Uppgifter

550. *(Sture Sjöstedt, Hallsberg, SE)* a) Punkterna $(0,0)$, $(0,1)$ och $(1,3)$ är inprickade i ett rätvinkligt uv-system. Vilka koordinater får dessa punkter i ett rätvinkligt xy-system som är inlagt i uv-systemet så att $v = 5 - u$ blir y-axel och $v = u - 1$ blir x-axel?

b) Vilka koordinater i xy-systemet får de tre startpunkterna när de speglas i y-axeln? Visa att dessa punkter jämte de tre startpunkterna ligger på en ellips och bestäm dess ekvation. Ange ekvationen för den minsta ellips på formen $x^2/a+y^2/b=1$ som har tolv punkter med heltalskoordinater (x,y). Ange ekvationen för en ellips som har arton punkter med heltalskoordinater.

551. *(Kent Holing, Trondheim, NO)* En noe tilårskommen matematiker (han har i alle fall feiret sin 40. års dag) er født på en dag og i et år som begge er primtall. Og, ikke bare det, han er født i en uke med et ukenummer som også er et primtall. Og, om det ikke skulle være nok, så er han i tillegg født på en dag som er et odde tall, og i en uke med det maksimalt mulige ukenummer vi kan ha. (Alt i alt er vel dette ikke verst for en tallteoretiker!)

a) Når er matematikeren født? Angi dette så presist som mulig med dag, måned og år. Matematikeren har en venn (også matematiker!) som har fødselsdag i januar og som oppfyller de samme krav som ovenfor unntatt at dagen han er født på ikke nødvendigvis er et odde tall.

b) Når er vennen født? Angi dette like presist som i a)! Løs oppgaven i det vi antar at ukenummereringen følger ISO-standarden selv om vi regner noe tilbake i tid, se *http://no.wikipedia.org/wiki/Ukenummer*

552. På en webbsida för matematiska problem visas vid tolvslaget på nyårsafton två heltal, 19 och 98. En gång i minuten byts sedan de båda talen ut så att varje nytt tal erhålles ur det föregående antingen genom kvadrering eller genom att lägga till 1. Kan det någon gång i framtiden inträffa att de båda talen på sidan är lika?

553. Visa att det för varje heltal $n \geq 3$ existerar två udda positiva heltal x_n och y_n sådana att

$$7x_n^2 + y_n^2 = 2^n.$$

554. Låt A, B och C vara vinklarna i en triangel. Visa att

$$\tan^2(A/2) + \tan^2(B/2) + \tan^2(C/2) \geq 1.$$

555. *(Kent Holing)* Gitt a, b, c og A rasjonale tall med $A > 0$.

a) Vis at det alltid finnes minst et reelt tall x slik at en trekant med sidelengder $x + a$, $x + b$ og $x + c$ og areal A eksisterer.

b) La én av a, b eller c være lik gjennomsnittet av de to andre. Vis da at trekanter som i a) alltid kan konstrueres med bare bruk av passer og linjal.

c) Gi et eksempel på b) med x et irrasjonalt tall!

d) (Svar ukjent.) Finnes det rasjonale tall a, b, c og A ($A > 0$), der $(a+b-2c)(a+c-2b)(b+c-2a) \neq 0$, og et irrasjonalt tall x slik at en trekant med areal A og sidelengder $x + a$, $x + b$ og $x + c$ kan konstrueres? Begrunn svaret!

(Uppgifterna 552 och 553 är olympiadproblem hämtade från tävlingar i Ryssland och Bulgarien.)

Lösningar skickas senast 15 november 2013 till:

Dag Jonsson, dag@math.uu.se
Paprikagatan 8
SE-75449 Uppsala

Anm. Vi välkomnar givetvis lösningar även efter angivet datum så länge inga andra lösningar har presenterats i tidskriften.

Lösningar till uppgifter i Normat 2008:3-4, 2010:4 och 2011:2

507. (*Förslagsställaren, Kent Holing, Trondheim*)

Oppgaven ble gitt i 2008, så det er snakk om 17. mai og 1. mai sammenfallende med Kristi himmelfartsdag i henholdsvis 2007 og 2008. Vi skal vise at noe slikt ikke har skjedd tidligere så lenge 1. mai har vært offisiell høytidsdag i Norge.[1]

Hvis Kristi himmelfartsdag faller sammen med enten 1. mai eller 17. mai to år etter hverandre, så må 17. mai inntreffe først etterfulgt av 1. mai året etter, Hvorfor er det slik? Hvis 1. mai er Kristi himmelfartsdag er det på en torsdag. Vi kan da lett vise at 17. mai året etter enten faller på en søndag eller mandag (det siste hvis skuddår), og slik ikke kan være Kristi himmelfartsdag, som jo alltid er på en torsdag.

Kristi himmelfartsdag er en bevegelig helligdag som kommer 39 dager etter påskesøndag. Algoritmer for å bestemme påsken er velkjent. Kalenderfunksjonene i en symbolsk matematikkpakke som Mathematica® gjør det enkelt å bestemme datoen for Kristi himmelfartsdag for et gitt årstall. Dette gjør det lett å generere eksempler på årspar $Y-1/Y$ som det Kalle klager over både bakover og framover i tid. Hva kjennetegner årstallene vi etterspør? Mathematica gir at mellom 1700 og 2300 inntreffer dette bare i årene 1703/1704, 1787/1788, 1855/1856, 2007/2008, 2159/2160 og 2227/2228. Vi ser at for alle disse årene $Y-1/Y$ er Y skuddår med tilhørende påskesøndag den 23. mars, som er den nest tidlige mulige påske som kan forekomme. Dette, og det omvendte, gjelder generelt.[2]

Seneste mulighet for det Kalle opplevde før 2007/2008 opptrer altså i 1855/1856. I 1855 falt da Kristi Himmelfartsdag sammen med 17. mai, og i 1856 sammen med 1. mai. Men, da 1. mai ble offisiell høytidsdag først fra 1890 av i Norge (17. mai startet vi i Norge med fra 1836),[3] så har det vi spør etter ikke skjedd tidligere enn i 2007/2008. Neste gang noe slikt inntreffer igjen er først i 2159/2160 hvis da både 1. mai og 17. mai fremdeles er høytidsdager i Norge, slik at Kalle slipper nok å irritere seg over dette flere ganger.[4]

[1] Kalle irriterte seg også over at 17. mai falt på en lørdag i tillegg i 2008. I et år Y med Kristi himmelfartsdag den 1. mai og Kristi himmelfartsdag den 17. mai året før, så må 17. mai år Y falle på en lørdag. (Dette er trivielt.)

[2] Se http://mathforum.org/kb/message.jspa?messageID=6204204&tstart=0 for detaljer.

[3] Se http://no.wikipedia.org/wiki/Helligdager-i-Norge.

[4] I år (2012) faller også 17. mai og Kristi himmelfartsdag på samme dag. Siden 17. mai har vært offisiell høytidsdag har dette skjedd 7 ganger tidligere. At 1. mai faller på samme dag som Kristi himmelfartsdag har skjedd kun 2 ganger siden 1. mai ble offentlig høytidsdag.

515. (*Förslagsställaren, Kent Holing*)
Vi antar at fjerdegradsligningen er gitt ved

$$(1) \qquad Q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad \text{for} \quad a, b, c \quad \text{og} \quad d \quad \text{heltall.}$$

La videre røttene til (Lagrange) resolventen

$$(2) \qquad R(t) = t^3 - bt^2 + (ac - 4d)t + 4bd - a^2d - c^2 = 0$$

til ligning (1) være r_0, r_1 og r_2.
I tilfellet med $G = Z_4$ eller $G = D_4$ kan vi anta at røttene x_1, x_2, x_3 og x_4 til (1) er nummerert slik at $r_0 = x_1x_2 + x_3x_4$ er den eneste heltallsroten til (2). La videre $\lambda_1 = a^2 + 4(r_0 - b)$ og $\lambda_2 = r_0^2 - 4d$ være definert, og la λ være lik diskriminanten til ligning (1). Fra elementær Galois-teori er det da velkjent at i Z_4/D_4-tilfellet for (1), så er G syklisk hvis og bare hvis (heretter hviss) $\lambda_1\lambda$ er et kvadrattall når $\lambda_1 \neq 0$, og (1) er syklisk hviss $\lambda_2\lambda$ er et kvadrattall når $\lambda_1 = 0$ (da er $\lambda_2 \neq 0$, se nedenfor). (Se teorem 13.1.1 i David A. Cox: Galois Theory, Wiley, 2004.) I oppgave 549 i hefte 2 av Normat 2011 blir vi bedt om å vise dette i tilfellet med $a = 0$.[5] Siden

$$(3) \quad Q(x) = (x^2 + \tfrac{1}{2}(a - \sqrt{\lambda_1})x + \tfrac{1}{2}(r_0 - \sqrt{\lambda_2}))(x^2 + \tfrac{1}{2}(a + \sqrt{\lambda_1})x + \tfrac{1}{2}(r_0 + \sqrt{\lambda_2}))$$

er det lett å vise det det er spurt om. Faktoriseringen (1) følger direkte av at $\lambda_1 = (x_1 + x_2 - x_3 - x_4)^2$ og $\lambda_2 = (x_1x_2 - x_3x_4)^2$.
1) Anta at (1) har syklisk Galois-gruppe og er irredusibel. Vi skal vise at (3) faktoriserer over $Q[\sqrt{\lambda}]$ som påstått i oppgaven:
Merk først at λ_1 og λ_2 ikke kan begge være lik 0 samtidig. (Hvis så var tilfelle, ville (1) ikke være irredusibel.) Er $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, så er $\lambda_1\lambda_2 = (r_0a - 2c)^2$ et kvadrattall,[6] og derfor er $Q[\sqrt{\lambda_1}] = Q[\sqrt{\lambda_2}] = Q[\sqrt{\lambda}]$. Koeffisientene i faktoriseringen er derfor alle elementer i $Q[\sqrt{\lambda}]$. Er $\lambda_1 = 0$, så inneholder (3) bare $\sqrt{\lambda_2}$ (utenom rasjonale koeffisienter), men $\sqrt{\lambda_2} \in Q[\sqrt{\lambda}]$ siden $\lambda_2\lambda \neq 0$ da jo er et kvadrattall. Tilsvarende gjelder hvis $\lambda_2 = 0$. I alle tilfeller gir derfor (3) at (1) har to moniske (irredusible) andregradsfaktorer med koeffisienter i $Q[\sqrt{\lambda}]$, noe som skulle vises.
2) Anta det omvendte. Vi skal vise at G er syklisk:
Resolventen må ha minst én heltallsrot da alle røøttene til (1) er klassisk konstruerbare da kun kvadratrøtter trengs for å uttrykke røttene. Vi vet også at diskriminanten ikke er et kvadrattall (ellers faktoriserer jo ligningen over Q). Vi har derfor at Galois-gruppen er enten Z_4 eller D_4 da (1) er irredusibel. Men, da gir (3)

[5] For en fjerdegradsligning med rasjonale koeffisienter vil det for bestemmelse av Galois-gruppen til ligningen være uten tap av generalitet å anta at ligningen er på form $x^4 + bx^2 + cx + d = 0$ for b, c og d heltall. (Hvorfor?)

[6] Vi har at $\lambda_1\lambda_2 = (r_0a - 2c)^2 + 4R(r_0) = (r_0a - 2c)^2$ siden $R(r_0) = 0$. Andre egenskaper for λ_1 og λ_2: La $R_D(t) = R(t - \alpha)$ være (den såkalte Descartes) resolventen til $Q(x - a/4) = 0$. Merk at $\lambda_1 = 0$ hviss $c = -\alpha a/2$ siden $R_D(\lambda_1/4) = R(r_0) = 0$ for $\alpha = a^2/4 - b$; og siden $\lambda_1\lambda_2 = (r_0a - 2c)^2$, så er $\lambda_1\lambda_2 = 0$ hviss R(2c/a) = 0 for $a \neq 0$. Vi har også at $\lambda_2 = 0$ hviss $d = c^2/a^2$ for $a \neq 0$. (Merk at for $a \neq 0$, har vi at $R(2c/a) = 0$ hviss $(c + \alpha a/2)(c^2 - a^2d) = 0$.) Og, $\lambda_2 \neq 0$ for $a = 0$ (hvis ikke, så er $c = 0$ og derfor $\lambda_1 = 0$). Videre gjelder at hvis $\lambda_1\lambda_2 \neq 0$, så er både λ_1 og λ_2 ikke kvadrattall. Dette følger av (3) og at (1) er irredusibel. Til slutt, hvis konstantleddene i (3) er rasjonale tall, så må $\lambda_2 = 0$ når (1) er irredusibel (hvorfor?).

og Cox-kritieriet for syklisitet ovenfor at (1) har Galois-gruppe lik Z_4, som jo er syklisk.

539. (*Ebbe Thue Poulsen, Mårslet, DK*)
For enhver permutation $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ af $\{1, 2, \ldots, n\}$ er

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = 1 + 2 + \cdots n = \frac{n(n+1)}{2} .$$

Heraf ses, at hvis det n'te ”trekantstal” $T_n = n(n+1)/2$ er et kvadrattal, så er enhver permutation af $\{1, 2, \ldots, n\}$ kvadratisk.
Vi skal vise, at der omvendt gælder, at hvis T_n ikke er et kvadrattal, så findes der en permutation af $\{1, 2, \ldots, n\}$, som ikke er kvadratisk.
Lad Q betegne mængden af de positive hele tal n, således at T_n er et kvadrattal. Simpel efterprøvning viser, at $Q \cap \{1, 2, \ldots, 100\} = \{1, 8, 49\}$.
Vi har

$$f(x) = \begin{cases} n\,\frac{n+1}{2} & \text{hvis } n \text{ er ulige,} \\ \frac{n}{2}\,(n+1) & \text{hvis } n \text{ er lige,} \end{cases}$$

og i alle tilfælde er de to faktorer i T_n indbyrdes primiske. Altså er T_n et kvadrattal, hvis og kun hvis de to faktorer i T_n begge er kvadrattal, dvs.
for n ulige: hvis $n = x^2$ og $n + 1 = 2y^2$, og
for n lige: hvis $n + 1 = x^2$ og $n = 2y^2$.
Heraf ses let, at $n \in Q \Rightarrow n + 1 \notin Q$, en observation, som vi får brug for i det følgende.
Antag nu $n \notin Q$. Vi skal bevise, at der findes en permutation af $\{1, 2, \ldots, n\}$, som ikke er kvadratisk, og dertil betragter vi permutationen bestemt ved

$$a_n = \begin{cases} n+1, & \text{hvis } n \in Q, \\ n-1, & \text{hvis } n-1 \in Q, \\ n & \text{ellers .} \end{cases}$$

Denne permutation ombytter tal i Q med deres efterfølger og lader alle andre tal blive på deres naturlige plads, og den er veldefineret, da $n \notin Q$.
Eksempel: For $n = 10$ betragter vi altså permutationen

$$(a_1, a_2, \ldots, a_{10}) = (2, 1, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 8, 10).$$

For den således konstruerede permutation af $\{1, 2, \ldots, n\}$ har vi

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_k = \begin{cases} T_k, & \text{hvis } k \notin Q, \\ T_k + 1, & \text{hvis } k \notin Q, \end{cases}$$

og følgelig er permutationen ikke kvadratisk.

En parameterfremstilling for Q

Ifølge det foregående er Q bestemt ved, at $n \in Q$ hvis og kun hvis der eksisterer positive hele tal x, y, således at enten

$$\begin{aligned} &n \,\text{er ulige}, n = x^2, n+1 = 2y^2, \text{ eller} \\ &n \,\text{er lige}, n = 2y^2, n+1 = x^2. \end{aligned}$$

Tallene i Q bestemmes altså af løsningerne (x_k, y_k) til Pell's ligning

$$x^2 - 2y^2 = 1 \tag{1}$$

og den beslægtede ligning

$$x^2 - 2y^2 = -1 \tag{2}$$

Af teorien for Pell's ligning følger, at løsningerne (x_k, y_k) til (1) og (2) fås af formlen

$$x_k + y_k\sqrt{2} = \left(1+\sqrt{2}\right)^k, \; k = 1, 2, \dots, \tag{3}$$

hvor (x_k, y_k) er løsning til (2) for k ulige og til (1) for k lige.
Af (3) fås

$$x_k - y_k\sqrt{2} = \left(1-\sqrt{2}\right)^k,$$

og følgelig

$$x_k = \frac{1}{2}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^k + \left(1-\sqrt{2}\right)^k\right).$$

Heraf får vi, at tallene n_k i Q er
for k ulige: $n_k = x_k^2 = \frac{1}{4}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{2k} - 2 + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2k}\right)$, og
for k lige: $n_k = x_k^2 - 1 = \frac{1}{4}\left(\left(1+\sqrt{2}\right)^{2k} + 2 + \left(1-\sqrt{2}\right)^{2k}\right) - 1$,
der kan sammenfattes i formlen

$$n_k = \frac{\left(3+2\sqrt{2}\right)^k}{4} - \frac{1}{2} + \frac{\left(3-2\sqrt{2}\right)^k}{4}.$$

(Även löst av Con Amore Problemgruppe.)

541. (*Ebbe Thue Poulsen*)

Vi lader K betegne den rektangulære kasse, der er bestemt ved kanterne PA, PB, og PC. Da såvel kassens midtpunkt som den givne kugles centrum O ligger i midtnormalplanerne til PA, PB, og PC, er O kassens midtpunkt, og de til P, A, B, og C modstående hjørner i kassen ligger ligeledes på kuglen.
1. Planerne π og π' bestemt ved A, B, og C hhv. A', B', og C' er parallelle. Lad endvidere π_P og $\pi_{P'}$ være de dermed parallelle planer gennem P og P'.

Linjestykkerne PA, BC', og $A'P$ er parallelle og lige lange, og de forbinder hhv. et punkt i π_P med et punkt i π, et punkt i π med et punkt i π', og et punkt i π' med et punkt i $\pi_{P'}$. Det følger heraf, at de fire parallelle planer π_P, π, π', og $\pi_{P'}$ er ækvidistante, og videre, at deres skæringspunkter P, T, T', og P' med kassens diagonal PP' deler denne i 3 lige lange stykker.
Punktet T er følgelig 'tredjedelspunktet' på linjestykket OP, og gennem dette punkt går altså planen π bestemt ved A, B, og C, uafhængigt af, hvorledes A, B, og C er valgt.
2. Betragt det sædvanlige retvinklede koordinatsystem med origo P og koordinatakser gennem A, B, og C. Lad a, b, og c betegne de halve længder af PA, PB, og PC. Da $|PO| = 1$, er $a^2 + b^2 + c^2 = 1$.
Arealet $|\triangle ABC|$ af $\triangle ABC$ er $\frac{1}{2}|AB \times AC|$, og da

$$AB = (-a, b, 0) \text{ og } AC = (-a, 0, c),$$

er

$$AB \times AC = (bc, ac, ab)\,,$$

og altså

$$|\triangle ABC|^2 = \tfrac{1}{4}(b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2)\,,$$

der for $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ har sin største værdi, når $a^2 = b^2 = c^2 = \frac{1}{3}$.
Den største værdi for $|\triangle ABC|$ er følgelig $\sqrt{3}/6$.

544. (*Hans Kaas Benner, Randers*)

Antag $x_1 \le x_2 \le \cdots \le x_n$, ukendte. Givet $s_{ij} = x_i + x_j$, $1 \le i \le j \le n$, så bestemmes n ved $\binom{n}{2}$ = antal s_{ij}.
For $n = 2$ kan x_1 og x_2 ikke bestemmes.
Da $s_{12} \le s_{13} \le s_{23}$ er det klart at x_1, x_2, x_3 kan bestemmes for $n = 3$.
For $n \ge 4$ ved vi ikke om $s_{23} \le s_{14}$ eller $s_{14} \le s_{23}$. Betragt følgende eksempel:
Givet s_{ij} ved -0.9, 1, 2.1, 3, 4.1, 6, så er $n = 4$. Vi ved at $s_{12} = -0.9$, $s_{13} = 1$, $s_{24} = 4.1$, $s_{34} = 6$.
Vælg $s_{14} = 2.1$ og $s_{23} = 3$. Så er $x_1 = -1.45$, $x_2 = 0.55$, $x_3 = 2.45$, $x_4 = 3.55$.
Vælges $s_{14} = 3$ og $s_{23} = 2.1$ fås $x_1 = -1$, $x_2 = 0.1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 4$.
Altså: Tallene kan kun genskabes for $n = 3$. (Även löst av Con Amore Problemgruppe, København.)

545. (*Con Amore Problemgruppe*)

Vi fører beviset ved induktion. Det er klart, at uligheden gælder for $n = 1$. Vi tænker os nu givet $2m + 1$ vektorer af den givne beskaffenhed, hvor $m \in \mathbb{N}$, og hvor uligheden gælder for vilkårlige $n = 2m - 1$ sådanne vektorer. Vi betragter så de to af de $2m + 1$ vektorer, som har henholdsvis mindst vinkel u og størst vinkel v; dvs. det gælder, at $0 \le u < v \le \pi$ [idet vi forudsætter, at de $2m + 1$ punkter er forskellige; dette er dog ikke væsentligt], og hvor alle de øvrige enhedsvektorers vinkel ligger i intervallet $]u, v[$. Ifølge induktionsantagelsen kan de øvrige $2m - 1$ vektorer da skrives som $k(\cos w + i \sin w)$, hvor $k \ge 1$ og $w \in]u, v[$. Idet vi regner i den komplekse talplan, skal vi derfor vise, at

$$(1) \qquad |\overrightarrow{OP_1} + \overrightarrow{OP_2} + \cdots + \overrightarrow{OP_{2m}} + \overrightarrow{OP_{2m+1}}| = |(\cos u + \cos v + k\cos w) + i(\sin u + \sin v + k\sin w)| \geq 1.$$

Vi kan lige så godt vise, at kvadratet på tallet efter lighetstegnet i (1) er mindst 1. Vi finder:

$$\begin{aligned}
&(\cos u + \cos v + k\cos w)^2 + (\sin u + \sin v + k\sin w)^2 = \\
&k^2 + 2k\big((\cos w(\cos u + \cos v) + \sin w(\sin u + \sin v)\big) + \\
&\qquad 2 + 2(\cos u\cos v + \sin u\sin v) = \\
&k^2 + 2k\big((\cos w(\cos u + \cos v) + \sin w(\sin u + \sin v)\big) + 2(1 + \cos(u - v)).
\end{aligned}$$

I det sidste udtryk ovenfor gælder, at $k^2 \geq 1$ og at $2(1 + \cos(u - v)) \geq 0$. Hvis vi kan godtgøre, at udtrykket i den store parentes er ikke-negativt, så er induktionsbeviset fuldført. Da endvidere $\sin w(\sin u + \sin v) \geq 0$, kan vi antage, at $\cos w(\cos u + \cos v) < 0$ [ellers er vi færdige]. Denne antagelse medfører, at de to faktorer i sidstn ævnte udtryk har modsat fortegn, dvs. at $0 \leq u < \pi/2 < v \leq \pi$, samt at w ligger i det samme af intervallerne $]0, \pi/2[$ og $]\pi/2, \pi[$ som den af vinklerne u og v, der er numerisk tættest på $\pi/2$ [de kan icke ligge lige nær, da $\cos u + \cos v$ så ville være 0]. På grund af symmetri om den imaginære akse kan vi fx forudsætte, at $\cos u > -\cos v$. Det indses nu let, at udtrykket i den store parentes for et givet v har sin nedre grænse for u og w bestemt ved $u = 0$ og $w = v$. Denne nedre grænse er da for et givet v lig med

$$(\cos v(\cos v + 1) + \sin v(\sin v + 0) = \cos^2 v + \sin^2 v + \cos v = 1 + \cos v \geq 0.$$

Alt i alt har vi hermed godtgjort, at uligheden i opgaven så også gælder for vilkårlige $2m + 1$ vektorer af den givne beskaffenhed. Påstandens rigtighed følger herafter ved induktion.

546. (*Con Amore Problemgruppe*)

Vi kalder en cirkel, som ikke er indeholdt i nogen anden cirkel, for en *maksimal cirkel*, og alle cirkler, som er indeholdt i en maksimal cirkel (vi medregner den maksimale cirkel selv), for et *system*. Endvidere vil vi benævne et system efter farven på den maksimale cirkel og tale om et rødt, et blåt eller et gult system. Opgaven går ud på at godtgøre , at der findes et gult system.

Vi fører beviset inderekte, dvs. antager, at der ikke findes nogen maksimal gul cirkel.

Vi undersøger først opbygningen af et rødt system. Dette systems maksimale cirkel indeholder præcis 5 blå cirkler; disse 5 blå cirkler må også indeholdes i enhver anden rød cirkel i systemet (ellers måtte den maksimale cirkel indeholde flere end 5 blå cirkler). Da enhver af de blå cirkler indeholder præcis 13 gule, kan vi videre slutte, at alle systemets blå cirkler indeholder de samme 13 gule cirkler (ellers måtte enhver af de røde cirkler indeholde mere end 19 gule cirkler). De 6 resterende gule cirkler i systemet må altså ligge uden for alle blå cirkler. Hermed har vi påvist, at et rødt system yderst har et vist antal røde cirkler, inden i den inderste af disse ligger netop 5 blå cirkler, og inden i den inderste af disse ligger 13 gule cirkler. De 6 resterende gule cirkler ligger mellem den inderste røde og den yderste blå cirkel.

Dernæst undersøger vi opbygningen af et blåt system. Et sådant kan ikke indeholde nogen rød cirkel; thi forekomsten af en sådan ville jo medføre, at der inde i den maksimale blå cirkel var yderligere mindst 5 blå cirkler, og da hver sådan indeholder 13 gule, måtte den maksimale blå cirkel indeholde for mange gule cirkler. Endvidere må enhver blå cirkel i systemet indeholde enhver af systemets gule cirkler; ellers måtte den maksimale blå cirkel igen indeholde for mange gule cirkler.

Vi fortsætter vor analyse: Da ethvert rødt system indeholder 19 gule cirkler, kan der maksimalt være 7 røde systemer. Lad os kalde antallet af røde systemer for r, og lad os kalde antallet af blå systemer for b. Det skal da ifølge antagelsen og vor analyse gælde, at antallet af gule cirkler er $19r + 13b$, altså at

$$19r + 13b = 150, \tag{1}$$

hvor både r og b er ikke-negative hele tal (og r endda højst 7).
Af $1 = 13 - 2 \cdot 6 = 13 - 2 \cdot (19 - 13) = 3 \cdot 13 - 2 \cdot 19$ fremgår, at $(450, -300)$ er en løsning til den diophantiske ligning (1). Ifølge vor antagelse har (1) en løsning (r, b) af form

$$(r, b) = (450 - 19k, -300 + 13k),$$

hvor k er et naturligt tal, og sådan at begge komponenter er ikke-negative. I midlertid kræver $450 - 19k \geq 0$, at $k \leq 23$, og $-300 + 13k \geq 0$, at $k \geq 24$. Hermed er vor antagelse ført til en modstrid, dvs. vi har godtgjort, at der som påstået må være mindst ét gult system.