Normat **59**:2, 82–95 (2011)

Uppgifter

544. Lotte skriver ned $n \geq 2$ reella tal på ett papper utan att visa dem för Hans. I stället bildar hon summorna för alla möjliga talpar som kan bildas av de givna talen och visar dem för Hans. Hans får nu i uppgift att återskapa de n ursprungliga talen. För vilka värden på n har han möjlighet att lyckas?

545. På en halvcirkel med radien 1 placerar man ut punkterna $P_1, P_2, \ldots, P_n$, där $n \geq 1$ är ett udda heltal. Visa att

$$|\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_n}| \geq 1,$$

där O är halvcirkelns medelpunkt.

546. Hilde har på sin dator utarbetat ett mönster till en bordduk. Mönstret består av 150 röda, 150 blå och 150 gula cirklar. Inga cirklar skär varandra, men en cirkel kan innehålla en eller flera cirklar som i sin tur kan innehålla ytterligare cirklar. Varje blå cirkel innehåller exakt 13 gula cirklar (vi räknar här alla gula cirklar som befinner sig innanför den blå cirkeln oavsett hur cirklar i andra färger är placerade för övrigt) och varje röd cirkel innehåller exakt 5 blå cirklar och 19 gula cirklar.

Visa att det måste finnas en gul cirkel som inte innesluts i någon av de övriga 449 cirklarna.

547. Visa att talföljden av positiva heltal $\{a_n\}_1^\infty$ är entydigt bestämd av villkoren $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_4 = 12$ och $a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 \pm 1$ för $n = 2, 3, 4, \ldots$. Ange en enkel rekursionsformel för talföljden.

548. Låt P vara en punkt utanför en cirkel med medelpunkt O. Två räta linjer skär varandra i P. Den ena linjen, ℓ_1, tangerar cirkeln i punkten A. Den andra linjen, ℓ_2, skär cirkeln i ytterligare två punkter, B och C. Tangenterna till cirkeln i punkterna B och C skär varandra i punkten Q. Visa att linjerna AQ och PO skär varandra under rät vinkel.

549. (Kent Holing) Gitt fjerdegradsligningen (1) $x^4 + a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d = 0$ med rasjonale koeffisienter. La videre t_0, t_1 og t_2 være røttene til fjerdegradsligningens resolvent gitt ved (2) $t^3 - b\,t^2 + (ac - 4d)\,t - (a^2 - 4b)d - c^2 = 0$, og la $S = \{a^2 + 4(t_j - b) \mid j = 0, 1, 2\}$.

a) Hva kan sies om kvadrattall i S hvis (1) er irredusibel? Gjelder det omvendte?

Anta i b) og c) at $a = 0$ med b, c og d hele tall.

b) Forklar at for å bestemme Galois-gruppen G til den generelle versjonen av (1) ovenfor, så kan vi uten tap av generalitet anta at $a = 0$ og b, c og d er hele tall.

c) Anta at Galois-gruppen G til ligning (1) er enten Z_4 eller D_4 slik at (2) har én og bare én heltallsrot, si t_0. Hvis $c \neq 0$ så er det velkjent at en tilstrekkelig og nødvendig betingelse for $G = Z_4$ er at $(t_0 - b)\ \lambda$ er et kvadrattall der λ er lik diskriminanten til (1).

(i) Vis at den gitte betingelsen er både tilstrekkelig og nødvendig for at $G = Z_4$ ved å bruke kriteriet gitt i Normat 2003, hefte 1 på side 21 for å skille mellom Z_4 og D_4.

(ii) Vis også at for $c \neq 0$ så er $G = Z_4$ hvis og bare hvis $(t_0 - b)\ (t_0 + b)^2 - 4c^2$ er et kvadrattall.

(iii) Hva skjer når $c = 0$? Forklar!

Anta til slutt at a og b er vilkårlige jamne heltall og c og d er vilkårlige odde heltall.

d) Anta at $G \neq S_4$. Forklar at resolventen (2) har én og bare én heltallsrot, si t_0. Hva er G hvis $t_0 < b - a^2/4$? Begrunn svaret.

e) Samme spørsmål som i d) når $a = 0$, $t_0 > b$, $\lambda > 0$ og $\lambda' \nmid c$.[1] (Hva er altså G hvis $G \neq S_4$?)

(Uppgifterna 544 – 548 är olympiadproblem hämtade från tävlingar i Bulgarien, England, Ryssland och Singapore.)

Lösningar skickas senast 15 april 2012 till:
Dag Jonsson, dag@math.uu.se
Paprikagatan 8
SE-75449 Uppsala

Anm. Vi välkomnar givetvis lösningar även efter angivet datum så länge inga andra lösningar har presenterats i tidskriften.

[1]For n et positivt heltall og ikke et kvadrattall, er n' den kvadrat-frie delen av n; ellers settes $n' = 1$.

Lösningar till uppgifter i Normat 2010:1

530. Kent Holing, som föreslagit problemet, presenterar en utvidgad lösning på sidan 88.

532. (Lösning av *Hans Kaas Benner, Randers*)

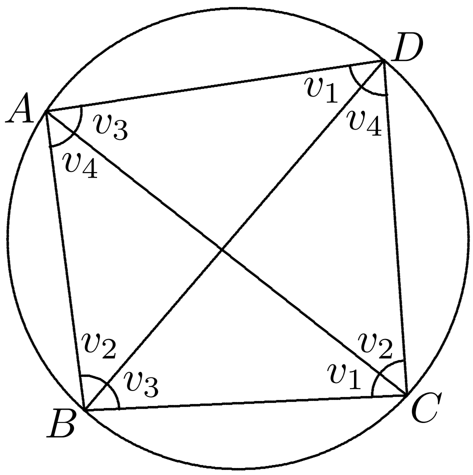

Fig. 1

Da

$$\frac{AB}{\sin v_1} = \frac{CD}{\sin v_3} = \frac{AC}{\sin (v_1 + v_4)} = \frac{BD}{\sin (v_1 + v_2)} = 2R,$$

der R er cirklens radius, er

$$|AC - BD| \leq |AB - CD|$$

ensbetydende med

$$(1) \qquad |\sin (v_1 + v_4) - \sin (v_1 + v_2)| \leq |\sin v_1 - \sin v_3|.$$

Ved anvendelse af logaritmeformlen

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \tfrac{1}{2}(\alpha - \beta) \cos \tfrac{1}{2}(\alpha + \beta)$$

bliver (1) til

$$(2) \qquad |\sin \tfrac{1}{2}(v_4 - v_2) \cos \tfrac{1}{2}(2v_1 + v_4 + v_2| \leq |\sin \tfrac{1}{2}(v_1 - v_3) \cos \tfrac{1}{2}(v_1 + v_3)|$$

eller

$$(3) \qquad |\sin \tfrac{1}{2}(v_4 - v_2) \sin \tfrac{1}{2}(v_1 - v_3)| \leq |\sin \tfrac{1}{2}(v_1 - v_3) \cos \tfrac{1}{2}(v_1 + v_3)|.$$

Hvis $v_1 = v_3$ er den indskrivelig firkant et ligebenet trapetz og der gælder lighedstegn.

Af (3) fås nu

$$|\sin \tfrac{1}{2}(v_4 - v_2)| \leq |\cos \tfrac{1}{2}(v_1 + v_3)| = |\sin \tfrac{1}{2}(v_2 + v_4)|$$

og påstanden er vist.
(Även löst av *Con Amore Problemgruppe, København*)

533. (Lösning av *Con Amore Problemgruppe*) Med $x = sz$ og $y = tz$ har vi, at $\mathrm{sfd}(s,t) = 1$. Indsættelse og forkortning med z giver $s + t^2z + z^2 = stz^2$, hvoraf det fremgår, at z går op i s; lad os sige $s = uz$ (og dermed $x = uz^2$). Heraf følger, at

$$u + t^2 + z = utz^2, \tag{1}$$

som tydeligtvis er ensbetydende med den givne ekvationen. Da t og z ikke begge kan være 1 (i en løsning til (1)), finder vi, at

$$u = \frac{t^2 + z}{tz^2 - 1}. \tag{2}$$

Vi behandler nu følgende to tilfælde hver for sig: (A) $u \geq t$, og (B) $u < t$.
(A) $u \geq t$: Ifølge (2) gælder her, at $t^2 + z \geq t^2z^2 - t$, og dermed at

$$(z^2 - 1)t^2 \leq z + t. \tag{3}$$

(A1) Vi ser først på tilfældet $z = 1$, hvor (3) jo er opfyldt. I denne situation gælder ifølge (2), at $u = \frac{t^2+1}{t-1} = \frac{t^2-1+2}{t-1} = t + 1 + \frac{2}{t-1}$, som kun er et naturligt tal for $t \in \{2, 3\}$ (som bemærket ovenfor er t og z ikke begge 1). For $t = 2$ finder vi $u = 5$; og $(u, t, z) = (5, 2, 1)$ ses let at være en løsning til (1). Svarende hertil finder vi løsningen $(x, y, z) = (5, 2, 1)$. Og for $t = 3$ finder vi $u = 5$; og $(u, t, z) = (5, 3, 1)$ ses let at være en løsning til (1). Svarende hertil finder vi løsningen $(x, y, z) = (5, 3, 1)$.

(A2) Vi ser dernæst på tilfældet $z > 1$. Det ses let, at for $z = 2$ er (3) opfyldt netop for $t = 1$. Disse værdier indsat i (2) giver $u = 1$; og omvendt ses $(u, t, z) = (1, 1, 2)$ at være løsning til (1). Svarende hertil finder vi løsningen $(x, y, z) = (4, 2, 2)$. For $z > 2$ er den positive rod i den til (3) svarende andengradsligning $(z^2 - 1)t^2 - t - z = 0$ i t bestemt ved $\alpha = \frac{1+\sqrt{1+4z(z^2-1)}}{2(z^2-1)}$, og der ses at gælde:

$$\alpha < 1 \Leftrightarrow \sqrt{1 + 4z(z^2 - 1)} < 2z^2 - 3 \Leftrightarrow 0 < z^2(z^2 - z - 3) + z + 2.$$

Da det for $z \geq 3$ gælder, at udtrykket i den sidste parentes ovenfor er positivt, fremgår, at $\alpha < 1$; og da et naturligt tal t, som indgår i en løsning til (3), højst kan være lig med α, er der altså ingen løsning til (3) med $z > 2$.

Alt i alt har vi hermed indset, at i tilfældet $u \geq t$ er der netop tre løsninger (x, y, z), nemlig (5,2,1), (5,3,1) og (4,2,2).

(B) $u < t$: Vi deler op i to tilfælde: (B1) $u < t \leq z$, og (B2) $u, z < t$.

(B1) $u < t \leq z$ (og dermed specielt $z \geq 2$): Det gælder her (jf. (1)), at $z^2+2z > utz^2$ med $ut \geq 2$, og dermed at $(ut - 1)z^2 < 2z$, dvs. at $(ut - 1)z < 2$, og dermed modstriden $z < 2$. Der findes altså ingen løsning til (1) med $u < t \leq z$.

(B2) $u, z < t$: Af (1) slutter vi, at t må være divisor i $u+z$, og følgelig at $u+z=t$. Af (1) følger videre, at $t^2+t=z^2t(t-z)$, hvoraf vi ved bortförkortning af t og indsættelse af $t=u+z$ finder, at $u(z^2-1)=z+1$, dvs. at $u(z-1)=1$, og det følger straks, at $u=1$, $z=2$ og altså $t=3$. Omvendt ses $(u,t,z)=(1,3,2)$ at være en løsning til (1), og at den tilsværende løsning er $(x,y,z)=(4,6,2)$.

Hermed er vi nået til vejs ende og har konstateret, at vi har netop fire løsninger i (x,y,z), nemlig (5,2,1), (5,3,1), (4,2,2) og (4,6,2).

(Även löst av *Kåre Vedøy, Fyllingsdalen*, som dessutom påpekar att uppgiften har förekommit i denna spalt tidigare, på 90-talet.)

536. (Lösning av *Norvald Midttun, Voss*) Med $z=x+\mathrm{i}y$, $x^2+y^2=r^2$, har vi

$$|z+a| \le a \Rightarrow 2ax+r^2 \le 0 \Rightarrow r^4 \le 4a^2x^2 \tag{1}$$

$$|z^2+a| \le a \Rightarrow a(r^4+2ar^2) \le a \cdot 4ay^2. \tag{2}$$

Det følger av (1) og (2) at $4a^2r^2 \ge r^4+ar^4+2a^2r^2$ eller $r^2 \le \frac{2a^2}{a+1} \le a^2$ (ty $a \ge 1$) $\Rightarrow |z| < a$.

(Även löst av *Con Amore Problemgruppe* och *Hans Kaas Benner*)

Lösningar till uppgifter i Normat 2010:4

537. (Lösning av *Con Amore Problemgruppe*)

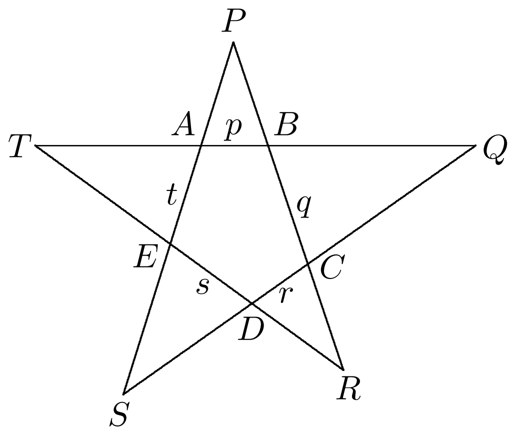

Fig. 2

Vinklen ved A i femkanten $ABCDE$ er også en vinkel i trekanten AQS (se Fig. 2), og hvis de to andre vinklen i denne trekant begge har størrelsen ν, har vinkelen ved A størrelsen $\pi - 2\nu$. Det samme gælder vinklerne ved B, C, D og E i femkanten.

Vinklerne ved A og B i trekanten ABP er begge to nabovinkler til en vinkel i femkanten og har derfor begge to størrelsen 2ν. Da vinklen ved P har størrelsen ν, blir $\nu = \frac{\pi}{5}$.

Trekanten ABP er da en ligebenet trekant med vinkler af størrelserne $\frac{\pi}{5}$, $\frac{2\pi}{5}$ og $\frac{2\pi}{5}$, og det samme gælder trekanterne BCQ, CDR, DES og EAT. Det er velkendt, at

i en sådan trekant er forholdet φ mellem ethvert af benene og grundlinien lig med $\frac{1}{2}(\sqrt{5}+1)$.
Vi har da (se Fig. 2), at

$$\begin{aligned} PR &= \varphi p + q + \varphi r \\ RT &= \varphi r + s + \varphi t \\ TQ &= \varphi t + p + \varphi q \\ QS &= \varphi q + r + \varphi s \\ SP &= \varphi s + t + \varphi p \end{aligned}$$

og dermed, at
$PR + RT + TQ + QS + SP = (2\varphi + 1)(p + q + r + s + 1)$
$= (\sqrt{5} + 2)(AB + BC + CD + DE + EA)$.
For $PR+RT+TQ+QS+SP = 1$ gælder det da, at $AB+BC+CD+DE+EA = \sqrt{5} - 2$.
(Även löst av *Hans Kaas Benner, Kåre Vedøy, Ebbe Thue Poulsen, Mårslet* och *Jørgen Olesen, Værløse*)

538. (Lösning av *Ebbe Thue Poulsen*) Lad os sætte $a = l - k$ og $b = m - k$. Så er a og b positive hele tal med $b > a$, og

$$n = \frac{lm}{k} = \frac{(k+a)(k+b)}{k} = k + a + b + \frac{ab}{k}\,,$$

der giver os dels, at $\frac{ab}{k}$ er et positivt helt tal, og altså specielt $ab \geq k$, og dels, at

$$\begin{aligned} (n-k)^2 &= \left(a + b + \tfrac{ab}{k}\right)^2 \\ &= (a-b)^2 + 4ab + \left(\tfrac{ab}{k}\right)^2 + 2(a+b)\tfrac{ab}{k} \\ &\geq 1 + 4k + 1 + 2 \times (1+2) \times 1 = 4k + 8\,, \end{aligned}$$

der er ensbetydende med det ønskede.
Der kan gælde lighedstegn, nemlig for $k = 2$, $l = 3$, $m = 4$, $n = 6$, og ikke for andre værdier af k, l, m, n.
(Även löst av *Con Amore Problemgruppe* och *Kåre Vedøy*)