Hopningspunkter

Ulf Persson

Matematiska Institutionen
Chalmers Tekniska Högskola och
Göteborgs Universitet
ulfp@chalmers.se

Introduktion

Låt oss för enkelhetens skull betrakta delmängder av $\mathbb{R}$ även om det mesta som sägs går igenom i ett mycket allmännare sammanhang. Vi påminner om att en punkt p är en en hopningspunkt till en mängd X om varje öppen omgivning till p innehåller en punkt $q \in X$ (och $p \neq p$). Av definitionen följer att varje omgivning innehåller oändligt många punkter i X, men det kan mycket väl vara så att utanför varje omgivning till p finner vi bara ett ändligt antal punkter i X. Exempel är legion, det enklaste utgörandes av mängden I av inverterade heltal $1/n$. Notera att ingen av hopningspunkterna till en mängd X behöver tillhöra X. Hopningspunkterna $h(X)$ till en mängd X utgör uppenbarligen en sluten delmängd till det slutna höljet $\bar{X}$av X. Speciellt $h(I) = \{0\}$. De punkter som inte är hopningspunkter benämnes isolerade punkter. En sluten icke-tom mängd utan isolerade punkter kallas perfekt.

Vi noterar däremot att $h(X)$ mycket väl kan ha isolerade punkter, och vi kan tänka oss en kedja $\dots h^n(X) \subset h^{n-1}(X) \subset \dots h(X) \subset \bar{X}$ med strikta inklusioner och därmed den strikta inklusionen $h^\infty(X) = \cap_n h^n(X) \subset h^n(X)$. Detta kan givetvis fortsättas, via transfinita ordinaltal. Sätt $h^\omega(X) = h^\infty(X)$ och definiera $h^{\omega+1}(X) = h(h^\omega(X))$ och $h^{2\omega}(X) = \cap_n h^{\omega+n}(X)$ o.s.v. utan att processen någonsin kommer att stabiliseras utom i de fall det slutar med tomma mängden. Det lär vara så Cantor kom in på mängdlära genom att successivt ta bort isolerade punkter från en mängd. Vi har givetvis att $h^2(I) = \emptyset$ och definierar vi induktivt $I_{n+1} = \cup_n(\frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} I_n)$ finner vi att $h(I_{n+1}) = I_n$. (Där $a + bX$ betecknar bilden av X under den linjära avbildningen $x \mapsto a + bx$)

Starka hopningspunkter

En punkt p säges vara en stark hopningspunkt till en mängd X om och endast om varje omgivning till p innehåller ett överuppräkneligt antal punkter i X. Vi har följande fundamentala lemma vars bevis liksom de efterföljande argumenten bygger på att en uppräknelig union av uppräkneliga mängder är fortfarande uppräknelig.

Lemma: *Varje överuppräknelig mängd X innehåller en stark hopningspunkt.*

Antag att så inte är fallet. Vi kan då hitta ett n så att alla intervallen $(x-\frac{1}{n}, x+\frac{1}{n})$ endast innehåller ett uppräkneligt antal punkter i X för en överuppräknelig mängd X_0 av $x \in X$. Tallinjen kan skrivas som en uppräknelig union av intervall av längd $\frac{1}{n}$. Åtminstone ett av dessa intervall innehåller ett överuppräkneligt antal element ur X_0. Tag ett av dessa, de korresponderande intervallet kommer innehålla en överuppräknelig delmängd av X_0 (och således av X).

Korrolarium: *Varje överuppräknelig mängd innehåller ett överuppräkneligt antal starka hopningspunkter.*

Om det bara finns ett uppräkneligt antal starka hopningspunkter kommer komplementet vara överuppräkneligt och därmed innehålla en stark hopningspunkt.

Som vi noterat kan en hopningspunkt vara isolerad bland mängden av hopningspunkter. Detta gäller inte för starka hopningsunkter. Om vi betecknar mängden av starka hopningspunkter till X med $H(X)$ gäller

Sats: $H(H(X)) = H(X)$

Låt p vara en stark hopningspunkt. Vi inser att för varje n kan vi finna ett $m > n$ så att snittet av X med mängden $\{x : \frac{1}{m} < |x-p| < \frac{1}{n}\}$ är överuppräknelig ty snittet med $\cup_m\{x : \frac{1}{m} < |x-p| < \frac{1}{n}\}$ är överuppräkneligt. Enligt korrolariet ovan innehåller denna därmed ett överuppräkneligt antal starka hopningspunkter.

För att 'sluta cirkeln' noterar vi att

Sats: *Varje punkt till en perfekt mängd är en stark hopningspunkt.*

Givet ett godtyckligt intervall som innehåller en punkt p kan vi finna distinkta punkter p_0, p_1 som också är hopningspunkter. Vi kan nu välja disjunkta intervall som innehåller p_0 och p_1 respektive och välja p_{00}, p_{01} och p_{10}, p_{11} respektive. För varje ändlig sekvens s av nollor och ettor kan vi således definiera p_s. För oändliga sekvenser betraktar vi helt enkelt gränsvärdet av de punkter som ges av de ändliga trunkationerna. På grund av att X är sluten måste de tillhöra X och det finns ett överuppräkneligt antal av dessa.

Korrolarium: *Varje sluten uppräknelig mängd har isolerade punkter, och den transfinita processen att avlägsna dessa leder slutligen till tomma mängden.*

Det första påståendet är uppenbart. För det andra observera att om processen avslutas med en icke-tom mängd är denna en perfekt delmängd.

Korrolarium: *Varje sluten mängd har en perfekt delmängd vars komplement är uppräkneligt.*

Slutligen noterar vi att alla påstående förblir sanna för varje separabelt topologiskt rum, d.v.s. ett med en uppräknelig bas av öppna mängder. Däremot för $\mathbb{R}$ noterar vi följande struktursats, som vi av utrymmesskäl inte visar, men som är lätt att inse.

Sats: *Varje kompakt delmängd av $\mathbb{R}$ utan såväl isolerade punkter som inre punkter är homeomorf med Cantormängden.*