Nordiska Matematiktävlingen

Måndagen den 4 april 2011
Svensk version

Skrivtid: 4 timmar. Varje problem är värt 5 poäng. Enda tillåtna hjälpmedel är skriv- och ritdon.

Problem 1

Om $a_0, a_1, \ldots, a_{1000}$ betecknar siffror, kan summan av de båda 1001-siffriga talen $a_0a_1 \ldots a_{1000}$ och $a_{1000}a_{999} \ldots a_0$ bestå av enbart udda siffror?

Problem 2

I en triangel ABC antas $AB = AC$. Låt D vara en punkt på förlängningen av sträckan BA bortom A och E en punkt på sträckan BC, så att linjerna CD och AE är parallella. Visa olikheten

$CD \geq \frac{4h}{BC} CE$, där h är höjden från A i triangeln ABC. När gäller likhet?

Problem 3

Finn alla funktioner f sådana att

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x)$$

för alla reella tal x och y.

Problem 4

Visa att det för varje heltal $n \geq 2$ gäller att summan av bråktalen $\frac{1}{ab}$, där a och b är relativt prima positiva heltal sådana att $a < b \leq n$ och $a + b > n$, är lika med $\frac{1}{2}$.

Anm. Två heltal sägs vara *relativt prima* om de saknar gemensam delare > 1.

Resultat av Nordiska matematiktävlingen 2011

I årets tävling, den 25:e i ordningen, deltog 90 gymnasieelever från de fem nordiska länderna. Rebecca Staffas från Växjö Katedralskola, SE, delade segern med Karl Erik Holter från Stabekk Vgs i Bærum, NO, och Asbjørn Nordentoft från Aurehøj gymnasium i Gentofte, DK, med 19 poäng av 20 möjliga. Det var inte särskilt överraskande att just dessa tre deltagare stod i viss särklass. I höstas segrade nämligen Rebecca i Skolornas matematiktävling, Karl Erik i Abelkonkurransen och Asbjørn i Georg Mohr-Konkurrencen.

Tävlingen var öppen för de 20 främsta deltagarna i respektive nationella tävlingar i Danmark, Finland, Island, Norge och Sverige. Tävlingen genomfördes ute på skolorna den 4 april. Det gällde att lösa fyra uppgifter under fyra timmar. Maximala poängen per uppgift var 5 poäng. Bidragen förhandsgranskades lokalt i varje land och skickades sedan till årets värdland Danmark för koordinering. Deltagarna fick diplom men för övrigt delades inga priser ut.

De 12 bästa i tävlingen:

1) Karl Erik Holter, NOR 4 – 5 – 5 – 5 19 p
1) Asbjørn Nordentoft, DEN 4 – 5 – 5 – 5 19 p
1) Rebecca Staffas, SWE 5 – 5 – 5 – 4 19 p
4) Olli Hirviniemi, FIN 5 – 2 – 5 – 4 16 p
5) Ilmari Kangasniemi, FIN 4 – 1 – 5 – 5 15 p
5) Simon Lindholm, SWE 5 – 0 – 5 – 5 15 p
7) Håvard Bakke Bjerkevik, NOR 4 – 5 – 0 – 4 13 p
7) Yue Jiao, SWE 4 – 5 – 1 – 3 13 p
9) Alex Loiko, SWE 5 – 2 – 5 – 0 12 p
10) Felix Vaura, FIN 4 – 5 – 2 – 0 11 p
10) Mathias Kristensen, DEN 5 – 4 – 2 – 0 11 p
10) Johan Henriksson, SWE 5 – 5 – 1 – 0 11 p

IMO 2011 i Amsterdam

Svensk version

Dag 1, måndagen den 18 juli 2011

Skrivtid per dag: 4 timmar och 30 minuter. Varje problem är värt 7 poäng.

Problem 1

För varje mängd $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ bestående av fyra olika positiva heltal betecknas summan $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ med s_A. Låt n_A beteckna antalet par (i, j), $1 \leq i < j \leq 4$, för vilka $a_i + a_j$ är en delare till s_A.
Finn alla mängder A bestående av fyra olika positiva heltal för vilka n_A är det största möjliga.

Problem 2

Låt $\mathcal{S}$ vara en ändlig mängd bestående av minst två punkter i planet. Anta att tre punkter ur $\mathcal{S}$ aldrig kan ligga på en och samma linje. En *väderkvarn* kallar vi här ett förfarande som börjar med en linje ℓ som går genom exakt en punkt $P \in \mathcal{S}$. Linjen ℓ roterar sedan medurs med P som *rotationscentrum* tills den för första gången stöter på ytterligare en punkt ur $\mathcal{S}$. Denna punkt, Q, tar då över som rotationscentrum och linjen roterar nu medurs runt Q, tills den för första gången passerar en annan punkt ur $\mathcal{S}$. Processen fortsätter så i all oändlighet.
Visa att man kan välja en punkt $P \in \mathcal{S}$ och en linje ℓ genom P så att den resulterande väderkvarnen använder varje punkt ur $\mathcal{S}$ oändligt många gånger som rotationscentrum.

Problem 3

Låt f vara en funktion från $\mathbb{R}$ till $\mathbb{R}$ som uppfyller

$$f(x + y) \leq yf(x) + f(f(x))$$

för alla reella tal x och y. Visa att $f(x) = 0$ för alla $x \leq 0$.

Dag 2, tisdagen den 19 juli 2011

Problem 4

Låt $n > 0$ vara ett heltal. Vi har en balansvåg med två skålar och n vikter som väger $2^0, 2^1, \ldots, 2^{n-1}$. Vikterna ska placeras på vågen, en efter en, på sådant sätt att den högra vågskålen aldrig väger mer än den vänstra. I varje steg väljer man en av de vikter som ännu inte har placerats och lägger den i den vänstra eller den högra skålen. Proceduren avslutas när alla vikter ligger på vågen.
På hur många olika sätt kan detta göras?

Problem 5

Låt f vara en funktion från mängden av alla heltal till mängden av de positiva heltalen. Anta att differensen $f(m) - f(n)$ är delbar med $f(m-n)$ för varje par av heltal, m och n.
Visa att för alla heltal m och n sådana att $f(m) \leq f(n)$, är talet $f(n)$ delbart med $f(m)$.

Problem 6

Låt ABC vara en spetsvinklig triangel med omskriven cirkel Γ. Låt ℓ vara en tangent till Γ, och låt ℓ_a, ℓ_b och ℓ_c vara de linjer som erhålles genom att spegla ℓ i linjerna BC, CA och AB, respektive.
Visa att den omskrivna cirkeln till triangeln som bestäms av linjerna ℓ_a, ℓ_b och ℓ_c tangerar cirkeln Γ.