

Gibbs' fænomen swinger i 2D

Ole Christensen, Kristian Berg Thomsen, Mads Paulsen

XXX
aaa@bbb

1 Introduktion

Gibbs' fænomen er et velkendt og overraskende problem indenfor Fourieranalyse. Overraskende fordi forskellen (“overshootet”) mellem en funktion og den tilhørende Fourierrækkes afsnitssum (i 1D) altid er ca. 9% af springet tæt ved et diskontinuitetspunkt. Overraskende var det også for fysikeren Michelson, der i 1898 byggede en maskine, der kunne plote afsnitssummen af en Fourierrække. Han så, hvad der senere ville blive kendt som Gibbs' fænomen, men var overbevist om, at afsnitssummernes “overshoot” skyldtes fejlfyldt apparatur. Imidlertid var fænomenet allerede opdaget og forklaret af Henry Wilbraham i 1848. Løbende gennem 1900-tallet er fænomenet blevet undersøgt for funktioner af to variable (f.eks. [4]), men uden den samme gennemslagskraft.

I denne artikel viser vi, at Gibbs' fænomen også finder sted for funktioner af to variable, og at “overshootet” her opfører sig meget anderledes. Vi angriber dette ved først at udlede et generelt udtryk for størrelsen af “overshootet” for Fourierrækker for funktioner af én variabel. Derefter bevæger vi os videre til funktioner af to variable, hvor vi i første omgang vil skabe et overblik over forskellene mellem diskontinuerte funktioner af én og to variable. Ved hjælp af resultaterne for funktioner af én variabel vil vi vise, at “overshootet” for funktioner af to variable langt fra er lige så simpelt som for funktioner af én variabel. Teknisk gøres dette ved at udlede et eksakt udtryk for “overshootet” for funktioner af typen $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$.

1.1 Fourierrækker for funktioner af én variabel

Vi vil starte med kort at opridse de nødvendige forudsætninger for at forstå de senere resultater. Som udgangspunkt formodes det at læseren er bekendt med generel teori for Fourierrækker for funktioner af én variabel (se [3], [5], eller eventuelt [8] for en gennemgang på norsk). Vi definerer

$$L^2(-\pi, \pi) := \left\{ f :]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2 dt < \infty \right\}.$$

For generel teori om funktionsrum som ovenstående, se [7], [2]. Til en 2π -periodisk og kvadratisk integrabel funktion f , (herefter $f \in L^2(-\pi, \pi)$) knyttes Fourierrækken

$$f \sim \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ikt}, \quad (1.1)$$

hvor Fourierkoefficienterne c_k er givet ved

$$c_k := \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} c_k e^{ikt} dt.$$

Ved den N 'te afsnitssum af Fourierrækken for f forstås den endelige sum

$$(S_N f)(t) = \sum_{k=-N}^{k=N} c_k e^{-ikt}.$$

Vedrørende Fourierrækkens konvergensforhold haves Fouriers sætning.

Sætning 1.2 (Fouriers sætning). *Lad f være en stykkevis differentiabel og 2π -periodisk funktion. Så konvergerer Fourierrækken for f punktvis for alle $t \in \mathbb{R}$. For Fourierrækkens sum gælder:*

(a) *Hvis f er kontinuert i t_0 så er,*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ikt_0} = f(t_0).$$

(b) *Hvis t_0 er et diskontinuitetspunkt for f så er,*

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k e^{-ikt} = \frac{1}{2} (f(t_0^+) + f(t_0^-)).$$

For en givet funktion er man altså ikke sikker på, at Fourierrækkens sum er lig funktionsværdien $f(t)$ for alle $t \in \mathbb{R}$, hvilket er grunden til, at vi har brugt symbolet ” \sim ” i (1.1).

2 Gibbs' fænomen for funktioner af én variabel

I dette afsnit udleder vi Gibbs' fænomen for funktioner af én variabel. Vi starter i afsnit 2.1 med at betragte funktionen $f = \chi_{[0, \pi]}$, og viser at $S_N \chi_{[0, \pi]}$ har maksimum i punktet

$$t = \frac{\pi}{N+1},$$

og at maksimumsværdien konvergerer mod 1.0895. Dette benytter vi i afsnit 2.2 til at vise Gibbs' fænomen for generelle funktioner af én variabel.

2.1 Udledning af Gibbs' fænomen

I dette afsnit udledes Gibbs' fænomen for $f = \chi_{[0, \pi]}$. Med [1] og [5] som forbillede gøres dette ved først at finde maksimum for $S_N f$ og derefter bestemme værdien i dette punkt.

Lemma 2.1. (i) Lad $N \in \mathbb{N}$, så har $S_N \chi_{[0, \pi]}$ maksimum i punktet

$$t = \tau_1 = \frac{\pi}{N + 1}.$$

(ii) I grænsen er "overshootet" i dette punkt

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left(S_N \chi_{[0, \pi]} \left(\frac{\pi}{N + 1} \right) - \chi_{[0, \pi]} \left(\frac{\pi}{N + 1} \right) \right) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \approx 0.0895.$$

Bevis. På grund af symmetri er det tilstrækkeligt at betragte intervallet $]0, \frac{\pi}{2}]$.
Fourierrækken for $\chi_{[0, \pi]}$ er

$$f(t) \sim \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n \text{ ulige}} \frac{\sin(nt)}{n} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n + 1)t)}{2n + 1}.$$

Da alle de lige Fourierkoefficienter er 0, betragter vi kun de ulige afsnitssummer for Fourierrækken.

$$S_{2N+1} \chi_{[0, \pi]}(t) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^N \frac{\sin((2n + 1)t)}{2n + 1}, \quad N = 1, 2, 3, \dots$$

Vi ønsker nu at finde maksimum af denne funktion. Vi differentierer derfor funktionen

$$S'_{2N+1}(t) = \frac{2}{\pi} (\cos(t) + \cos(3t) + \cos(5t) + \dots) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^N \cos((2n + 1)t).$$

Ved brug af Eulers formel fås

$$\begin{aligned} S'_{2N+1}(t) &= \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^N \left(e^{i(2n+1)t} + e^{-i(2n+1)t} \right) \\ &= \frac{1}{\pi} \left(e^{it} \sum_{n=0}^N (e^{i2t})^n + e^{-it} \sum_{n=0}^N (e^{-i2t})^n \right). \end{aligned}$$

Vi kan nu benytte formlen for summen af en endelig potensrække. Dette giver (da $t \in]0, \frac{\pi}{2}]$),

$$S'_{2N+1}(t) = \frac{e^{it}}{\pi} \frac{1 - e^{i2t(N+1)}}{1 - e^{i2t}} + \frac{e^{-it}}{\pi} \frac{1 - e^{-i2t(N+1)}}{1 - e^{-i2t}} = \frac{1}{\pi} \frac{e^{i2t(N+1)} - e^{-i2t(N+1)}}{e^{it} - e^{-it}}.$$

Ved at benytte Eulers formel for sinusfunktionen fås

$$S'_{2N+1}(t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{\sin((2N + 2)t)}{\sin(t)} \right). \tag{2.2}$$

For at finde lokale maksima bestemmes rødderne i ovenstående. Det ses at

$$S'_{2N+1}(t) = 0 \Leftrightarrow t = \tau_k := \frac{k\pi}{2N+2}, \quad k = 1, 2, \dots, N+1.$$

Vi betegner τ_k hvor k er ulige med τ_{ulige} og tilsvarende for k lige med τ_{lige} . Ved at differentiere S_{2N+1} en gang yderligere ses det, at $S_{2N+1}^{(2)}(\tau_{\text{ulige}})$ er negativ, og $S_{2N+1}^{(2)}(\tau_{\text{lige}})$ er positiv. Derfor findes de lokale maksima i punkterne τ_{ulige} . Ved brug af (2.2) ses at

$$\int_0^t \frac{\sin(2N+2)u}{\pi \sin u} du = \int_0^t S'_{2N+1}(u) du = S_{2N+1}(t) - S_{2N+1}(0) = S_{2N+1}(t) - \frac{1}{2}.$$

Vi får altså, at afsnitssummen kan skrives som

$$S_{2N+1}(t) = \int_0^t \frac{\sin(2N+2)u}{\pi \sin u} du + \frac{1}{2}. \quad (2.3)$$

Ovenstående udtryk kan også opnås ved brug af Dirichletkernen, men denne fremgangsmåde er valgt, for at artiklen kan læses uden forudgående kendskab til kerner.

Vi ønsker nu at bestemme hvilken τ_{ulige} , der maksimerer S_{2N+1} . I denne forbindelse er konstanten i (2.3) irrelevant. Nævneren i

$$\frac{\sin(2N+2)u}{\pi \sin u}$$

vokser monotont i intervallet $]0, \pi/2]$, mens tælleren oscillerer afhængigt af N . Det betyder, at amplituden af svingningerne af integranden i (2.3) er monotont aftagende. Derfor er størrelsen af integralerne

$$\int_{\tau_i}^{\tau_{i+1}} \frac{\sin(2N+2)u}{\pi \sin u} du, \quad i = 1, 2, \dots, N$$

også monotont aftagende. Da integranden er skiftevis positiv og negativ maksimeres det samlede integral altså ved at integrere op til det første nulpunkt τ_1 . Maksimumspunktet for S_{2N+1} findes derfor i

$$t = \tau_1 = \frac{\pi}{2N+2}.$$

Vi lader A_{2N+1} betegne maksimum af S_{2N+1} for $0 < t \leq \frac{\pi}{2}$. Da S_{2N+1} har maksimum i τ_1 , er A_{2N+1} givet ved

$$A_{2N+1} = S_{2N+1}(\tau_1) = S_{2N+1}\left(\frac{\pi}{2N+2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^N \frac{1}{2k+1} \sin\left(\frac{(2k+1)\pi}{2N+2}\right).$$

Ved at definere ξ_k og Δt_k som

$$\Delta t_k := \frac{\pi}{N+1}, \quad \xi_k := \frac{(2k+1)\pi}{2N+2}, \quad k = 0, 1, \dots, N,$$

opnå følgende udtryk

$$A_{2N+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=0}^N \frac{\sin \xi_k}{\xi_k} \Delta t_k.$$

Det sidste led er en Riemann-sum for integralet

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt.$$

Derfor gælder at

$$\lim_{N \rightarrow \infty} A_{2N+1} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \approx 1.0895.$$

Vi har hermed vist at

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left(S_N \left(\frac{\pi}{N+1} \right) - \chi_{[0,\pi]} \left(\frac{\pi}{N+1} \right) \right) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt - 1 \\ &= -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \quad \square \end{aligned}$$

Ovenstående bevis kunne have været udført tilsvarende for minimumspunktet $t = -\frac{\pi}{N+1}$. Vi har valgt maksimumspunktet, da man normalt betragter fænomenet som et “overshoot”. For generelle funktioner med diskontinuitetspunkt i t_0 , ved man ikke om afsnitssummerne har minimum eller maksimum i $t = t_0 + \frac{\pi}{N+1}$. Ikke desto mindre opstilles alle artiklens sætninger alligevel for punktet $t = t_0 + \frac{\pi}{N+1}$ da det er størrelsen på “overshootet” der er interessant. Om der er tale om et “undershoot” eller et “overshoot” er mindre væsentligt.

Bemærk at τ_k blev defineret som

$$\tau_k = \frac{k\pi}{2N+2},$$

og at dette er maksimumspunktet for S_{2N+1} , den $(2N+1)$ 'te afsnitssum af Fourierrækken. Da alle Fourierkoefficienter med lige indeks er 0, kan vi slutte, at maksimumspunktet for S_N er givet ved

$$\tau_1 := \frac{\pi}{N+1}.$$

Ovenstående definition vil blive benyttet i resten af artiklen.

2.2 Gibbs' fænomen for generelle funktioner

Ved hjælp af ovenstående udregninger for funktionen $\chi_{[0,\pi]}$ vil vi nu udlede et resultat for “overshootet” af $S_N f$ for en generel funktion f . Vi vil få brug for følgende udtryk, som vil blive brugt flittigt i resten af artiklen:

$$\tau_1 = \frac{\pi}{N+1}, \quad \delta = f(t_0^+) - f(t_0^-), \quad v = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt. \quad (2.4)$$

Følgende sætning beskriver Gibbs' fænomen for generelle funktioner.

Sætning 2.5 (Gibbs' fænomen). *Lad $f \in L^2(-\pi, \pi)$ være en funktion, der er kontinuert og stykkevis differentiable i en udprøvet omegn omkring t_0 . Så gælder:*

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} (S_N f(t_0 + \tau_1) - f(t_0 + \tau_1)) &= [f(t_0^+) - f(t_0^-)] \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} dt \right) \\ &\approx 0.0895 \cdot [f(t_0^+) - f(t_0^-)] \end{aligned}$$

Bevis. Da f er kontinuert i en udprøvet omegn om t_0 , gælder at afsnitssummerne af Fourierrækken for f opfylder at

$$(S_N f)(t_0) \rightarrow \frac{f(t_0^+) + f(t_0^-)}{2} \text{ for } n \rightarrow \infty.$$

Vi danner nu funktionen

$$h(t) = \begin{cases} f(t) - \delta \cdot \chi_{[0, \pi]}(t - t_0) & t \neq t_0 \\ f(t_0^-) & t = t_0 \end{cases}.$$

Vi bemærker, at h er kontinuert i en åben omegn om t_0 , thi

$$\begin{aligned} h(t_0^+) &= f(t_0^+) - \delta \cdot \chi_{[0, \pi]}(t_0^+ - t_0) \\ &= f(t_0^+) - (f(t_0^+) - f(t_0^-)) \chi_{[0, \pi]}(0^+) \\ &= f(t_0^+) - f(t_0^+) + f(t_0^-) \\ &= f(t_0^-). \end{aligned}$$

En tilsvarende udregning viser at $h(t_0^-) = f(t_0^-)$.

Da både $\chi_{[0, \pi]}(t - t_0)$ og f er stykkevis differentiable i en åben omegn om t_0 , må h ligeledes være det. Derfor konvergerer afsnitssummerne af Fourierrækken for h punktvis mod h i en åben omegn om t_0 .

Ved at omrokere leddene i definitionen af h fås

$$f(t) = h(t) + \delta \cdot \chi_{[0, \pi]}(t - t_0).$$

Fourierrækken for en sum af flere funktioner er blot summen af Fourierrækkerne for de enkelte funktioner. Derfor er

$$(S_N f)(t) = (S_N h)(t) + \delta \cdot (S_N \chi_{[0, \pi]})(t - t_0).$$

Fourierrækken for $\chi_{[0, \pi]}(t - t_0)$ er blot en translation af Fourierrækken for $\chi_{[0, \pi]}(t)$ (se lemma A.1, side 14). Derfor er

$$\begin{aligned} &\lim_{N \rightarrow \infty} \left((S_N f) \left(t_0 + \frac{\pi}{N+1} \right) - f \left(t_0 + \frac{\pi}{N+1} \right) \right) \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left((S_N h) \left(t_0 + \frac{\pi}{N+1} \right) + \delta \cdot (S_N \chi_{[0, \pi]}) \left(\frac{\pi}{N+1} \right) - f \left(t_0 + \frac{\pi}{N+1} \right) \right). \end{aligned}$$

Da h er kontinuert i en åben omegn om t_0 , og der eksisterer et N_0 , sådan at $t_0 + \frac{\pi}{N+1}$ er indeholdt i denne åbne omegn for $N \geq N_0$, må

$$S_N h \left(t_0 + \frac{\pi}{N+1} \right) \rightarrow h(t_0) \text{ for } N \rightarrow \infty.$$

Desuden gælder

$$t_0 + \frac{\pi}{N+1} \rightarrow t_0^+ \text{ for } N \rightarrow \infty.$$

Fra lemma 2.1 ved vi, at $\lim_{N \rightarrow \infty} (S_N \chi_{[0, \pi]}) \left(\frac{\pi}{N+1} \right) = v + 1$, og kombineres dette med ovenstående, fås

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left((S_N f) \left(t_0 + \frac{\pi}{N+1} \right) - f \left(t_0 + \frac{\pi}{N+1} \right) \right) &= h(t_0^+) + \delta \cdot (v + 1) - f(t_0^+) \\ &= f(t_0^-) + \delta \cdot (v + 1) - f(t_0^+) \\ &= -\delta + \delta \cdot v + \delta \\ &= \delta \cdot v. \end{aligned}$$

□

Vi skylder efterhånden læseren en forklaring på navngivningen af Gibbs' fænomen. Josiah Willard Gibbs var en amerikansk matematiker, der forsøgte at forklare, hvorfor Michelsons maskine ikke opførte sig som forventet. Han forsøgte af to omgange i 1898 og 1899 at forklare fænomenet, men hans fremstillinger var henholdsvis forkerte og ufuldstændige. I 1906 udgav landsmanden Maxime Bôcher en fuldstændig analyse af fænomenet og opkaldte det efter Gibbs.

På trods af at Gibbs' fremstillinger var forkerte og ufuldstændige, blev fænomenet alligevel opkaldt efter ham. Endnu mere kuriøs forekommer navngivningen, da man senere fandt ud af, at britten Henry Wilbraham havde løst problemet 50 år før, Gibbs kom med sit første fejlslagne forsøg. For flere detaljer og anekdoter om opdagelsen, se [6].

3 Gibbs' fænomen for funktioner af 2 variable

Vi vil nu bevæge os videre til funktioner af to variable. Vi vil i afsnit 3.1 diskutere nogle interessante problemstillinger vedrørende springet, der opstår, når man betragter diskontinuerte funktioner af to variable. Her viser det sig nemlig at springet i 2D ikke kan uledes af springene i 1D, og at springet ikke nødvendigvis er entydigt bestemt. Derefter vil vi i afsnit 3.2 indføre Fourierrækker for funktioner af to variable. Med Fourierrækkerne på plads er vi i stand til at analysere Gibbs' fænomen for funktioner af to variable i afsnit 3.3 .

3.1 Overvejelser angående funktioner af to variable.

For at vise kompleksiteten af Gibbs' fænomen i 2D er det som tidligere nævnt tilstrækkeligt at betragte funktioner af typen

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y). \quad (3.1)$$

Fremover er det implicit, at der med "funktioner af to variable" menes funktioner af denne type – også kaldet tensorprodukter. Tensorprodukter er valgt, fordi det giver tre klare fordele. Først og fremmest er analysen af sådanne funktioner tilstrækkelig til at indse at Gibbs' fænomen er totalt kaotisk i højere dimensioner. For det andet bliver udregningerne af Fourierkoefficienterne betydeligt nemmere (se lemma 3.5) end udregningerne af Fourierkoefficienter for generelle funktioner, der kan blive meget vanskelige. For det tredje simplificerer det nogle af de problemstillinger, man møder, når man går fra funktioner af én variabel til funktioner af to variable. For sådanne funktioner kan der nemlig højst være fire forskellige grænseværdier omkring et diskontinuitetspunkt. Man behøver således kun at bestemme grænseværdierne omkring et diskontinuitetspunkt, (x_0, y_0) fra fire forskellige retninger: (x_0^+, y_0^+) , (x_0^+, y_0^-) , (x_0^-, y_0^+) , (x_0^-, y_0^-) .

Når man undersøger diskontinuerte funktioner af to variable, er der især én ting, der springer i øjnene. Da der er op til 4 forskellige grænseværdier omkring et diskontinuitetspunkt, er springet i diskontinuitetspunktet ikke nødvendigvis entydigt defineret. Lad os illustrere denne problemstilling med et konkret eksempel.

Eksempel 3.2. Vi betragter en 2π -periodisk funktion

$$f(x, y) = \left(\chi_{[0, \pi]}(x) + 1\right) \left(\chi_{[0, \pi]}(y) + 2\right), \quad x, y \in] - \pi, \pi].$$

Vi ser, at både $\chi_{[0, \pi]} + 1$ og $\chi_{[0, \pi]} + 2$ er diskontinuerte i 0. Funktionen er plottet i Figur 1. Det fører til følgende mulige gennemløb af diskontinuitetspunktet $(0, 0)$:

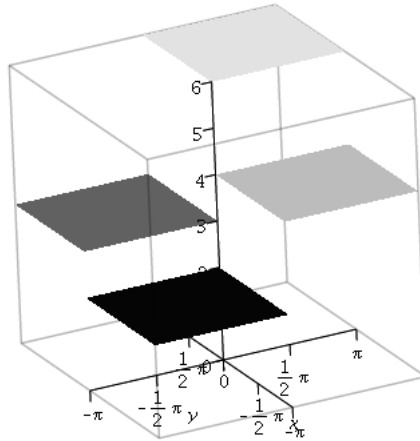
$$\begin{aligned} f(0^+, 0^+) &= 6, & f(0^-, 0^+) &= 3, \\ f(0^-, 0^-) &= 2, & f(0^+, 0^-) &= 4. \end{aligned}$$

Ved at tage differencen mellem de mulige grænseværdierne ses at springet kan være enten 1, 2, 3 eller 4, alt efter hvilken retning man gennemløber diskontinuitetspunktet i. □

For funktioner af én variabel har vi set, at der er en stærk kobling mellem "overshootet" og springet. For at kunne lave en tilsvarende kobling mellem "overshootet" og springet for funktioner af to variable er det nødvendigt at have en entydig definition af springet. Derfor vil vi nu definere springet for en funktion af to variable.

Definition 3.3. For funktioner af to variable $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ defineres springet δ som det størst mulige spring i punktet (x_0, y_0) . Dvs. som den størst mulige forskel mellem 2 af følgende 4 talstørrelser

$$f(x_0^+, y_0^+), \quad f(x_0^-, y_0^-), \quad f(x_0^+, y_0^-), \quad f(x_0^-, y_0^+).$$



Figur 1: Plot af $f(x, y) = (\chi_{[0, \pi]}(x) + 1)(\chi_{[0, \pi]}(y) + 2)$.

Det er nu relevant at tage stilling til, hvordan springet som defineret ovenfor kan udregnes. Intuitivt kunne man tro at løsningen ville være at gange springene i x - og y -retningen sammen. Det følgende eksempel viser, at dette ikke er korrekt.

Eksempel 3.4. Betragt funktionen

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y) = xy, \quad x, y \in]-\pi, \pi]$$

og udvid funktionen til en 2π -periodisk funktion i både x og y . Det vil give følgende spring for funktionerne af én variabel:

$$\delta_1 = \delta_2 = -2\pi.$$

Betragt nu det maksimale spring af f . Både f_1 og f_2 er diskontinuerte i π . Det maksimale spring finder sted i grænsen mellem punkterne (π^-, π^-) og (π^-, π^+) :

$$\delta = f(\pi^-, \pi^-) - f(\pi^-, \pi^+) = \pi^2 - (-\pi^2) = 2\pi^2.$$

Dette er tydeligvis ikke lig med:

$$\delta_1 \delta_2 = (-2\pi) \cdot (-2\pi) = 4\pi^2. \quad \square$$

3.2 Fourierrækker af funktioner af to variable

Vi tager nu fat på Fourierrækker for funktioner af to variable. Disse kan defineres helt parallelt med Fourierrækker for funktioner af én variabel. Vi indfører først

$$L^2(]-\pi, \pi]^2) := \left\{ f :]-\pi, \pi]^2 \rightarrow \mathbb{C} \mid \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x, y)|^2 dx dy < \infty \right\}.$$

Fourierrækken for en funktion $f \in L^2([-\pi, \pi]^2)$ er givet ved

$$f \sim \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{m,n} e^{i(mx+ny)},$$

hvor Fourierkoefficienterne er defineret ved

$$c_{m,n} = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x,y) e^{-i(mx+ny)} dx dy.$$

Vi definerer da den (M, N) 'te afsnitssum af Fourierrækken ved

$$(S_{M,N}f)(x,y) = \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N c_{m,n} e^{i(mx+ny)}.$$

For funktioner af den specielle type (3.1) kan afsnitssummerne beregnes som produktet af afsnitssummerne af én variabel.

Lemma 3.5. *Afsnitssummerne af Fourierrækken for en funktion,*

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f_2(y), \quad f_1, f_2 \in L^2(-\pi, \pi)$$

er givet ved

$$(S_{M,N}f)(x,y) = (S_M f_1)(x) \cdot (S_N f_2)(y).$$

Bevis. Lad $c_m, c_n, c_{m,n}$, $n, m \in \mathbb{Z}$ betegne Fourierkoefficienterne for henholdsvis f_1, f_2 og f . Da fås

$$\begin{aligned} c_{m,n} &= \frac{1}{4\pi^2} \iint f(x,y) e^{imx+iny} dx dy \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iint f_1(x) e^{imx} f_2(y) e^{iny} dx dy \\ &= \frac{1}{2\pi} \int f_1(x) e^{imx} dx \frac{1}{2\pi} \int f_2(y) e^{iny} dy \\ &= c_m \cdot c_n. \end{aligned}$$

Det er nu klart, at afsnitssummerne af Fourierrækken for f kan opskrives som et produkt af afsnitssummerne af Fourierrækkerne for f_1 og f_2

$$\begin{aligned} (S_{M,N}f)(x,y) &= \sum_{m=-M}^M \sum_{n=-N}^N c_m c_n e^{imx} e^{iny} \\ &= \sum_{m=-M}^M c_m e^{imx} \sum_{n=-N}^N c_n e^{iny} \\ &= (S_M f_1)(x) \cdot (S_N f_2)(y). \end{aligned}$$

□

3.3 Gibbs' fænomen for funktioner af to variable

For funktioner af en variabel har vi set at afsnitssummernes "overshoot" konvergerer mod v gange springets størrelse, hvor

$$v = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int \frac{\sin t}{t} dt \approx 0.0895.$$

Derfor kunne man fristes til at tro, at funktioner af to variable vil give en afsnitssum, der skyder over med v^2 af springet. Ved nærmere eftertanke er dette ikke korrekt, da v^2 er mindre end v . Vi minder læseren om at maksimum af $S_N \chi_{[0,\pi]}$ er $1+v$. Derfor må $S_{M,N} f$ for funktionen $f(x, y) = \chi_{[0,\pi]}(x) \cdot \chi_{[0,\pi]}(y)$ have maksimumsværdien $(1+v)^2$ jævnfør lemma 3.5. Forskellen mellem maksimumsværdien og funktionen bliver derfor,

$$(1+v)^2 - 1 = v^2 + 1 + 2v - 1 = v^2 + 2v \approx 0.1870. \tag{3.6}$$

For den konkrete funktion viser ovenstående ræsonnement sig at holde stik. Det viser sig dog, at for generelle funktioner er "overshootet" mere kompliceret end som så.

Eksempel 3.7. Vi betragter funktionen

$$f(x, y) = x \cdot y^3, \quad x, y \in]-\pi, \pi].$$

Vi har således $f_1(x) = x$ og $f_2(y) = y^3$, hvor begge udvides til 2π -periodiske funktioner. De har derfor begge en diskontinuitet i $x = y = \pi$, og det maksimale spring er $\delta = 2\pi^4$. Funktionen f er plottet i Figur 2 sammen med $S_{10,10}$. "Overshootet" i punktet

$$(x, y) = \left(\pi - \frac{\pi}{N+1}, \pi - \frac{\pi}{N+1} \right)$$

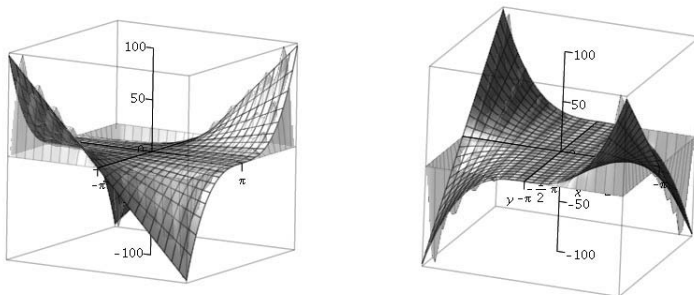
konvergerer mod 19.5% af springet. Idet 0.195 er større end $v^2 + 2v \approx 0.1870$, illustrerer det, at "overshootet" kan være større, end ræsonnementet ledte os frem til i (3.6). □

Tilsyneladende opfører Gibbs' fænomen sig altså helt uforudsigeligt for funktioner af to variable. Helt så slemt er det dog ikke. Faktisk er det muligt at opstille en konkret formel, der angiver "overshootet" for en funktion af to variable. Dette er indholdet i Sætning 3.9. Vi lader δ betegne det maksimale spring for f og vil derudover benytte følgende størrelser

$$\delta_1 = f_1(x_0^+) - f_1(x_0^-), \quad \delta_2 = f_2(y_0^+) - f_2(y_0^-), \quad \tau_1 = \frac{\pi}{N+1}. \tag{3.8}$$

Bemærk at hvis x_0 er et kontinuitetspunkt for f_1 , bliver $\delta_1 = 0$.

Nedenstående sætning er opskrevet for punktet $(x_0 + \tau_1, y_0 + \tau_1)$, men som tidligere nævnt kan et punkt gennemløbes i fire interessante retninger. Sætningen og beviset kan opskrives og udføres fuldstændig tilsvarende for de tre andre gennemløbsretninger, (x_0^+, y_0^-) , (x_0^-, y_0^+) , (x_0^-, y_0^-) .

Figur 2: f og $S_{10,10}$.

Sætning 3.9. *Betragt funktionen $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ hvor $f_1, f_2 \in L^2(-\pi, \pi)$ er stykkevis differentiable funktioner. For afsnitssummerne af Fourierrækken for funktionen f gælder følgende*

$$\begin{aligned} \lim_{M, N \rightarrow \infty} \left(S_{M, N}(x_0 + \frac{\pi}{M+1}, y_0 + \frac{\pi}{N+1}) - f(x_0 + \frac{\pi}{M+1}, y_0 + \frac{\pi}{N+1}) \right) \\ = \left(\delta_1 \delta_2 v + \delta_2 f_1(x_0^+) + \delta_1 f_2(y_0^+) \right) \cdot v. \end{aligned}$$

Bevis. Vi tager udgangspunkt i følgende udtryk:

$$\begin{aligned} \left[S_M f_1(x) - f_1(x) \right] \left[S_N f_2(y) - f_2(y) \right] \\ = f_1(x)f_2(y) + S_M f_1(x)S_N f_2(y) - f_1(x)S_N f_2(y) - f_2(y)S_M f_1(x). \end{aligned}$$

Vi betragter nu forskellen mellem afsnitssummen og funktionen, dvs. “overshootet”. Vi benytter først resultatet fra lemma 3.5, hvorefter vi benytter ovenstående omskrivning. Det giver

$$\begin{aligned} S_{M, N}(x, y) - f(x, y) \\ = S_M f_1(x)S_N f_2(y) - f_1(x)f_2(y) \\ = S_M f_1(x)S_N f_2(y) - f_1(x)f_2(y) - f_1(x)f_2(y) + f_1(x)f_2(y) \\ \quad - f_1(x)S_N f_2(y) + f_1(x)S_N f_2(y) - f_2(y)S_M f_1(x) + f_2(y)S_M f_1(x) \\ = \left[S_M f_1(x) - f_1(x) \right] \left[S_N f_2(y) - f_2(y) \right] \\ \quad - 2f_1(x)f_2(y) + f_1(x)S_N f_2(y) + f_2(y)S_M f_1(x) \\ = \left[S_M f_1(x) - f_1(x) \right] \left[S_N f_2(y) - f_2(y) \right] \\ \quad + f_1(x) \left[S_N f_2(y) - f_2(y) \right] + f_2(y) \left[S_M f_1(x) - f_1(x) \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Ved at benytte sætning 2.5 og definitionerne fra (2.4) kan vi derfor omskrive $S_M f_1 - f_1$.

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left(S_M f_1(x_0 + \tau_1) - f_1(x_0 + \tau_1) \right) = \delta_1 \cdot v.$$

Tilsvarende for $S_N f_2 - f_2$. Indsættes dette i (3.10) fås nu

$$\begin{aligned} \lim_{M, N \rightarrow \infty} \left(S_{M, N}(x_0 + \tau_1, y_0 + \tau_1) - f(x_0 + \tau_1, y_0 + \tau_1) \right) \\ = \delta_1 \delta_2 v^2 + \delta_2 v f_1(x_0^+) + \delta_1 v f_2(y_0^+) \\ = \left(\delta_1 \delta_2 v + \delta_2 f_1(x_0^+) + \delta_1 f_2(y_0^+) \right) \cdot v. \quad \square \end{aligned}$$

Eksempel 3.11. Vi vil nu illustrere sætning 3.9 med funktionen fra eksempel 3.7. Derfor udregnes følgende

$$\delta_1 = -2\pi, \quad \delta_2 = -2\pi^3, \quad \delta = 2\pi^4.$$

Dette giver at

$$\begin{aligned} \lim_{M, N \rightarrow \infty} \left(S_{M, N} f \left(\pi - \frac{\pi}{M+1}, \pi - \frac{\pi}{N+1} \right) - f \left(\pi - \frac{\pi}{M+1}, \pi - \frac{\pi}{N+1} \right) \right) \\ = \delta_1 \delta_2 v^2 - \delta_2 f_1(\pi) \cdot v - \delta_1 f_2(\pi) \cdot v \\ \approx 37.9889. \end{aligned}$$

Det ses, at “overshootet” udgør ca. $37.9889/\delta = 19.5\%$ af det maksimale spring. □

Umiddelbart virker sætning 3.9 mindre gennemskuelig end det tilsvarende resultat for funktioner af en variabel (sætning 2.5), da det ikke er klart, hvordan δ_1 , δ_2 , δ og funktionsværdierne indbyrdes sammenhæng påvirker resultatet.

Anderledes simpelt ser det ud, når mindst én af f_1, f_2 er kontinuert.

Korollar 3.12. *Betragt funktionen $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ hvor $f_1, f_2 \in L^2(-\pi, \pi)$ er stykkevis differentiable funktioner. Hvis f_2 er kontinuert gælder følgende for afsnitssummerne af Fourierrækken for funktionen f*

$$\begin{aligned} \lim_{M, N \rightarrow \infty} \left(S_{M, N} f \left(x_0 + \frac{\pi}{N+1}, y \right) - f \left(x_0 + \frac{\pi}{N+1}, y \right) \right) = f_2(y) \cdot \delta_1 v, \\ x_0, y \in]-\pi, \pi]. \end{aligned}$$

Korollar 3.13. *Betragt funktionen $f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$ hvor $f_1, f_2 \in L^2(-\pi, \pi)$ er kontinuerte og stykkevis differentiable funktioner. Så gælder følgende for afsnitssummerne af Fourierrækken for funktionen f*

$$\lim_{M, N \rightarrow \infty} \left(S_{M, N} f(x, y) - f(x, y) \right) = 0, \quad x, y \in]-\pi, \pi].$$

Her viser korollar 3.12, at “overshootet” i dette tilfælde minder meget om “overshootet” for funktioner af én variabel (sætning 2.5). Korollar 3.12 kan således ses som det bivariable modstykke til sætning 2.5. Den største forskel mellem de to sætninger er, at korollar 3.12 også kræver information om den kontinuerte funktion, idet denne skalerer “overshootet”. Det bemærkes at “overshootet” i begge tilfælde konvergerer mod springet ganget med v , når antallet af led i afsnitssummen går mod uendelig.

Vi har nu forklaret Gibbs’ fænomen for funktioner af én og to variable. Fourierrækker svinger, og det gør Gibbs’ fænomen også i 2D, alt efter hvilken funktion man betragter. Hvis vi anskaffer os 3D-briller og undersøger fænomenet påny, vil resultaterne givetvis ligne resultaterne i sætning 3.9, men med flere led.

A Lemma A.1

Lemma A.1. Hvis $f \in L^2(-\pi, \pi)$ og funktionen $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ defineres som

$$\phi(t) := f(t + u),$$

så er afsnitssummerne af Fourierrækkerne for ϕ givet ved

$$(S_N \phi)(t) = (S_N f)(t + u).$$

Bevis. For at finde en sammenhæng mellem afsnitssummerne af Fourierrækkerne for ϕ og f finder vi en sammenhæng mellem deres Fourierkoefficienter. Hvis f udvides til en 2π -periodisk funktion er Fourierkoefficienterne for ϕ veldefinerede. Disse betegner vi $\{d_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ og de er givet ved

$$d_n = \int_{-\pi}^{\pi} \phi(t) e^{-int} dt = \int_{-\pi}^{\pi} f(t + u) e^{-int} dt.$$

Variabelskiftet, $x = t + u$, giver nu

$$d_n = \int_{-\pi+u}^{\pi+u} f(x) e^{-in(x-u)} dx = e^{inu} \int_{-\pi+u}^{\pi+u} f(x) e^{-inx} dx.$$

Da integranden er 2π -periodisk integreres over en hel periode og vi kan derfor forskyde integrationsintervallet med enhver værdi, også $-u$.

$$d_n = e^{inu} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = c_n e^{inu},$$

hvor $\{c_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ er Fourierkoefficienterne for f . Heraf fås

$$(S_N \phi)(t) = \sum_{n=-N}^N d_n e^{int} = \sum_{n=-N}^N c_n e^{inu} e^{int} = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in(t+u)} = (S_N f)(t + u).$$

□

B Maple

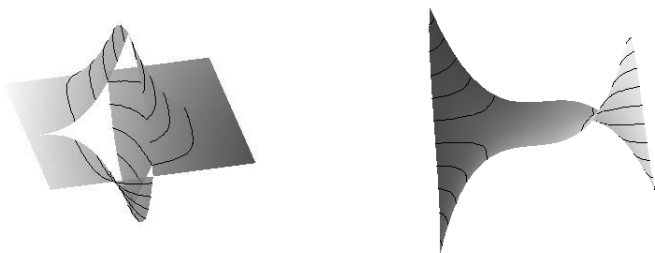
```
> restart: with(plots):
```

Definer funktionerne f_1 og f_2 på intervallet $]-\pi, \pi]$:

```
> f1:=x->arctan(x): f2:=y->y^3:
> g1:=x->piecewise(x <= Pi and x >= -Pi,f1(x),
                  x > Pi and x < 2*Pi,f1(x-2*Pi)):
g2:=y->piecewise(y <= Pi and y >= -Pi,f2(y),
                  y > Pi and y < 2*Pi,f2(y-2*Pi)):
f:=(x,y)->g1(x)*g2(y):
> epsilon:=10^(-4):
plot1:=plot3d(f(x,y),x=0..Pi-epsilon,y=0..Pi-epsilon):
plot2:=plot3d(f(x,y),x=Pi+epsilon..2*Pi,y=0..Pi-epsilon):
plot3:=plot3d(f(x,y),x=Pi+epsilon..2*Pi,y=Pi+epsilon..2*Pi):
plot4:=plot3d(f(x,y),x=0..Pi-epsilon,y=Pi+epsilon..2*Pi):
```

Et plot af funktionen omkring punktet (π, π) og et omkring punktet $(0, 0)$.

```
> plotA:=display(plot1,plot2,plot3,plot4):
plotB:=plot3d(f(x,y),x=-Pi..Pi,y=-Pi..Pi):
display(<plotA|plotB>,style=surfacecontour,transparency=0.2);
```



Figur 3

Litteratur

- [1] Bachman, George and Narici, Lawrence and Beckenstein, Edward: *Fourier and Wavelet Analysis*, Springer-Verlag, New York, 2000
- [2] Christensen, Ole: *Functions, Spaces, and Expansions - Mathematical tools in physics and engineering*. Birkhäuser, ANHA- series), 2010

- [3] Walnut, David F.: *An Introduction to Wavelet Analysis*. Birkhäuser (ANHA-series), Boston, 2002.
- [4] Ustina, Fred: *Gibbs' phenomenon for functions of two variables*. Transactions of the American Mathematical Society **129** no. 1 (1967)
- [5] Vretblad, Anders: *Fourier Analysis and Its Applications*. Springer-Verlag, New York, 2003.
- [6] Hewitt, Edwin and Hewitt, Robert E.: *The Gibbs-Wilbraham phenomenon: An episode in Fourier analysis*. Archive for History of Exact Sciences **21** no. 2 (1979), 129–160
- [7] Rudin, Walter: *Real and Complex Analysis*. McGraw-Hill, Singapore, 1986
- [8] Lindstrøm, Tom Louis and Hveberg, Klara: *Flervariabel analyse med lineær algebra*. Prentice-Hall, 2011