 Normat **60**:2, 52–69 (2012)

Hilberts Tionde Problem och Büchisekvenser

Juliusz Brzeziński

Mathematical Sciences
Chalmers and Gothenburg University
S–41296 Göteborg, Sweden
jub@chalmers.se

1 Introduktion

Hilberts tionde problem tillhör den berömda lista på 23 matematiska problem som presenterades av David Hilbert i ett föredrag vid den internationella matematikerkongressen i Paris år 1900. Dessa problem var utgångspunkten till flera spektakulära matematiska resultat och utvecklingen av helt nya forskningsområden inom matematiken. Flera av Hilberts problem har besvarats, men det finns fortfarande problem som inte är lösta[1]. Det tionde problemet handlar om Diofantiska ekvationer dvs, i den mest vanliga tolkningen, om polynomekvationer med heltaliga koefficienter och deras heltaliga lösningar. Frågan är om existensen av sådana lösningar kan avgöras i ett ändligt antal beräkningssteg. Det mest berömda exemplet på Diofantisk ekvation är troligen Fermats ekvation:

$$X^n + Y^n = Z^n$$

och frågan om existensen av nollskilda heltal X, Y, Z som uppfyller likheten då $n > 2$. Kan detta avgöras med hjälp av en algoritm som efter ett antal beräkningssteg kan konstatera att ekvationen (vid fixt n) har eller inte har några heltaliga lösningar? En annan tänkbar formulering är att frågan gäller existensen av en algoritm som kan implementeras så att en dator kan avgöra om lösningar finns eller ej. Rent allmänt har man alltså en polynomekvation $f(X_1, X_2, \ldots, X_n) = 0$ med heltaliga koefficienter och frågar om det alltid är möjligt att konstruera en algoritm som antingen hittar en heltalig lösning eller visar att en sådan inte finns. Hilberts formulering var följande (i min fria översättning):

Man har en Diofantisk ekvation med rationella koefficienter i ett godtyckligt antal obekanta: Bestäm en process som efter ett ändligt antal beräkningssteg kan avgöra om det finns en heltalig lösning till ekvationen.[2]

[1] Av 23 problem har 15 besvarats, 5 har partiella svar eller kan betraktas som besvarade beroende på frågans tolkning och 3 är obesvarade.

[2] Eine D i o p h a n t i s c h e Gleichung mit irgend welchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlencoefficienten sei vorgelegt: man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich

Idag vet vi att detta ej är möjligt för alla Diofantiska ekvationer – det visades 1970 av Yuri Matiyasevich som därmed löste Hilberts tionde problem. Matiyasevichs lösning av problemet bygger på hans tidigare resultat och resultat av flera andra framstående matematiker som Martin Davis, Julia Robinson och Hilary Putnam. Matiyasevich visar att det finns en Diofantisk ekvation $f(X_1, X_2, \dots, X_n) = 0$ för vilken existensen av heltaliga lösningar inte kan avgöras med hjälp av en algoritm. Beviset bygger på en lämplig formulering och precisering av begreppen (vad menas med en algoritm?), vilket spelar en mycket viktig roll i resonemangen som i stora delar tillhör den matematiska logikens domäner. Ett lämpligt polynom kan konstrueras helt explicit fast det är inte enkelt. Från början fanns det ett ganska komplicerat exempel på ett polynom i 26 variabler. Matiyasevich själv konstruerade senare ett polynom i 10 variabler med lika ogenomskådlig uppbyggnad. Richard J. Büchi försökte konstruera ett relativt enkelt exempel på ett sådant polynom och visade att Matiyasevich resultat implicerar att det finns sådana "enkla" exempel om bara hans egen förmodan angående kvadratsekvenser av heltal är sann. Först förklarar vi hur man kan välja ett konkret polynom i Hilberts tionde problem om Büchis förmodan är sann för att därefter gå över till denna förmodan som är huvudämnet för denna artikel.

Büchi bevisar (se [L] eller [Vo]) att i Matiyasevichs sats kan polynomet väljas som

$$f(X_1, \dots, X_n) = P_1^2 + \dots + P_m^2, \tag{1}$$

där varje $P_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j^2 - b_i$ är (diagonalt) kvadratiskt polynom med heltaliga koefficienter a_{ij}, b_i. Med andra ord bevisade Büchi att det finns ett system av kvadratiska ekvationer för vilket existensen av heltaliga lösningar inte kan avgöras med hjälp av en lämplig algoritm om bara hans förmodan om kvadratsekvenser gäller samt det negativa svaret på Hilberts fråga är känt (notera att kvadratsumman (1) är lika med 0 precis då $P_i = 0$ för alla $i = 1, \dots, m$).

Nu kan vi formulera Büchis kvadratproblemet (se [L], [Vo], [PPV]):

Büchis kvadratförmodan *Varje tillräckligt lång sekvens av positiva heltal vars kvadrater har andradifferenser lika med 2 måste vara trivial.*

För att närmare förklara denna formulering låt oss ta en sekvens av positiva heltal $x_1, x_2, \dots, x_n$. De förstadifferenserna mellan kvadraterna är talen $x_{i+1}^2 - x_i^2$ för $i = 1, \dots, n-1$. De andradifferenserna är

$$(x_{i+2}^2 - x_{i+1}^2) - (x_{i+1}^2 - x_i^2) = D_i \tag{2}$$

för $i = 1, \dots, n-2$. Büchis förmodan säger att om vi väljer $D_i = 2$ så blir sekvensen trivial om den är tillräckligt lång. Vad betyder trivial? Om vi startar med konsekutiva positiva heltal t.ex. 1,2,3,4,5,6, så är de förstadifferenserna mellan deras

mittelst einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läßt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist.

kvadrater lika 3,5,7,9, och de andradifferenserna 2,2,2. Denna sekvens är ett exempel på en trivial sekvens dvs en sekvens bestående av konsekutiva positiva heltal. Finns det icke triviala sekvenser? Svaret är att de finns, men troligen enbart för väldigt små längder. Som exempel ta talen 6, 23, 32, 39. De förstadifferenserna av kvadraterna är 493, 495, 497, och de andra är 2. Det finns inte ett enda känt exempel på en icke-trivial sekvens av den typen av längd 5. Beroende på mycket omfattande numeriska beräkningar och en del teoretiska överväganden kan man gissa att "tillräcklig lång" i Büchis förmodan innebär helt enkelt $n = 5$.

I fortsättningen av denna artikel sysslar vi med olika resultat som anknyter till Büchis kvadratproblem. I sektion 3 visar vi hur man enkelt kan konstruera alla icke-triviala Büchi-sekvenser av längd 4. Eftersom försöken att förlänga dessa med ytterligare termer misslyckas studerar vi två andra, närliggande problem. Det första är huruvida det är möjligt att konstruera längre icke-triviala sekvenser vars kvadrater har en konstant andradifferens som inte nödvändigt är lika med 2 – hur svårt är det att konstruera sådana sekvenser när man vill ha relativt små andradifferenser (helst 2)? Det andra är att söka konstruera Büchisekvenser med rationella tal i stället for hela. Är det möjligt att konstruera längre sekvenser då? Vilken typ av svårigheter möter man och vilka konsekvenser för det ursprungliga problemet kan förväntas?

Dessa problem har studerats av flera matematiker både i samband med Büchis kvadratproblem och i till synes andra sammanhang. Büchisekvenser av längd 4 studerades av Hensley [H] och något senare visade Buell [Bu] att det finns oändligt många (t.o.m. växande) sekvenser av den typen. Han ställde också frågan om existensen av längre kvadratsekvenser med konstanta andradifferenser. Ungefär samtidigt studerades frågan om exempel på kvadratiska polynom $f(X) = aX^2 + bX + c$ med heltaliga och relativt prima koefficienter a, b, c sådana att polynomets värden är kvadrater för så många som möjligt heltaliga konsekutiva värden på X. Frågan om möjliga antal av konsekutiva värden på X som ger kvadrater då $a = 1$ är ekvivalent med Büchis fråga (vi visar ekvivalensen i Appendix). Så t.ex. det faktum att 6, 23, 32, 39 är Büchisekvens översätts till att polynomet $f(X) = X^2 + 492X + 36$ ger kvadrater då $X = 0, 1, 2, 3$ ($f(0) = 6^2, f(1) = 23^2, f(2) = 32^2, f(3) = 39^2$). Allison visade i [A] att det finns oändligt många symmetriska sekvenser av åtta heltal vars kvadrater har konstanta andradifferenser t.ex. 17, 53, 67, 73, 73, 67, 53, 17 (med andradifferensen -420). Han hittade också två icke-symmetriska sekvenser av 7 heltal med denna egenskap. Undersökningar av liknande karaktär finns i [Ba] och [Pi]. Som ett svar på Buells fråga visades i [BB] att det finns oändligt många (monotona) heltaliga kvintuppler och sextuppler med konstanta andradifferenser (beloppen av de minsta kända differenserna är $|D| = 2110$ för sextupplen 54, 229, 316, 381, 434, 479 och $|D| = 112$ för kvintupplen 111, 251, 337, 405, 463). Frågan om existensen av längre sekvenser med liknande egenskaper är öppen. Genom att använda ganska avancerad algebraisk geometri konstruerade Bremner [Br] 12 nya sekvenser av längd 7 (utöver de två som var kända från [A]). Med hjälp av den teknik som presenteras här (se också [BB2]) är det möjligt att hitta 5 nya sekvenser av längd 7 som inte är trunkeringar av symmetriska sekvenser av längd 8. Det finns inga icke-triviala symmetriska kvadratsekvenser med konstanta andradifferenser av udda längd $n \geq 7$ [BB] och av jämn längd $n \geq 10$ ([G-JX]).

När det gäller rationella Büchisekvenser, så kan man visa att det finns oändligt många (monotona) icka-triviala av längd 5 (se [BB2] och sektion 4). Nyligen annonserades i [ALT] ett till en del starkare resultat om sådana sekvenser (se sektion 4). Det verkar att rationella Büchisekvenser av längd 6 är antingen triviala eller symmetriska (se sektion 5 och en förmodan formulerad där). Slutsatsen från omfattande numeriska beräkningar (se [BB2]) och en del kända resultat gör att följande förmodan som omfattar Büchis ursprungliga fråga är trolig:

5-7-9 Förmodan (*a*) *Varje Büchisekvens av längd* 5 *är trivial;*

(*b*) *Varje rationell Büchisekvens av längd* 7 *är trivial;*

(*c*) *Varje rationell kvadratsekvens av längd* 9 *med konstanta andradifferenser är trivial.*

Efter en inledande sektion 2 där vi fixerar vår terminologi, visar vi existensen av oändligt många Büchikvadrupler i sektion 3. Vi ger en annan lösning än i [Bu] och på ett naturligt sätt kommer fram till en parametrisering som finns hos Vidaux [Vi]. I sektion 4 visar vi hur man kan konstruera oändligt många växande rationella Büchikvintuppler genom ett lämpligt val av en elliptisk kurva på en yta i rymden. I sektion 5 tittar vi på rationella Büchisextuppler som troligen är de sista någorlunda icke triviala sekvenser – vi formulerar här en sannolik förmodan. I sektion 6 berättar vi om kvadratsekvenser med konstanta andradifferenser av längd större än 6 och slutligen i sektion 7 återkommer vi till Hilberts tionde problem och diskuterar fortsatt forskning som är relaterad till olika mycket naturliga generaliseringar av problemet t.ex. till andra talmängder. Artikeln avslutas med ett Appendix där vi förklarar sambandet mellan Büchisekvenser och värden av kvadratiska polynom för konsekutiva heltal.

2 Büchisekvenser

Låt $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 3)$ vara en sekvens av positiva heltal vars kvadrater har konstanta andradifferenser $D = 2$. Enligt (2) har vi då följande ekvationssystem:

$$
\begin{array}{rcl}
x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 & = & 2, \\
x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 & = & 2, \\
& \cdots & \\
x_{n-2}^2 - 2x_{n-1}^2 + x_n^2 & = & 2.
\end{array}
\tag{3}
$$

Om en helt godtycklig lösning $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ betraktas som en punkt i ett affint rum, så definierar dessa ekvationer en yta (en algebraisk mängd av dimension 2) i $\mathbb{A}^n$. Sådana ytor, eller mera exakt, motsvarande ytor i det projektiva rummet $\mathbb{P}^n$ som definieras av ekvationssystemet

$$
(4) \qquad \begin{aligned}
x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 &= 2x_0^2, \\
x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 &= 2x_0^2, \\
&\cdots \\
x_{n-2}^2 - 2x_{n-1}^2 + x_n^2 &= 2x_0^2,
\end{aligned}
$$

har studerats ganska intensivt för att få grepp om strukturen av deras heltaliga punkter dvs Büchisekvenser. En helt godtycklig lösning $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ av (4) kan betraktas som punkt i det projektiva rummet $\mathbb{P}^n$ i vilket ekvationssystemet definierar en algebraisk yta. Vi skall beteckna denna yta med $\mathbf{X}_n$. I [Vo] studerade Vojta dessa ytor och visade att om en förmodan av Lang om rationella punkter på algebraiska ytor av så kallad allmän typ är sann för någon av ytorna $\mathbf{X}_n$ med $n \geq 8$, så gäller Büchis kvadratförmodan (se slutet av sektion 5).

Om man vill studera mera allmänna sekvenser $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geq 4)$ vars kvadrater har helt godtyckliga konstanta andradifferenser D (dvs sekvenser som uppfyller ekvationerna (2) med $D_i = D$) så är det naturligt att skriva om systemet genom att subtrahera varje par av efterföljande ekvationer (eliminera D):

$$
(5) \qquad \begin{aligned}
x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_3^2 - x_4^2 &= 0, \\
x_2^2 - 3x_3^2 + 3x_4^2 - x_5^2 &= 0, \\
&\cdots \\
x_{n-3}^2 - 3x_{n-2}^2 + 3x_{n-1}^2 - x_n^2 &= 0.
\end{aligned}
$$

Här är D inte längre explicit utan kan definieras som det gemensamma värdet av de vänstra leden i (3) (samma som i (4) ovan). I detta fall kan de nollskilda lösningarna $[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ betraktas som punkter på en yta i det projektiva rummet $\mathbb{P}^{n-1}$. I fortsättningen betecknar vi denna yta med $\mathbf{Y}_{n-1}$. Det finns nära samband mellan ytorna $\mathbf{X}_n$ och $\mathbf{Y}_{n+1}$ som vi skall utnyttja senare.

I fortsättningen skall vi använda följande terminologi. Vi säger att $x_1, x_2, \ldots, x_n$ är en **Büchi sekvens** om $D = 2$. Den kallas **trivial** om det finns en aritmetisk följd av heltal $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sådan att $x_i = |a_i|$ för $i = 1, \ldots, n$. Vi kommer att kalla sekvensen **primitiv** om den största gemensamma delaren till alla x_i är 1. En sekvens kallas **symmetrisk** om $|x_i| = |x_{n-i}|$ for $i = 0, 1, \ldots, n$.

3 Büchikvadrupler

I denna sektion visar vi att det finns oändligt många Büchisekvenser x_1, x_2, x_3, x_4 av längd fyra dvs att ekvationssystemet

$$(6)\qquad \begin{aligned} x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 &= 2,\\ x_2^2 - 2x_3^2 + x_4^2 &= 2, \end{aligned}$$

har oändligt många icke-triviala heltaliga lösningar som t.o.m. består av växande positiva heltal $x_1 < x_2 < x_3 < x_4$. Att sekvensen är icke-trivial innebär nu att den inte är aritmetisk (x_2 är inte medelvärdet av x_1, x_3). Vi kan först hitta ett sätt att lista alla tripplar x_1, x_2, x_3 och därefter försöka förlänga dessa till Büchikvadrupler.

Låt x_1, x_2, x_3 vara en icke-trivial lösning till ekvationen $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 = 2$. Låt $x_2 = x_1 + k$, $x_3 = x_1 + l$. Eftersom $2k - l \neq 0$ ($l = 2k$ ger en aritmetisk sekvens) får vi:

$$x_1 = \frac{2k^2 - l^2 + 2}{2(l - 2k)},$$

$$x_2 = x_1 + k = \frac{2kl - 2k^2 - l^2 + 2}{2(l - 2k)},$$

$$x_3 = x_1 + l = \frac{2k^2 + l^2 - 4kl + 2}{2(l - 2k)}.$$

Vi betecknar $2k - l = r$ och får

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{2k^2 - 4kr + r^2 - 2}{2r},\\ x_2 &= \frac{2k^2 - 2kr + r^2 - 2}{2r},\\ x_3 &= \frac{2k^2 - r^2 - 2}{2r}, \end{aligned}$$

x_1, x_2, x_3 är heltal endast om r är ett jämnt heltal som delar $k^2 - 1$. De är positiva och växer endast om $x_1 > 0$ och $k > r > 0$. Dessa villkor ger en enkel algoritm som gör det möjligt att lista Büchitripplar med hjälp av en dator. Man väljer $k = 1, 2, \ldots$ och bestämmer för varje k alla positiva delare r till $k^2 - 1$ som uppfyller villkoret $r < k$. Dessutom måste villkoret $2(k - r)^2 - r^2 > 2$ uppfyllas. För att konstruera kvadrupler kan vi varje gång testa om också andra ekvationen i systemet (6) är uppfylld dvs om $x_4 = \sqrt{2 + 2x_3^3 - x_2^2}$ är ett heltal. På det sättet får vi följande lista av de kvadrupler som svarar mot alla $k < 200$ (ordnade efter växande k och motsvarande delare r till $k^2 - 1$):

TABELL 1: Büchikvadrupler för $k \leq 200$

				k	r
6	23	32	39	17	8
39	70	91	108	31	10
108	157	194	225	49	12
225	296	353	402	71	14
16	87	122	149	71	36
402	499	580	651	97	16
51	148	203	246	97	42
651	778	887	984	127	18
147	302	401	480	155	56
984	1145	1286	1413	161	20
79	242	333	404	163	72
59	228	317	386	169	80
1413	1612	1789	1950	199	22

Det finns flera möjligheter att visa att det finns oändligt många växande Büchikvadrupler. En möjlighet är att försöka ge en formel för sådana sekvenser genom att välja k som ett heltaligt polynom i en variabel m och r som en delare till k^2-1. Som vi vet måste r vara mindre än k och dessutom kan det inte vara $k-1$ därför att denna (triviala) delare ger en trivial sekvens. Låt oss göra det enklaste valet $k(m) = 2m(m+s)+1$ där vi vill välja ett lämpligt s som leder till önskade sekvenser (vi hoppas att en lösning kan finnas på den formen). Vi har placerat en faktor 2 beroende på att vi vill ha heltaliga koefficienter i alla polynom och som vi redan vet skall $r(m)$ vara jämnt. Som delare till $k(m)-1$ väljer vi $r(m) = 2(m+s)$, räknar ut $x_1(m), x_2(m), x_3(m)$ och hoppas på en möjlighet att få fram $x_4(m)$. Med hjälp av formlerna (7) får vi $x_1(m) = 2m^3 + (2s-4)m^2 + (3-4s)m + s - 2$, $x_2(m) = 2m^3 + (2s-2)m^2 + (3-2s)m + s - 1$ och $x_3(m) = 2m^3 + 2sm^2 + m - s$. Nu kan vi också räkna ut

$$x_4(m)^2 = 4m^6 + (8s+8)m^5 + (4s^2 - 8 + 16s)m^4 + (8s^2 + 16 - 24s)m^3 +$$

$$(-11 + 20s - 16s^2)m^2 + (6 + 4s^2 - 14s)m + s^2 + 1 + 2s.$$

Eftersom vi vill ha värden på s sådana att $x_4(m)$ är en kvadrat av ett polynom måste vårt polynom ha diskriminant lika med 0. En kort beräkning med ett lämpligt datorprogram (t.ex. Maple) leder till att endast $s = 2$ duger. Som tur är får vi en lösning på vårt problem: $x_1(m) = 2m^3 - 5m, x_2(m) = 2m^3 + 2m^2 - m + 1, x_3(m) = 2m^3 + 4m^2 + m - 2, x_4(m) = 2m^3 + 6m^2 + m - 3$.

Man ser direkt att $0 < x_1(m) < x_2(m) < x_3(m) < x_4(m)$ om bara $m > 1$. Dessutom har vi $x_1(m+1) = x_4(m)$ så att vi verkligen får oändligt många växande Büchikvadrupler.

Låt oss notera att formlerna för $x_i(m)$ (efter substitution $m = t + 2$) gavs av Vidaux [Vi]. Om man jämför med vår algoritm i början av sektionen som listar *alla* Büchikvadrupler efter växande k så märker vi omedelbart att formlerna ovan för $x_i(m)$ parametriserar endast en del av alla möjliga sekvenser.

För att få bättre uppfattning om Büchikvadrupler är det möjligt att parametrisera dessa med hjälp av punkterna på en yta i $\mathbb{A}^3$ som ges av ekvationen:

$$(1 - z^2)x^2 + (9z^2 - 1)y^2 = 2. \tag{7}$$

Det är inte svårt att kontrollera att varje Büchikvadrupel $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{Q}^4$ definierar en punkt $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$ på denna yta:

$$x = \frac{x_1 + x_4}{2}, y = \frac{x_2 + x_3}{2}, z = \frac{x_3 - x_2}{2x_1}.$$

Omvänt, om (x, y, z) är en punkt på ytan, så är

$$x_1 = x - 3yz, x_2 = y - xz, x_3 = y + xz, x_4 = x + 3yz$$

en Büchikvadrupel om bara punkten uppfyller enkla aritmetiska villkor. Vi lämnar dessa tekniska begränsningar på x, y, z som ger Büchisekvenser x_1, x_2, x_3, x_4 och noterar att det finns fler möjligheter till att hitta parametriseringar av liknande form som ovan (se Vidaux [Vi]).

4 Rationella Büchikvintupler

En naturlig väg till svaret på frågan om existensen av Büchis kvintuppler kan vara undersökningar av rationella Büchisekvenser av denna längd dvs sekvenser x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 sådana att talen är rationella, men fortfarande har andradifferenser av kvadrater lika med 2. I sådant fall har man ekvationssystemet (3) eller i homogena koordinater (4) för $n = 5$. Dessa ekvationer definierar ytan $\mathbf{X}_5$ i $\mathbb{P}^5$. Det är välkänt att denna yta är av typ $K3$. Den har nyligen studerats i [ALT] där man bevisat att punkterna $[x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ med rationella koordinater ligger tätt på denna yta (i Zariskis topologi mening). I denna sektion visar vi att det finns oändligt många växande rationella Büchikvintupler genom en relativt enkel och mer elementär metod som bygger på existensen av oändligt många heltaliga kvintuppler vars kvadrater har konstanta andradifferenser lika $2\delta^2$ för ett heltal δ (jfr [BB2]). Om $[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ är en sådan kvintuppel (på $\mathbf{Y}_4$), så är $\frac{1}{\delta}[x_1, x_2, x_3, x_4, x_5]$ en rationell Büchikvintuppel.

Kvintupler med konstanta andradifferenser av kvadrater uppfyller ekvationerna (5) för $n = 5$, dvs

$$\begin{aligned} x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_3^2 - x_4^2 &= 0, \\ x_2^2 - 3x_3^2 + 3x_4^2 - x_5^2 &= 0. \end{aligned} \tag{8}$$

Betrakta ytan i $\mathbb{A}^3$ med ekvationen:

$$(1-4z^2)x^2+3y^2=4z^2-4z^4. \tag{9}$$

Man kontrollerar utan svårighet att varje punkt (x, y, z) på denna yta definierar en kvintuppel med konstanta differenser av kvadrater om

$$x_1=x-2z^2, \quad x_2=z-xz, \quad x_3=y, \quad x_4=z+xz, \quad x_5=x+2z^2.$$

Av dessa formler ser man direkt att

$$x=\frac{x_1+x_5}{2}, \quad y=x_3, \quad z=\frac{x_2+x_4}{2},$$

så att ytorna (8) och (9) är birationellt isomorfa. Det är klart att för varje fixt värde på z ger (9) en konisk kurva vars punkter kan som vanligt parametriseras. Detta ger oss en parametrisering av punkterna på ytan (9) då $z=s$ och

$$x=\frac{3st^2-6st-(1-4s^2)s}{1-4s^2+3t^2}, \qquad y=\frac{(1-4s^2)s-2(1-4s^2)st-3st^2}{1-4s^2+3t^2}.$$

Nu är det lätt att uttrycka x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 genom dessa parametrar s, t och även beräkna $D=x_1^2-2x_2^2+x_3^2$. Eftersom vi vill ha rationella Büchisekvenser måste D vara lika 2 gånger en kvadrat. Det finns bara fåtal värden på s som leder till triviala sekvenser. Vi avstår från att analysera dessa "dåliga" val, men $s=2$ är inte bland dem (det är lätt att göra beräkningar med hjälp av något av matematiska program som t.ex. Maple). Om $s=2$ får vi följande sekvens (så när som på faktorer gemensamma för alla x_i):

$$x_1=3t^2+2t-25, x_2=t^2-4t+15, x_3=t^2-10t+5, x_4=3t^2-4t+5, x_5=5t^2-2t-15,$$

$$D=8(t^4+t^3-16t^2+5t+25).$$

Alltså vill vi ha sådana rationella värden på t att ekvationen

$$y^2=t^4+t^3-16t^2+5t+25$$

har en rationell lösning y. Denna ekvation representerar en elliptisk kurva och genom ett standardförfarande överförs denna på Weierstrass form:

$$y'^2=t'^3-t'^2-180t'+900.$$

Nu kan man lätt identifiera kurvan i Cremonas tabeller [C] som kurvan 840f2 med rang 1 och en generator av oändlig ordning (av icke-torsionsdelen av de rationella punkterna på kurvan) $P = (t', y') = (-10, 40)$. Olika multipler av punkten P ger olika rationella t' och därmed t. Vi avstår från att skriva ut lämpliga transformationer eftersom vårt syfte endast har varit att visa existensen av oändligt många Büchikvintuppler. För fler detaljer se [BB2].

Om man vill konstruera sekvenser av mindre heltal så är det bättre att utnyttja andra elliptiska kurvor än just den som vi har utnyttjat för att visa existensen av oändligt många rationella Büchisekvenser dvs variera båda parametrar s och t. I Tabell 2 ger vi några växande Büchikvintuppler som kan fås på detta sätt upp till höjden 2000 (med höjden av ett rationellt tal $\frac{p}{q}$ där p, q är positiva och relativt prima menas maximum av dessa tal). I nästa sektion visar vi hur man kan få oändligt många växande sextuppler med konstanta andradifferenser och formulerar en förmodan om Büchisextuppler som bygger på egenskaper hos rationella punkter på en $K3$-yta som "ansvarar" för förekomsten av sådana sekvenser.

TABELL 2: Icke-triviala växande rationella Büchi kvintuppler av höjden ≤ 2000.

$\frac{1}{9}[11, 50, 71, 88, 103]$	$\frac{1}{82}[135, 157, 211, 279, 353]$	$\frac{1}{27}[2, 179, 256, 317, 370]$
$\frac{1}{119}[177, 208, 289, 390, 499]$	$\frac{1}{122}[221, 251, 327, 425, 533]$	$\frac{1}{103}[278, 319, 384, 463, 550]$
$\frac{1}{268}[311, 407, 615, 857, 1111]$	$\frac{1}{43}[715, 938, 1119, 1276, 1417]$	$\frac{1}{151}[238, 711, 1000, 1241, 1458]$
$\frac{1}{244}[191, 753, 1103, 1409, 1695]$	$\frac{1}{473}[368, 391, 786, 1237, 1700]$	$\frac{1}{326}[1257, 1331, 1475, 1671, 1903]$

5 Finns det rationella Büchisextupler?

För att konstruera sextuppler med konstanta andradifferenser måste man lösa ekvationssystemet:

$$\begin{aligned} x_1^2 - 3x_2^2 + 3x_3^2 - x_4^2 &= 0, \\ x_2^2 - 3x_3^2 + 3x_4^2 - x_5^2 &= 0, \\ x_3^2 - 3x_4^2 + 3x_5^2 - x_6^2 &= 0. \end{aligned} \tag{10}$$

Detta system definierar ytan $\mathbf{Y}_5$ i det projektiva rummet $\mathbb{P}^5$ som är mer komplicerad än ytor i tidigare sektioner. Den är inte längre rationell och är känd som en så kallad $K3$-yta. Vi kan dock följa samma metod som i tidigare sektioner om kvadrupler och kvintuppler för att hitta en annan yta som är birationellt ekvivalent med $\mathbf{Y}_5$ och som ligger i $\mathbb{A}^3$. Betrakta i $\mathbb{A}^3$ ytan med ekvationen:

$$x^2 - 3y^2 + 2z^2 + 2x^2y^2 + 25y^2z^2 - 27x^2z^2 = 0. \tag{11}$$

En enkel beräkning visar att varje punkt (x, y, z) på denna yta definierar en sextuppel:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= x - 5yz, \\
x_2 &= y - 3xz, \\
x_3 &= z - xy, \\
x_4 &= z + xy, \\
x_5 &= y + 3xz, \\
x_6 &= x + 5yz.
\end{aligned} \tag{12}
$$

som satisfierar ekvationssystemet (10). Å andra sidan ser man direkt att

$$x = \frac{x_1 + x_6}{2}, \qquad y = \frac{x_2 + x_4}{2}, \qquad z = \frac{x_3 + x_4}{2}.$$

För att hitta rationella punkter på ytan (11), låt oss skriva om dess ekvation på formen:

$$Ax^2 - By^2 + 2x^2y^2 = C,$$

där $A = 1 - 27z^2, B = 3 - 25z^2, C = -2z^2$. Alltså

$$x^2(A + 2y^2) = C + By^2.$$

Låt $u = x(A + 2y^2)$. Då är

$$\frac{u^2}{A + 2y^2} = C + By^2,$$

dvs

$$u^2 = 2By^4 + (AB + 2C)y^2 + AC. \tag{13}$$

På det sättet får vi en oändlig familj av elliptiska kurvor som vi studerar för olika värden av z. En av dessa kurvor (t.ex. för $z = 3$) kan vi använda för att visa att det finns oändligt många växande sextupler med konstanta andradifferenser. Vi skall inte ta upp detaljerna här utan hänvisar till [BB] där detta visades med hjälp av en annan metod, men rent tekniskt på samma sätt genom att konstruera rationella punkter på en elliptisk kurva av nollskild rang. Metoden här är faktiskt mer effektiv och genom att räkna rationella punter på kurvor (13) hittar vi fler relativt små växande sekvenser (se Tabell 3) än i [BB]. Låt oss notera att $z = 3$ ger kurvan $y^2 = -444y^4 + 53688y^2 + 66^2$ och vi kan använda färdiga formler för att gå över till kurvans Weierstrass form (se [W], p.37).

Vad kan vi säga om rationella Büchisekvenser? För att hitta sådana måste vi hitta heltaliga sextuppler med konstanta andradifferenser som är lika 2 gånger en kvadrat. Trots omfattande beräkningar är de enda sådana icke-triviala sekvenser man finner en oändlig serie av symmetriska sekvenser där "de minsta" två är $\frac{5}{2}, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}$ och $\frac{241}{60}, \frac{209}{60}, \frac{191}{60}, \frac{191}{60}, \frac{209}{60}, \frac{241}{60}$. Vi beskriver alla sådana sekvenser i Proposition 5.2 nedan. Med tanke på dessa resultat är det troligt att följande förmodan är sann:

Förmodan 5.1. *Varje rationell Büchisekvens av längd* 6 *är trivial eller symmetrisk.*

Denna förmodan har följande konsekvens som innebär att (b) i 5–7–9 Förmodan gäller:

Proposition 5.1. *Om Förmodan* 5.1 *är sann så är varje rationell Büchisekvens av längd* $n \geq 7$ *trivial.*

Bevis. Betrakta en rationell Büchisekvens av längd 7. Om de sex första eller de sex sista talen bildar en trivial sekvens så är hela sekvensen av de sju talen trivial. Om detta inte är fallet så bildar de första och de sista sex talen symmetriska sekvenser enligt Förmodan 5.1. Denna möjlighet endast inträffar då alla talen i sekvensen är lika, vilket är omöjligt för en Büchisekvens. □

Detta betyder att Förmodan 5.1 medför att redan på ytan $\mathbf{X}_7$ är de enda rationella kurvorna med oändligt många rationella punkter de triviala. Låt oss notera än en gång att detta visades av Vojta för ytorna $\mathbf{X}_n$ då $n > 7$ ([Vo], Theorem 3.1).

Vi avslutar denna sektion med en beskrivning av alla symmetriska Büchisekvenser av längd 6 (se [BB2]):

Proposition 5.2. *Det finns en-entydig motsvarighet mellan symmetriska Büchisekvenser av längd* 6 *och rationella punkter på den elliptiska kurvan*

$$y^2 = x^4 + 8x^2 + 12 \tag{14}$$

med positiva x, y, *sådan att sekvensen* (a, b, c, c, b, a) *svarar mot punkten* (x, y) *då* $(a, b, c) = (\sqrt{x^2+6}, \sqrt{x^2+2}, x)$.

Det är inte svårt att visa att den elliptiska kurvan (14) har oändligt många rationella punkter (dess rang är i själva verket lika med 1).

TABELL 3: Kända växande sextuppler med $|D| \leq 10^5$

						D
54	229	316	381	434	479	−2110
355	521	643	743	829	905	−3408
79	343	457	529	575	601	−20208
20	359	478	547	584	595	−28878
483	853	1087	1263	1403	1517	−40360
19	749	1083	1355	1597	1821	51248
514	811	992	1115	1198	1249	−67182
619	655	739	857	997	1151	71232
31	934	1291	1544	1739	1894	−77070
1017	1483	1813	2073	2287	2467	−77320
445	886	1137	1312	1439	1530	−79198

6 Sekvenser längre än 6

Vad kan man säga om kvadratsekvenser med konstanta andradifferenser av längd större än 6? Vi nämnde i inledningen att i samband med studier av andragradspolynom som ger kvadrater för konsekutiva heltalsvärden visade Allison [A] existensen av oändligt många symmetriska sekvenser av längd 8. Alla sådana sekvenser konstrueras med hjälp av rationella punkter på en elliptisk kurva i enlighet med följande resultat i [A] som kan formuleras på följande sätt:

Proposition 6.1. *Det finns en en-entydig motsvarighet mellan alla symmetriska sekvenser av* 8 *kvadrater med konstanta andradifferenser och rationella punkter* (x, y) *med* $x, y > 0$ *på den elliptiska kurvan* $y^2 = 18x^4 - 27x^2 + 10$ *i vilken sekvensen* a, b, c, d, d, c, b, a *svarar mot den rationella punkten* (x, y) *så att* $x = c/d$, $\gcd(c, d) = 1$, $c, d > 0$, $a = \sqrt{|3c^2 - 2d^2|}$, $b = \sqrt{|6c^2 - 5d^2|}$.

Som vi nämnde i inledningen visades i [G-JX] att det inte finns symmetriska sekvenser av kvadrater med konstanta andradifferenser av jämn längd större än 8. Att det inte finns sådana symmetriska sekvenser av udda längd större än 6 visades i [BB].

Allison försökte hitta andragradspolynom som ger "långa" icke-symmetriska kvadratsekvenser för konsekutiva heltal. Han lyckades hitta två sådana exempel och bägge var septuppler: $53, 173, 217, 233, 227, 197, 127$ och $526, 337, 160, 113, 274, 461, 652$. Den studien återupptogs av Bremner i [Br] som försökte systematisera sökandet efter sådana sekvenser av längd större än 6 genom noggranna studier av s.k. Neron-Severi grupper av ytor som ges av ekvationssystemet (5) för $n = 7$. Trots det ursprungliga hoppet om att kunna visa existensen av oändligt många sådana sekvenser (se [Br], p.97) visade det sig att de är mycket sällsynta. Bremner lyckades konstruera 12 nya sekvenser eller snarare andragradspolynom som ger 7 kvadrater för konsekutiva heltal (se Tabell 4). Med hjälp av en konstruktion av en birationellt ekvivalent yta i $\mathbb{A}^3$ med den som ges av ekvationen (5) för $n = 7$ konstruerades i [BB2] ytterligare 5 sådana sekvenser (se Tabell 4). Konstruktionen av ytan följer exakt samma spår som i tidigare sektioner för $n = 4, 5, 6$, men kräver betydligt längre uträkningar som vi här utelämnar (se [BB2]). Omfattande numeriska beräkningar i [A], [Br], [BB] och [BB2] tyder på att följande förmodan kan vara sann:

Förmodan 6.1. *Varje kvadratsekvens av längd* 8 *med konstanta andra differenser är trivial eller symmetrisk*

På samma sätt som Förmodan 5.1 implicerar (b) i 5-7-9 Förmodan, implicerar Förmodan 6.1 att (c) i 5-7-9 Förmodan gäller:

Proposition 6.2. *Om Förmodan* 6.1 *är sann så är varje rationell kvadratsekvens av längd* $n \geq 9$ *med konstanta andradifferenser trivial.*

Bevis. Betrakta en rationell kvadratsekvens av längd 9 med konstanta andradifferenser. Om de åtta första eller de åtta sista talen bildar en trivial sekvens så är hela sekvensen av de nio talen trivial. Om detta inte är fallet så bildar de första och de sista åtta talen symmetriska sekvenser enligt Förmodan 6.1. Det är lätt att inse att denna möjlighet endast inträffar då alla nio talen är lika. □

Hur kan man förklara förekomsten av exceptionella kvadratsekvenser av längd 7 med konstanta andradifferenser och varför är det så svårt att hitta dessa sekvenser? Ytan (5) för $n = 7$ är av en typ som omfattas av en känd förmodan av Lang (se [Vo], Conjecture 0.3). Langs förmodan säger att om en icke-singulär yta har en s.k. allmän typ så finns det ändligt många kurvor på ytan som samlar nästan alla rationella punkter så att utanför dessa linjer kan det eventuellt finnas endast ändligt många. Det är troligen just denna företeelse som inträffar för $n = 7$ vilket kan innebära att sekvenserna i Tabell 4 är just de exceptionella punkterna som inte ligger på de ändligt många kurvor som lyder under Langs förmodan. I [BB2] finns en beskrivning av denna mängd av kurvor som tillsammans med omfattade numeriska beräkningar låter formulera följande förmodan:

Förmodan 6.2. *Med ändligt antal undantag, som kallas exceptionella, är varje sekvens av* 7 *kvadrater med konstanta andradifferenser antingen trivial eller trunkeringen* (*från vänster eller höger*) *av en symmetrisk sekvens av* 8 *kvadrater med konstanta andradifferenser.*

Denna förmodan bygger på gissningen att nästan alla rationella punkter på ytan (5) för $n = 7$ ligger antingen på en av 2^7 linjer (de triviala linjerna $\pm x_i = x_1 + i - 1$ eller $\pm x_i = -x_1 + i - 1$ för $i = 2, \ldots, 7$) eller på en elliptisk kurva ($x_1^2 = 6x_3^2 - 5x_4^2, x_2^2 = 3x_3^2 - 2x_4^2$) vars rationella punkter definierar trunkerade symmetriska sekvenser av 8 kvadrater (se Proposition 6.1 och [BB2]).

Det finns 19 kända exceptionella sekvenser av 7 kvadrater med konstanta andradifferenser som varken är triviala eller "TOYOTA-symmetriska" (i van der Portens terminologi). De finns i Tabell 4.

Som avslutning låt oss notera följande resultat som bygger på liknande argument som i beviset av Theorem 3.1 i [Vo]:

Proposition 6.3. *Förmodan* 6.2 *implicerar att varje tillräckligt lång kvadratsekvens med konstanta andradifferenser är trivial.*

Bevis Anta att antalet exceptionella sekvenser i Förmodan 6.2 är lika med N. Då måste varje sekvens av heltal med konstanta andradifferenser av kvadrater och längden $N+9$ vara trivial. I själva verket om $x_1, x_2, \ldots, x_{N+9}$ är en sådan sekvens så ger den upphov till $N + 3$ olika septuppler $x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+6}$ for $i = 1, 2, \ldots, N + 3$. Punkterna (i, b_i) ligger på en parabel (se Appendix och texten i inledningen om kvadratiska polynom) så att alla septuppler är olika och icke-triviala. Högst två av dessa septuppler kan utvidgas till en och samma symmetriska oktuppel. Alltså har vi minst $N + 1$ septuppler som inte är triviala och som inte är trunkeringar av symmetriska oktuppler vars kvadrater har konstanta andradifferenser. Detta strider dock mot förutsättningen att det endast finns N sådana septuppler. Därför måste sekvensen $x_1, x_2, \ldots, x_{N+9}$ vara trivial. □

Låt oss notera att under förutsättningen att Langs förmodan gäller för ytan X_n som svarar mot alla Büchisekvenser av en längd $n \geq 8$ visade Vojta i [Vo] att nästan alla rationella punkter på denna yta måste ligga på de 2^n triviala linjerna $\pm x_i = x_1 + (i - 1), \pm x_i = -x_1 + (i - 1)$ för $i = 2, \ldots, n$. Samma argument som i Proposition 6.3 ger då att Büchis kvadratförmodan (se sid. 53) gäller (vi följde just Vojtas argumentering) fast man förmodar att redan Büchisekvenser av längd 5 är triviala (Förmodan 5.1 medför det för längd 6).

TABELL 4: Exceptionella septuppler
A = Allison, B=Bremner, BB = Browkin och Brzeziński.

53	173	217	233	227	197	127	*A*
526	337	160	113	274	461	652	*A*
3131	2351	1761	1589	1949	2631	3449	*B*
4630	2713	1544	2551	4442	6485	8572	*B*
5207	3025	337	41	2369	5153	7295	*B*
12515	7459	10143	17273	25339	33675	42121	*BB*
12871	9822	9373	11824	15885	20626	25673	*BB*
16620	12817	11314	12939	16808	21755	27198	*BB*
19920	8527	11074	23379	36668	50165	63738	*BB*
28621	10460	12651	31162	50423	69816	89255	*B*
40196	80351	98726	107179	108064	101579	86074	*B*
53331	36943	25885	27567	40429	57391	75747	*B*
87455	81103	79239	82169	89423	100065	113143	*BB*
572321	1938531	2969567	3938125	4881537	5812061	6735041	*B*
1237931	826051	436459	238499	530581	929731	1343701	*B*
1633911	1942706	3402469	5106636	6875821	8670314	10477119	*B*
2256701	1444880	1051139	1464358	2281673	3207796	4170865	*B*
258833915	247112534	311124657	417368948	541534361	673785150	810171421	*B*
490912179	325332727	178638667	138585489	260238115	421266649	590280507	*B*

7 Hilberts tionde problem – några generaliseringar

Även om Hilberts fråga om Diofantiska ekvationer besvarades i dess ursprungliga formuleringen för heltalsringen $\mathbb{Z}$ genererar den liknande frågeställningar när det gäller andra ringar. Hur är det om man ersätter heltalen med de rationella? Kan man möjligen hitta en algoritm om man ersätter heltalen med en större talring? Vad kan man säga om fallet då $\mathbb{Z}$ ersätts med ringar som ofta förekommer i talteori och uppvisar en rad likheter till heltalen – polynomringar över ändliga kroppar eller deras ändliga utvidgningar.

Många matematiker har arbetat intensivt med dessa frågor efter det en lämplig begreppsapparat byggdes i samband med det ursprungliga problemet. Som vi påpekade tidigare var det preciseringen av algoritmbegreppet som gränsar till matematisk logik (eller som idag kunde också placeras i närheten av datalogi) som var mycket viktig för lösningen av Hilberts problem. I den sista sektion kommer vi inte att fördjupa oss i dessa begrepp utan bara kort nämna några av lösta och olösta problem relaterade till Hilberts tionde problem. Det finns en utmärkt presentationen av denna problematik i en populär artikel av Björn Poonen i [Po].

Först och främst låt oss notera att frågan om existensen av en algoritm för Diofantiska polynomekvationer över de rationella talen fortfarande saknar lösning. Rent allmänt om R är en kommutativ ring så är Hilberts tionde problem över R frågan om det finns en algoritm som kan avgöra om en given polynomekvation $f(X_1, \ldots, X_n) = 0$ med koefficienter i R har eller inte har en lösning i R dvs om det finns eller inte finns $(x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ så att $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$. Alltså vet man inte om en sådan algoritm existerar då $R = \mathbb{Q}$. Man vet däremot att en algoritm finns då $R = \mathbb{R}$ eller $\mathbb{C}$ (de reella och de komplexa talen) eller $R = \overline{Z}$

är ringen av alla algebraiska heltal. Ett algebraiskt heltal är ett komplext tal som uppfyller en polynomekvation med heltaliga koefficienter och den högsta koefficienten lika med 1 (t.ex. i, $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{2}$ är algebraiska heltal som lösningar till ekvationer $X^2+1=0, X^2-2=0, X^3-2=0$).

Den allmänna gissningen är att i likhet med heltalen $\mathbb{Z}$ har Hilberts fråga ett negativt svar då R betecknar heltalen i en godtycklig ändlig utvidgning av den rationella talkroppen. Detta har visats för flera klasser av talkroppar i arbeten av J. Denef, L. Lipshitz, T. Pheidas, B. Poonen och A. Shlapentokh (se [Po] för referenser och närmare diskussion). Forskningen kring Hilberts tionde problem är fortfarande mycket viktig och levande tack vare flera nya upptäckter av samband mellan problemet över olika ringar och andra viktiga och intressanta problem i bl.a. teorin för elliptiska kurvor och vidhörande aritmetisk algebraisk geometri. Problemområdet har en rad förgreningar inom matematisk logik (datalogi), funktionsteori och inte minst i olika delar av talteorin.

Appendix

I detta appendix visar vi att existensen av en funktion $f(X) = aX^2 + bX + c$, där a, b, c är relativt prima heltal och $b^2 - 4ac \neq 0$ som antar kvadratvärden för n efterföljande heltalsvärden på X är ekvivalent med existensen av en kvadratsekvens av längd n med konstanta andradifferenser lika med $2a$.

Om $f(X) = aX^2 + bX + c$ antar kvadratvärden för $x = 0, 1, 2, 3, \ldots$ så har vi följande talsekvenser där vi i första raden skriver $f(0), f(1), f(2), \ldots$ i andra raden, differenserna av de efterföljande talen i första raden, och i den tredje raden, differenserna av talen från den andra raden:

$$\begin{array}{cccccccc}
c & & a+b+c & & 4a+2b+c & & 9a+3b+c & \ldots \\
 & a+b & & 3a+b & & 5a+b, & & \ldots \\
 & & 2a & & 2a & & 2a & \ldots
\end{array}$$

Det är lätt att inse att alla andradifferenser är lika med $2a$.

Omvänt, om $x_1^2, x_2^2, \ldots, x_n^2$ är en sekvens vars kvadrater har den andradifferensen konstant och lika med D, så kontrollerar man lätt med hjälp av rekurensrelationen $x_i^2 - 2x_{i+1} + x_{i+2}^2 = D$ for $i = 1, \ldots, n-2$ att

$$f(X) = D\frac{X^2 - X}{2} + (x_2^2 - x_1^2)X + x_1^2$$

antar kvadratvärden då $x = 0, 1, 2, \ldots, n-1$.

Referenser

[A] D. Allison, On square values of quadratics, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 99(1986), 381–383.

[ALT] M. Artebani, A. Laface, D. Testa, On Büchi's K3 surface, arXiv:1212.1426 (2012), från http://arxiv.org/pdf/1212.1426v1.

[Ba] E.J. Barbeau, Numbers differing from consecutive squares by squares, Canad. Math. Bull. 28(1985), 337–342.

[Br] A. Bremner, On square values of quadratics, Acta Arith. 108(2003), 95–111.

[BB] J. Browkin, J. Brzeziński, On Sequences of Squares with Constant Second Differences, Canad. Math. Bull. 49(2006), 481–491.

[BB2] J. Browkin, J. Brzeziński, On Sequences of Squares with Constant Second Differences II (http://cage.ugent.be/dnt/slides/Browkin-Brzezinski.pdf)

[Bu] D.A. Buell, Integer Squares with Constant Second Difference, Math. Comp. 49(1987), 635–644.

[C] J.E. Cremona, Elliptic Curve Data, http://homepages.warwick.ac.uk/∽masgaj/ftp/data/

[G-JX] E. González-Jiménez, X. Xarles, On symmetric square values of quadratic polynomials, Acta Arith. 149(2011), 145–159.

[H] D. Hensley, Sequences of squares with second difference of two and a problem of logic, Sequences of squares with second difference of two and a conjecture of Büchi, unpublished, (1980-1983).

[L] L. Lipshitz, Quadratic forms, the five square problem, and diophantine equations. In: The Collected Works of J. Richard Büchi (S. MacLane Dirk Siefkes, eds.), Springer, 1990, 677–680.

[PPV] H. Pasten, T. Pheidas, X. Vidaux, A survey on Büchi's problem : new presentations and open problems, in Proceedings of the Hausdorff Institute of Mathematics, 2010.

[Pi] R.G.E. Pinch, Squares in Quadratic Progressions, Math. Comp. 60(1993), 841–845.

[Po] B. Poonen, Undecidability in number theory, Notices of the AMS 55(2008), 344–350.

[Vi] X. Vidaux, Polynomial parametrizations of length 4 Büchi sequences, Acta Arith. 150(2011), 209–226.

[Vo] P. Vojta, Diagonal quadratic forms and Hilbert's Tenth Problem, in: Contemp. Math. 270(2000), 261–274. Amer.Math.Soc., Providence, RI.

[Vs] M. Vsemirnov, Hilbert's tenth problem page. Website under the supervision of Yuri Matiyasevich, http://logic.pdmi.ras.ru/Hilbert10.

[W] L.C. Washington, Elliptic Curves, CRC Press, Boca Raton, London, New York, 2008.