E\left(e^{-t(\max(X_1,\ldots,X_n)-\ln n)}\right) = \int_0^n y^t(1-y/n)^{n-1}dy \to \int_0^{\infty} y^t e^{-y} dy = \Gamma(1+t).$$

Alltså gäller för $t > -1$

$$\Gamma(1+t) = e^{-\gamma t} \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{t/k}}{1+t/k}$$

och

$$\lim_{n\to\infty} e^{-\gamma(t-1)} \prod_{k=1}^{n} \frac{e^{(t-1)/k}}{1+(t-1)/k}$$

$$= \lim_{n\to\infty} e^{\left(t/n+\gamma+\ln n - \sum_{k=1}^{n} 1/k\right)} \frac{e^{-\gamma t}}{t} \prod_{k=1}^{n-1} \frac{e^{t/k}}{1+t/k} = \frac{\Gamma(1+t)}{t} = \Gamma(1+t-1).$$

Därmed har vi för $t > -2$ and $t \neq -1$ att

$$\Gamma(1+t) = e^{-\gamma t} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{t/k}}{1+t/k} = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^t}{(t+1)\cdots(t+n)}.$$

Påståendet följer genom induktion. ■

Ur ovanstående sats följer Gauss representation av Gammafunktionen

$$\Gamma(t) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!\, n^t}{t(t+1)\cdots(t+n)}.$$

Vi får också Weierstrass produktgränsvärde

$$\Gamma(t) = \frac{e^{-\gamma t}}{t} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{t/k}}{1+t/k},$$

och för Psi- eller Digammafunktionen $\Psi(t) = \Gamma'(t)/\Gamma(t)$ att

$$\Psi(t) = \frac{d}{dt}\ln\Gamma(t) = -\gamma + \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+t}\right).$$

Uppenbarligen är $\Psi(t)$ växande på positive reella linjen, vilket visar den logaritmiska konvexiteten av Gammafunktionen.

Från ovanstånde formler, serieutveckling och omkastning av summationsordning får vi för $-1/2 < t < 1/2$

$$\ln\Gamma(1-t) = \gamma t + \sum_{k=1}^{\infty}(-t/k - \ln(1-t/k)) = \gamma t + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{(t/k)^\nu}{\nu} = \gamma t + \sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{\zeta(\nu)}{\nu}t^\nu,$$

där

$$\zeta(\nu) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^\nu}.$$

Se [5] för ytterligare resultat and diskussion av Zetafunktionen.

## 4 Momentgenererande funktioner.

**Sats 3** *För $t < 1$,*

$$E\left(e^{t(\max(X_1,\ldots,X_n)-\ln n)}\right) = E\left(e^{t(\sum_{k=1}^n X_k/k - \ln n)}\right) \to \Gamma(1-t), \quad n\to\infty,$$

*och för $r = 1,2,\ldots,$*

$$E\left((\max(X_1,\ldots,X_n) - \ln n)^r\right) = E\left(\left(\sum_{k=1}^n X_k/k - \ln n\right)^r\right)$$

$$\to (-1)^r\Gamma^{(r)}(1) = \int_0^\infty (-\ln x)^r\, e^{-x}\, dx, \quad n\to\infty.$$

*Bevis.* Genom att $t$ ersätta med $-t$ i beviset av Sats 2 följer första påståendet.

För $t < 1$

$$\Gamma(1-t) = \int_0^\infty y^{-t} e^{-y} dy = \int_{-\infty}^\infty e^{tx} e^{-x} \exp(-e^{-x})\, dx$$
$$= \int_0^\infty e^{-t \ln x} e^{-x}\, dx = \sum_{r=0}^\infty \frac{(-t)^r}{r!} \int_0^\infty (\ln x)^r e^{-x}\, dx.$$

Därmed följer att gränsvärdet $\Gamma(1-t)$ är momentgenererande funktion för Gumbelfördelningen $\exp(-e^{-x})$. Eftersom konvergens av momentgenererande funktioner i en omgivning av origo implicerar konvergens av alla moment, visar detta det andra påståendet. ■

Speciellt har vi då $n \to \infty$

$$E\left(\sum_{k=1}^n X_k/k - \ln n\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \to \gamma = -\Gamma'(1) = -\int_0^\infty e^{-x} \ln x\, dx,$$

jfr [1]. Eftersom $X_1, X_2, \dots$ är oberoende alla med väntevärden och varianser lika med ett fås

$$E\left(\left(\sum_{k=1}^n X_k/k - \ln n\right)^2\right) = E\left(\sum_{k=1}^n (X_k-1)^2/k^2\right) + \left(\sum_{k=1}^n 1/k - \ln n\right)^2$$
$$\to \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^2} + \gamma^2 = \Gamma''(1), \quad n \to \infty.$$

I själva verket gäller att den stokastiska serien $\gamma + \sum_{k=1}^\infty (X_k - 1)/k$ konvergerar med sannolikheten ett mot en Gumbelfördelad stokastisk variabel med väntevärdet $\gamma$ and variansen $\sum_{k=1}^\infty 1/k^2 = \pi^2/6$.

För en Gammafördelad stokastisk variabel $X_a$ med tätheten $x^{a-1}e^{-x}/\Gamma(a)$, $x > 0$, och formparametern $a > 0$, är momentgenererande funktionen

$$E\left(e^{tX_a}\right) = \int_0^\infty e^{tx} x^{a-1} e^{-x}/\Gamma(a)\, dx = (1-t)^{-a}, \quad t < 1.$$

För summan av två oberoende sådana stokastiska variabler $X_a$ and $X_b$ fås

$$E\left(e^{t(X_a+X_b)}\right) = (1-t)^{-(a+b)}, \quad t < 1,$$

vilket visar att $X_a + X_b$ gammafördelad med formparameter $a + b$. Vi har

$$E(\ln X_a) = \int_0^\infty \ln x\, x^{a-1} e^{-x}/\Gamma(a)\, dx = \Gamma'(a)/\Gamma(a) = \Psi(a).$$

Eftersom $\ln x$ är växande och $X_b > 0$

$$\Psi(a+b) = E(\ln(X_a + X_b)) > E(\ln X_a) = \Psi(a).$$

Alltså är Psifunktionen växande, vilket ger ytterligare ett bevis för den logaritmiska konvexiteten av Gammafunktionen, jfr [1].

## 5 Reflektionsformeln för Gammafunktionen och produktformeln för sinusfunktionen.

**Sats 4** *För $-1 < t < 1$,*

$$\Gamma(1+t)\Gamma(1-t) = \frac{\pi t}{\sin \pi t} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^2/k^2}.$$

*Bevis.* För $X$ and $Y$ oberoende och exponentialfördelade med väntevärde ett ger resultaten ovan att för $-1 < t < 1$

$$E(e^{-t\ln X}) = \Gamma(1-t) = e^{\gamma t} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-t/k}}{1-t/k}, \quad E(e^{t\ln Y}) = \Gamma(1+t) = e^{-\gamma t} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{e^{t/k}}{1+t/k}.$$

Av symmetri följer

$$\prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-t^2/k^2} = \Gamma(1+t)\Gamma(1-t) = E\left(e^{t(\ln Y - \ln X)}\right) = E\left((Y/X)^{|t|}\right).$$

För $u > 0$

$$P(Y/X \le u) = P(Y/u \le X) = E\left(e^{-Y/u}\right) = \int_0^{\infty} e^{-y/u} e^{-y}\, dy = u/(u+1).$$

Alltså för $-1 < t < 1$

$$E\left((Y/X)^{|t|}\right) = \int_0^{\infty} u^{|t|} \frac{d}{du}\frac{u}{u+1}\, du = \int_0^{\infty} u^{|t|}/(u+1)^2\, du$$

$$= |t| \int_0^{\infty} u^{|t|-1}/(u+1)\, du = \frac{\pi t}{\sin \pi t},$$

ur nedanstående sats, vilket visar påståendet. ■

**Sats 5** $\int_0^{\infty} u^{a-1}/(u+1)\, du = \pi/\sin \pi a$ *för $0 < a < 1$.*

*Bevis.* Genom integration i komplexa talplanet erhålls

$$\int_0^{+\infty} \frac{u^{a-1}}{u+1}\, du - 2\pi i(-1)^{a-1} + \int_{+\infty}^{0} \frac{u^{a-1}}{u+1} e^{2\pi i(a-1)}\, du = 0,$$

vilket ger

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{a-1}}{u+1}\, du\, (1 - e^{2\pi i a}) = -2\pi i\, e^{\pi i a}.$$

Alltså

$$\int_0^{\infty} \frac{u^{a-1}}{u+1}\, du = \frac{-2\pi i\, e^{\pi i a}}{1 - e^{2\pi i a}} = \frac{\pi}{\sin \pi a}.$$

■

Genom serieutveckling

$$\frac{\sin \pi t}{\pi t} = 1 - \pi^2 t^2/6 + \cdots = \prod_{k=1}^{\infty}(1 - t^2/k^2) = 1 - t^2 \sum_{k=1}^{\infty} 1/k^2 + \cdots$$

får vi på samma sätt som Euler lösningen till *Baselproblemet*

$$\zeta(2) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6},$$

jfr [2, s. 111], [5, s. 38–41] och [6].

Från Sats 4 och relationen $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ följer att produktformeln för sinusfunktionen och reflektionsformeln för Gammafunktionen

$$\sin \pi t = \pi t \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{t^2}{k^2}\right) = \frac{\pi}{\Gamma(t)\Gamma(1-t)},$$

gäller för alla $t$, jfr [5, s. 59].

**Tack.** Jag tackar Torgny Lindvall för viktiga anmärkningar och uppmuntran.

## Referenser

[1] R. Bagby, A simple proof that $\Gamma'(1) = -\gamma$, *Amer. Math. Monthly* **117** (2010) 83–85.

[2] R.E. Bradley, L.A. D'Antonio, and C.E. Sandifer, eds, *Euler at 300; An Appreciation*, Mathematical Association of America, Washington, DC, 2007.

[3] E. Chlebus, A recursive scheme for improving the original rate of convergence to the Euler–Mascheroni constant, *Amer. Math. Monthly* **118** (2011) 268–274.

[4] L. Gordon, A stochastic approach to the Gamma function, *Amer. Math. Monthly* **101** (1994) 858–865.

[5] J. Havil, *Gamma. Exploring Euler's constant*, Princeton University Press, Princeton, 2003.

[6] T. Marshall, A short proof of $\zeta(2) = \pi^2/6$, *Amer. Math. Monthly* **117** (2010) 352–353.