Dypdykk i ufornuften, irrasjonale tall og det som verre er

Christoph Kirfel

Matematisk institutt ved Universitetet i Bergen
Joh. Brunsgt. 12
N-5008 Bergen, Norge
christoph.kirfel@math.uib.no

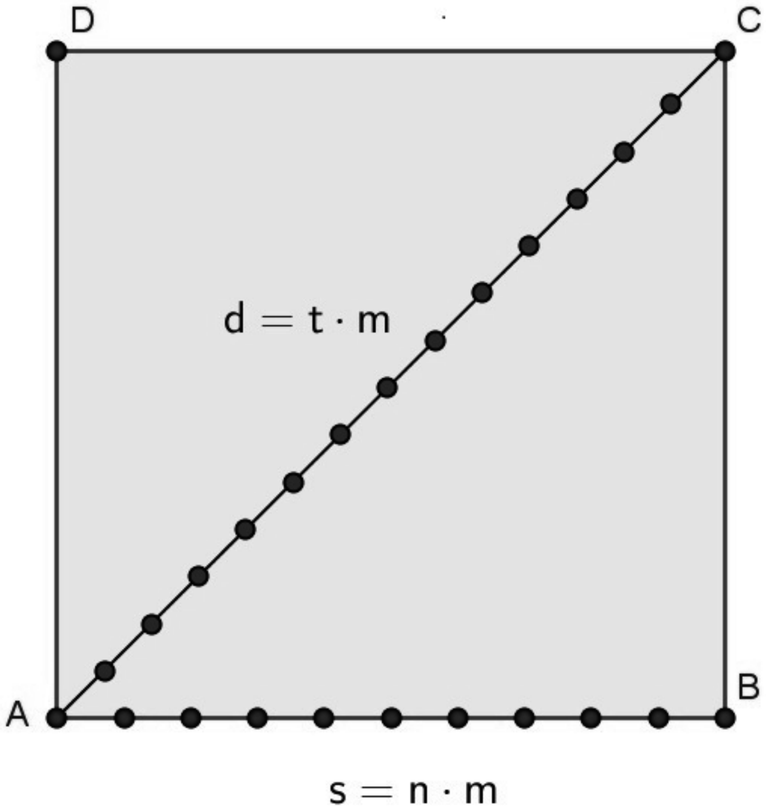
Gjennom barneskolen, ungdomsskolen og videregående skole bygges tallbegrepet hos ungdommer opp. Brøkbegrepet står på mange måter sentralt. Mange ungdommer strever med brøk og da blir det en utfordring å studere nye talltyper som ikke er brøker (irrasjonale tall). Det kan derfor være et poeng å finne gode eksempler for irrasjonale tall som ikke krever for mye av elevene når det gjelder abstraksjon og forkunnskaper. I den første delen av denne artikkelen skal vi presentere tre tilganger til irrasjonale tall. Her er det didaktiske overveielser som står i fokus og stoffet passer på videregående skole. I del 2 av artikkelen skal vi videreutvikle en av ideene fra del 1. Men nå beveger vi oss utenfor skolepensum. Fra irrasjonale tall skal vi videre til transendente tall men noen av grunnideene vil som sagt likne tankene som ble utviklet i del 1. I den tredje delen av artikkelen studerer vi Eulertalle e og dets irrasjonalitet. Beviset åpner for en del generaliseringer og vi presenterer disse. Dette gir oss en ny måte å generere irrasjonale tall på.

1 Irrasjonale tall

I denne delen av artikkelen skal vi gi tre tilganger til irrasjonale tall. Den første bygger på geometriske argument slik de kunne ha sett ut i Pytagoras tid. Den andre tilgangen er den vi finner i moderne læreverk og den tredje tilgangen er en metode som jeg selv har utviklet og som bygger på desimaltall. Metoden er prøvd ut i to klasser ved Tanks videregående skole i Bergen (Norge). Alle tre tilgangene ble presentert for elevene.

1.1 Tilgang 1

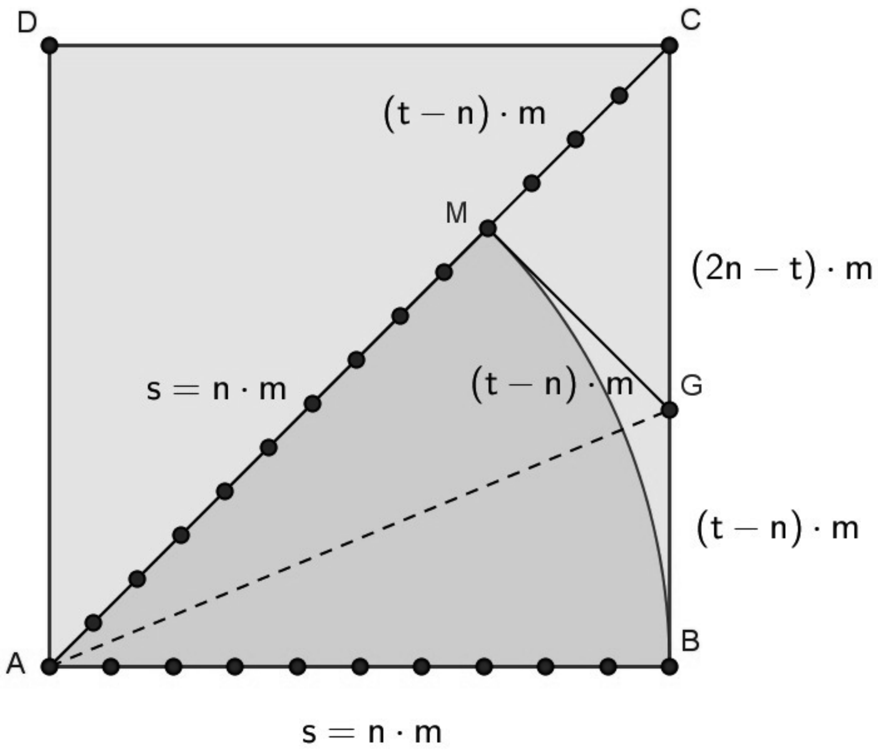
Pytagoras (ca. 572 f.Kr. - ca. 500 f. Kr.) grunnla et brorskap der en dyrket matematikk. Valgspråket deres var "Alt er tall". På den tiden hadde man et noe mer begrenset tallbegrep enn i dag. Når Pytagoreerne snakket om tall så tenkte de på naturlige tall eller forhold av naturlige tall (brøker). Andre former for tall var ikke tenkelig for dem. I geometrien betydde det at alle størrelser (lengder) kunne måles med same måleenhet. Hadde man to lengder i en geometrisk konstruksjon så kunne man finne en måleenhet slik at denne gikk et helt antall ganger opp i den ene lengden og et helt antall ganger i den andre, bare man valgte måleenheten liten nok. Det kom som en stor overraskelse på brødrene når en av dem viste at en slik tankegang ikke alltid var holdbar. Han undersøkte et kvadrat med sidelengde s og diagonal d. I følge grunnsetningen deres skulle det da finnes en måleenhet m slik at $s = n \cdot m$ og $d = t \cdot m$ for to hele tall n og t. Situasjonen ser da slik ut.



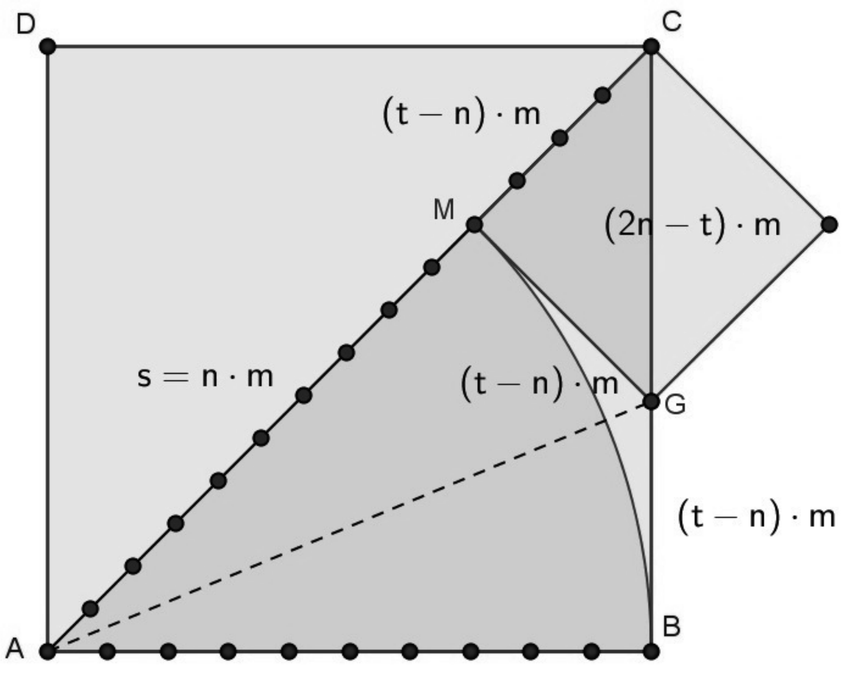
Figur 1

Vi konstruerer nå en sirkelbue om A med radius $s = n \cdot m$ og finner skjæringspunktet M mellom sirkelen og diagonalen. Reststykket MC har da lengden $d - s = (t - n) \cdot m$, også dette er da et heltallig multiplum av måleenheten. Vi oppretter en normal på diagonalen i M og kaller dens skjæringspunkt med sidekanten BC for G. Trekanten GCM er da rettvinklet og har dessuten en vinkel på 45 grader (diagonalen møter sidekanten). Altså er den siste vinkelen også 45 grader og trekanten GCM er likebeint. Dermed har vi $MG = MC = (t - n) \cdot m$. Nå ser vi på trekantene ABG og AGM. Begge er rettvinklete og $AB = AM$. I tillegg er siden AG felles for trekantene. Dermed må trekantene være kongruente og vi kan konkludere at $BG = MG = MC = (t - n) \cdot m$.

Vi fullfører nå trekanten CMG til et kvadrat (se figur 3) og dermed har vi fått følgende situasjon: Vi startet med et kvadrat $ABCD$ der vi kunne finne en måleenhet m som passet et helt antall ganger både i diagonalen og i siden.



Figur 2



Figur 3

Nå har vi konstruert et mindre kvadrat der den samme måleenheten m igjen passer et helt antall ganger både i siden $CM = (t-n) \cdot m$ og i diagonalen $CG = n \cdot m - (t-n) \cdot m = (2n-t) \cdot m$. Denne prosessen kan fortsettes i det uendelige og vi ville fått mindre og mindre kvadrater der både diagonalen og siden vil være multipler av samme måleenhet. Dette går selvsagt ikke an siden kvadratene etter hvert blir mindre enn enhver gitt måleenhet. Dette forbauset også Pytagoreerne. Det var en strek i deres regning. Hvis alt kunne beskrives med naturlige tall og forhold mellom naturlige tall så måtte da dette også gjelde så enkle ting som diagonalen og siden i et kvadrat. Oppdagelsen ble først holdt hemmelig men en "utro" tjener i brorskapet, Hippasos, skal ha røpet hemmeligheten til utenforstående. Legenden forteller at han kort tid etter omkom på sjøen på mysteriøs vis. Etter hvert måtte også Pytagoreerne innse at oppdagelsen ikke kunne fornektes og at vi her hadde et eksempel hvor forholdet mellom to geometriske lengder ikke kunne skrives som et forhold av to naturlige tall. Dette var en alvorlig krise for brorskapet. Idéen om irrasjonale tall var født. Selv idag virker dette nye tallbegrepet noe absurd eller "ufornuftig" for mange, derav navnet "irrasjonale tall".

1.2 Tilgang 2

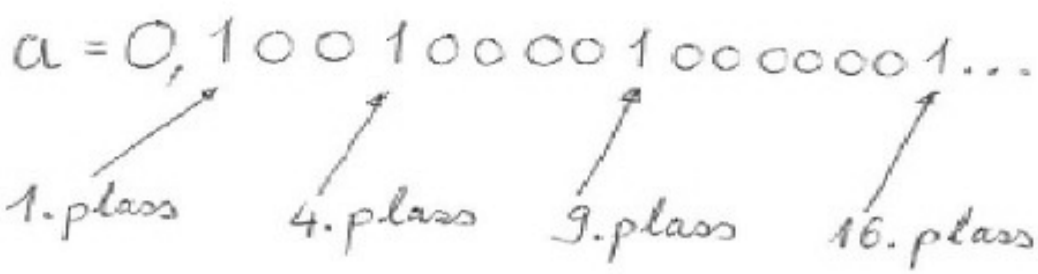
I denne delen argumenterer vi algebraisk. Vi ser på tallet $\sqrt{2}$ og viser at det ikke kan skrives som brøk. Vi antar det motsatte, altså at $\sqrt{2}$ kan skrives som brøk og ser at denne antakelsen fører oss til en selvmotsigelse. Vi antar altså at $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ der p og q er naturlige tall. Vi kan anta at brøken er forkortet. Så kvadrerer vi begge sidene i likningen og får $2 = \frac{q^2}{p^2}$ eller $2p^2 = q^2$. Det kan vi lese slik at p^2 er et jamt kvadrattall. Undersøker vi rekken av kvadrattall nærmere gjør vi en liten oppdagelse:

$$\begin{aligned}
1^2 &= 1 \\
2^2 &= 4 \\
3^2 &= 9 \\
4^2 &= 16 \\
5^2 &= 25 \\
6^2 &= 36 \\
\ldots & \quad \ldots
\end{aligned}$$

Vi ser at de jamne kvadrattallene faktisk ligger i 4-gangen. Er et kvadrattall et partall så er nemlig også grunntallet et partall, altså $p = 2k$ og $p^2 = 4k^2$ og dermed $2q^2 = 4k^2$ som gir oss $q^2 = 2k^2$ og dermed må også q^2 være et jamt kvadrattall. Dette igjen fører til at q selv må være et partall. Da er altså både p og q partall og brøken $\frac{p}{q}$ var likevel ikke forkortet, en selvmotsigelse. Denne typen argumenter finner en i læreverk på videregående skole (f.eks. Sinus R2) og $\sqrt{2}$ blir gjerne et mønstereksempel på et irrasjonalt tall og argumentet et mønstereksempel på et matematisk bevis.

1.3 Tilgang 3

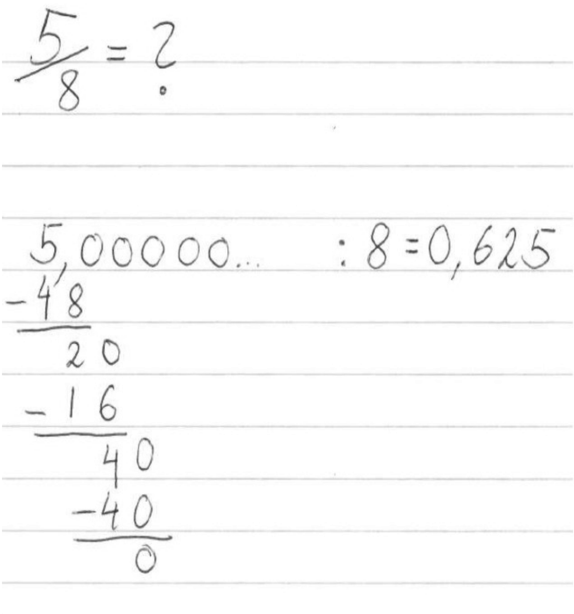
I denne delen av artikkelen vil jeg presentere en alternativ tilgang til irrasjonale tall som etter min mening gir en nokså intuitiv forståelse uten at det blir nødvendig med mange tekniske detaljer og nye formler. Eksempelet tar utgangspunkt i desimaltallsbegrepet, noe som er muligens godt rotfestet hos elevene og ikke krever i utgangspunkt mye abstraksjon. Vi lager oss et desimaltall a som vi senere vil vise umulig kan skrives som en brøk. Vi lager tallet ved å "fylle inn" desimalutviklingen av tallet. Vi starter slik:



Figur 4

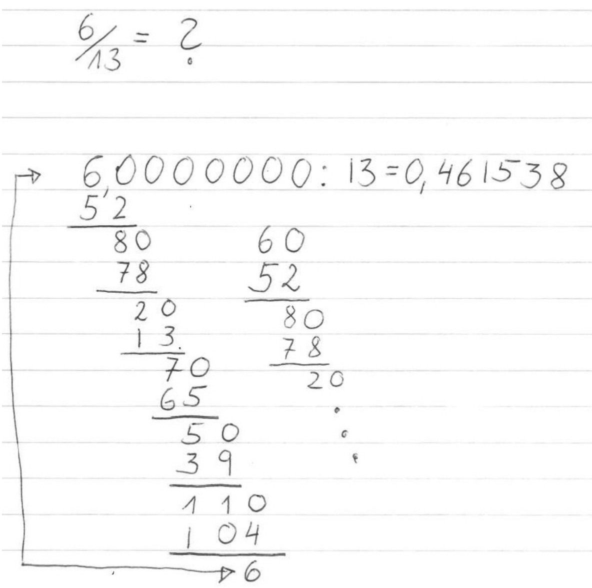
Strikkemønsteret her er følgende: Vi legger en ener i første desimal etter komma, så en ener i fjerde desimal, så i niende, sekstende, osv. Vi legger altså en ener der tallet for posisjonen er et kvadrattall. Slik fortsetter vi i det uendelige og resten fyller vi ut med nullere. Dette må jo bli et fint desimaltall.

Poenget er nå følgende at dette tallet ikke kan skrives som en brøk. På en noe nonchalant måte kunne vi forklare dette slik. Arbeider man med overgangen fra brøk til desimaltall og har man regnet en del eksempler, ser det ut til at det bare er to muligheter når vi skal skrive en brøk som desimaltall. Enten går divisjonen opp etter et visst antall steg og desimaltallet ender med bare nullere slik som i $3/4 = 0,75000$, eller hvis divisjonen ikke går opp selv etter mange steg som i $1/3$, får vi et repeterende mønster med en fast periode. For $1/3$ er perioden 1, for $1/7 = 0,142857142857?$ er perioden 6. Andre brøker kan ha lengre perioder. Men hver brøk skrevet som desimaltall har en viss fast periode. Det at divisjonen går opp etter et visst antall steg kan også oppfattes som et gjentagende mønster, der sifferet null blir repetert og periodelengden er 1. Det er imidlertid slik at dersom en bruker kalkulator for å representere en brøk som desimaltall, vil det i noen tilfeller være slik at en ikke ser mønsteret opptre fordi en ikke har nok tilgjengelige siffer. Siden tallet a tilsynelatende ikke følger et slikt mønster og har større og større hull (blokker av nullere) jo lenger vi kommer bak kommaet, kan a ikke være en brøk. Vi prøver å presisere denne forklaringen. Først ser vi på to eksempler der vi regner ut desimalutviklingen til to brøker.



Figur 5

En brøk $\frac{p}{q}$, der p og q er to heltall og q er forskjellig fra null kan skrives om som desimaltall ved å utføre det oppstilte delingsstykke $p : q$, slik vi lærer det på barneskolen. For hvert trinn i divisjonen får vi en rest som må være mindre enn nevneren q. Det betyr at det finnes høyst q forskjellige mulige rester denne divisjonsprosessen kan produsere. Har vi kommet så langt i divisjonsprosessen at vi bare henter nullere bak komma ned i hvert skritt av divisjonsalgoritmen, så vil restene etter maksimalt q steg gjenta seg.



Figur 6

Men da vil også hele divisjonsprosessen gjentar seg fra det stedet av og vi får et repeterende mønster i desimalutviklingen slik som i eksemplene overfor. Anta nå at tallet $a = \frac{p}{q}$ kan skrives som en brøk. Da vil denne brøken ha en desimalutvikling og vi har de to nevnte mulighetene. Enten så går divisjonen opp etter et visst antall steg og desimalutviklingen slutter på null som repeterer seg. Dette er åpenbart ikke tilfelle, siden desimalutviklingen av a inneholder uendelig mange ettall. Da må vi ha det andre alternativet, nemlig at desimalutviklingen har et repeterende mønster. La oss si at perioden er k. Dvs. repetisjonsmønsteret har lengde k. Hvis vi går til ettall nummer k i desimalutviklingen for a, altså til posisjon k^2 (eller et av de senere ettallene) så vil det følge minst $2k$ nullere og vi må konkludere at repetisjonsmønsteret bare består av nullere, noe som åpenbart ikke kan stemme. Avstanden mellom kvadrattall nummer $k+1$ og kvadrattall nummer k er nemlig $(k+1)^2 - k^2 = k^2 + 2k + 1 - k^2 = 2k + 1$. Argumentet ovenfor utvides fra tallet a som var bygget opp på kvadrattallsfølgen til mange flere desimaltall der lengden av blokkene med nullere vokser. Tallet $w = 0,1010010001000100001$ er bygget opp slik: Først har vi en null, så to, så tre, så fire nullere mellom enerne våre osv. Tallet w vil heller ikke kunne skrives som en brøk. Man kan selvsagt tenke seg mange varianter her. Det viktigste er at avstanden mellom ettallenevokser". Det er nok for å ødelegge for repeterende mønster som alle brøker genererer. Det er ikke nødvendig at en bruker ettall mellom nullere og en kan gjerne bruke forskjellige siffer i de posisjonene som ikke er null. Hva med tallet som har ettall i posisjon, 1, 2, 4, 8, 16 osv. etter komma og ellers nullere? På dette punktet fikk elevene i R1-klassen på Tanks videregående skole i oppdrag å lage sitt eget, personlige irrasjonale tall. Først var elevene noe perpleks. Hva var det de skulle gjøre? Men etter noe tid kom de første forslagene og snart var hele klassen i gang med å overtrumfe hverandre med kompliserte desimaltallsmønstre som munnet ut i irrasjonale tall. Tallene fikk greske bokstaver. Trond fikk bokstaven τ (les tau). Hans tall så slik ut

$$\tau = 0,123456789101112...$$

Han måtte forklare hvorfor tallet ikke kunne være rasjonalt. Det var en utfordring men han klarte å overbevise klassekameratene.

Lenas tall skulle hete λ (les lambda). Det så slik ut

$$\lambda = 0,112113111411115111111....$$

Også hun kunne overbevise klassen at hennes tall var irrasjonalt. Guris tall ble hetende γ (les gamma) og så slik ut

$$\gamma = 0,311131111131111111113...$$

Heller ikke her var klassen i tvil om at hun hadde funnet et irrasjonalt tall, da hun var ferdig med sin forklaring.

Kåre hadde laget tallet κ (les kappa). Det hadde følgende form

$$\kappa = 0,122333444455555...$$

Selvsagt hadde også han funnet et irrasjonalt tall.

Berit hadde laget tallet

$$\beta = 0,102003000400005...$$

og vi ble raskt overbevist om irrasjonaliteten. Noe mer innviklet syntes klassen var Martes tall (my):

$$\mu = 0,1111411149114916114916251149162536...$$

men også her ble vi overbevist til slutt.

Spørrerundersøkelsen i slutten av timen gav noen viktige opplysninger: 1.) Elevene fremhevet nettopp dette oppdraget å lage et personlig irrasjonalt tall som læringsfremmende. Her hadde de lært noe nytt. Oppdraget virket motiverende. 2.) I sammenlikningen av de forskjellige tilgangene til irrasjonale tall, foretrakk elevene desimaltallstilgangen. Den var enklest å forstå. 3) Elevene mente at de hadde lært mer om rasjonale tall, spesielt periodisiteten hadde vært uklar for dem tidligere og hadde nå falt på plass.

Tilgangen via desimaltall har et kreativt aspekt samtidig som det åpner for en stor variasjon av løsninger. Ber man elevene om forklaringer og argumenter for irrasjonaliteten av sine ”produkter” kan en komme opp i interessante diskusjoner og en har muligheten til å styrke elevenes matematiske tankeevne og språk. På mange måter hadde denne delen av undervisningsøkten kvaliteter av et ”undersøkelseslandskap” (se Skovsmose [3]), der elevenes nysgjerrighet var en pådriver og der det var umulig å kunne forutsi utviklingen. Jeg vil takke Anne Bjørnestad og Ranka Blazevic for at de åpnet sine R1-klasser på Tanks videregående skole slik at jeg kunne prøve ut opplegget.

2 Transendente tall

I denne delen av artikkelen ønsker vi å utvide ”teknikken” der vi laget irrasjonale tall som desimaltall med et spesielt mønster til å gjelde enda mer generelle talltyper. Vi starter med

$$\begin{aligned} b &= N,1010000001000000000000000001... \\ &= N + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^{3^2}} + \frac{1}{10^{3^3}} + \cdots \end{aligned}$$

Her står N for heltallsdelen av tallet b. Vi får da samtidig en følge av tilnærmingsdesimalbrøker til b, nemlig tallene

$$\begin{aligned} b_0 &= N \\ b_1 &= N,1 \\ b_2 &= N,101 \\ b_3 &= N,101000001 \\ &\cdots \\ b_n &= N + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^{3^2}} + \frac{1}{10^{3^3}} + \cdots + \frac{1}{10^{3^n}} \end{aligned}$$

Med de samme argumentene som i vårt første eksempel innser vi at b ikke kan være et rasjonalt tall. Men vi skal gå lenger denne gangen. Vi skal vise at b ikke kan være roten av et heltall heller. Til det så antar vi det motsatte, nemlig at b er en kvadratrot $b = \sqrt{m}$, der m er et heltall. Vi skal nå vise at denne antakelsen fører oss til en selvmotsigelse. Vi undersøker nå avstanden mellom b og en av de tilnærmelsesdesimalbrøkene b_n. Det er klart at tilnærmelsesdesimalbrøkene er brøker som har en tierpotens som nevner $b_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n}{10^{3^n}}$. Det er lett å se at følgende gjelder for avstanden vi interesserer oss for

$$\begin{aligned} b - b_n &= (N + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^{3^2}} + \frac{1}{10^{3^3}} + \cdots + \frac{1}{10^{3^n}} + \cdots) - \\ &\quad (N + \frac{1}{10} + \frac{1}{10^3} + \frac{1}{10^{3^2}} + \frac{1}{10^{3^3}} + \cdots + \frac{1}{10^{3^n}}) \\ &= \frac{1}{10^{3^{n+1}}} + \frac{1}{10^{3^{n+2}}} + \cdots < \frac{2}{10^{3^{n+1}}}. \end{aligned}$$

På den andre siden kan vi ved hjelp av tredje kvadratsetning skrive

$$\begin{aligned} b - b_n &= \sqrt{m} - b_n = \frac{\sqrt{m}^2 - b_n^2}{\sqrt{m} + b_n} = \frac{m - b_n^2}{\sqrt{m} + b_n} = \frac{mq_n^2 - p_n^2}{q_n^2(\sqrt{m} + b_n)} \\ &> \frac{1}{q_n^2 \cdot 2 \cdot \sqrt{m}} = \frac{1}{10^{2\cdot 3^n} \cdot 2 \cdot \sqrt{m}}. \end{aligned}$$

Her brukte vi at uttrykket $mq_n^2 - p_n^2$ må være minst lik 1 siden det er et positivt heltall. Dessuten benyttet vi oss av $\frac{1}{\sqrt{m}+b_n} > \frac{1}{2\cdot\sqrt{m}}$ siden $b_n < \sqrt{m}$. Setter vi ulikhetene sammen får vi

$$\frac{1}{10^{2\cdot 3^n} \cdot 2 \cdot \sqrt{m}} < b - b_n < \frac{2}{10^{3^{n+1}}}$$

som gir oss $\frac{10^{3^{n+1}}}{10^{2\cdot 3^n}} < 4\sqrt{m}$ eller $10^{3^n} < 4\sqrt{m}$. Men dette kan ikke være riktig for alle n. Er verdien av n stor nok vil tierpotensen overskride $4\sqrt{m}$ og ulikheten gjelder ikke lenger. Dermed kan vi ikke lenger opprettholde vår antakelse at b kan skrives som en kvadratrot av et naturlig tall. Med små endringer kan vi vise at b ikke kan være roten av en brøk heller. Vi antar $b = \sqrt{\frac{r}{s}}$ og gjennomfører det samme argumentet som i stad. Vi får

$$\begin{aligned} b - b_n &= \frac{\frac{r}{s}q_n^2 - p_n^2}{q_n^2(\sqrt{\frac{r}{s}} + b_n)} = \frac{rq_n^2 - sp_n^2}{q_n^2 s(\sqrt{\frac{r}{s}} + b_n)} \\ &> \frac{1}{q_n^2 \cdot 2 \cdot s\sqrt{\frac{r}{s}}} = \frac{1}{10^{2\cdot 3^n} \cdot 2 \cdot \sqrt{rs}}. \end{aligned}$$

og til slutt $10^{3^n} < 4\sqrt{rs}$ som fører oss til samme selvmotsigelse som oppe. Dermed har vi vist at konstruksjonen av desimaltall etter vårt mønster førte oss først frem til tall som ikke kunne være brøker, så til tall som ikke kunne være røtter av brøker. Nå skal vi generalisere våre observasjoner enda lenger. Vi skal se på algebraiske og transendente tall. Et algebraisk tall er et tall som oppfyller en polynomlikning med rasjonale koeffisienter (koeffisientene er brøker). Innledningsvis nevnte vi at $\sqrt{2}$ ofte er det første tallet elevene møter som ikke er rasjonalt, altså som ikke kan skrives som en brøk. Men $\sqrt{2}$ er et algebraisk tall siden det passer i polynomlikningen $x^2 - 2 = 0$ og koeffisientene til dette polynomet er rasjonale (her til og med heltall). På samme måte vil $\sqrt{3}, 7^{1/3}$og $13^{1/7}$ være algebraiske tall siden de passer i polynomlikninger der alle koeffisientene er rasjonale. Noen ganger kan vi ikke skrive disse tallene som et rotuttrykk eller et uttrykk der flere røtter er kombinert. For likninger av grad høyere enn fire kan vi ikke alltid skrive nullpunktene som en kombinasjon av vanlige rottegn. Da kan vi bare si at vi tenker på en løsning av polynomlikningen $x^5 + \frac{4}{5}x^4 + \frac{7}{3}x^3 + x^2 - \frac{3}{8}x + 5 = 0$ og kaller det tilhørende tallet α . Tallet α vil da være algebraisk. For hvert slikt algebraisk tall α finnes det et polynom med rasjonale koeffisienter av minste grad der α er løsning. Vi kan kreve at koeffisienten foran den høyeste potensen er 1. Et slikt polynom heter minimalpolynom til α og graden til minimalpolynomet kaller vi for graden til α. Det er nå lett å se at et slikt minimalpolynom vil være irredusibelt, dvs. at det ikke kan skrives som produkt av to polynomer av mindre grad som også har rasjonale koeffisienter. Hvis nemlig $f(x) = g(x) \cdot h(x)$ var et redusibelt polynom og α var en rot, så ville α også være rot i en av faktorene. Men disse er av mindre grad og dermed ville ikke f ha vært minimalpolynom. Vi skal nå vise noen resultater om algebraiske tall og til slutt konstruere et nytt "desimaltall" som umulig kan oppfylle disse egenskapene til algebraiske tall. Dette tallet må derfor være av en helt ny type. Reelle tall som ikke er algebraiske kalles transendente og vi skal altså vise hvordan en kan "konstruere" transendente tall. Vi benytter oss av samme teknikk som tidligere. Vi lager et desimaltall med sifrene 0 og 1 og vi angir en "regel" hvor ettallene skal stå. Resten fylles ut med nullere. Denne gangen setter vi en ener i alle posisjoner som svarer til en fakultet $n!$. Siden

$$\begin{aligned}
1! &= 1 \\
2! &= 1 \cdot 2 = 2 \\
3! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \\
4! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \\
5! &= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120 \\
\cdots
\end{aligned}$$

ser starten på tallet vårt c slik ut:

$$c = 0,110001000000000000000000100...$$

Vi ser nå på de forskjellige desimalbrøkene som beskriver starten på vårt nye tall, altså følgen

$$
\begin{aligned}
c_1 &= 0,1 = \frac{1}{10} \\
c_2 &= 0,11 = \frac{11}{100} \\
c_3 &= 0,110001 = \frac{110001}{1000000} \\
c_4 &= 0,110001000000000000000001 = \frac{110001000000000000000001}{1000000000000000000000000} \\
&\ldots
\end{aligned}
$$

Da ser vi lett at det for avstanden mellom c_n og c gjelder $c - c_n \leq 2 \cdot 10^{-(n+1)!}$. Her tok vi et 2-tall i stedet for et ettall for å ha en sikker skranke når vi tar med alle de resterende desimalene i c. Vi antar nå at c er et algebraisk tall med minimalpolynom $f(x)$. Da har vi $f(c) = 0$. Vi kan derfor skrive $f(x) = (x - c)g(x)$ der g også er et polynom men ikke nødvendigvis med rasjonale koeffisienter. Vi undersøker nå om $g(c)$ kan være null. Hvis ja, så kan f skrives som $f(x) = (x - c)^2 h(x)$ der igjen h er et polynom (ikke nødvendigvis med rasjonale koeffisienter). Vi tar nå en titt på den deriverte $f'(x)$ av f og skriver:

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= ((x-c)^2 h(x))' = 2(x-c)h(x) + (x-c)^2 h'(x) \\
&= (x-c)(2h(x) + (x-c)h'(x)) = (x-c)t(x)
\end{aligned}
$$

Det betyr at både f og f' har faktoren $(x - c)$. Siden både $f$og f? er polynomer med rasjonale koeffisienter vil også deres største felles divisor være et polynom med rasjonale koeffisienter siden vi kan finne den ved polynomdivisjon. Polynomet $(x-c)$ vil da være en divisor i denne største felles divisoren og dermed har denne divisoren positiv grad. Det betyr igjen at f har en ekte divisor med rasjonale koeffisienter noe som strider mot irredusibiliteten. Konklusjonen blir altså at $g(c) \neq 0$. Siden g som polynom er en kontinuerlig funksjon finnes det et lite intervall rundt x-verdien c, der funksjonen fortsatt er forskjellig fra null, altså finnes det et intervall $I = [c - \delta, c]$ slik at $g(x) \neq 0$ for alle $x \in I$. Vi ser nå på en av tilnærmelsesdesimalbrøkene $c_n = \frac{p_n}{q_n} = \frac{p_n}{10^{n!}}$ som ligger i intervallet I, dvs. vi velger n så stor at den tilhørende brøken ligger i intervallet. La oss si at minimalpolynomet kan skrives som

$$
f(x) = x^k + \frac{u_{k-1}}{v_{k-1}} x^{k-1} + \frac{u_{k-2}}{v_{k-2}} x^{k-2} + \cdots + \frac{u_1}{v_1} x + \frac{u_0}{v_0},
$$

der u_i og v_i er heltall. La G være fellesnevneren for alle nevnerne i koeffisientene i polynomet f. Da kan vi skrive

$$
Gf(x) = Gx^k + w_{k-1} x^{k-1} + w_{k-2} x^{k-2} + \cdots + w_1 x + w_0,
$$

der alle w_i er heltall. Så ser vi på differansen

$$\begin{aligned} c - c_n &= c - \frac{p_n}{q_n} = \frac{f(p_n/q_n)}{g(p_n/q_n)} = \frac{Gp_n^k + w_{k-1}p_n^{k-1}q_n + w_{k-2}p_n^{k-2}q_n^2 + \cdots + w_0 q_n^k}{G \cdot q_n^k g(p_n/q_n)} \\ &\geq \frac{1}{G \cdot q_n^k M}. \end{aligned}$$

Her er alle ledd i telleren heltall og samlet må telleren derfor være ≥ 1 . Konstanten M er maksimum til g i intervallet I. Setter vi ulikhetene sammen får vi

$$\frac{1}{(10^{n!})^k GM} \leq c - c_n < 2 \cdot 10^{-(n+1)!}$$

som etter litt omforming gir $\frac{10^{(n+1)!}}{10^{k \cdot n!}} < 2GM$ eller $10^{(n+1)! - kn!} < 2GM$. Men nå er$(n+1)! - kn! = (n+1-k)n!$ en funksjon som vokser over alle grenser for fast k og dermed vil ulikheten ikke kunne gjelde for alle n og vi får en selvmotsigelse. Dermed kan altså c ikke være et algebraisk tall og vi har lyktes i å konstruere et transendent tall. Dette resultatet for algebraiske tall ble først vist av den franske matematikeren Liouville i 1844, se [1]. Kaller vi funksjonen som forteller hvilke desimaler som skal besettes med en ener for $e(n)$, da har vi i dette tilfellet: $e(n) = n!$ og det gjelder $e(n+1) - ke(n)$ er en funksjon som vokser over alle grenser. Ønsker vi å konstruere nye transendente tall må vi bare sørge for at funksjonen $e(n+1) - ke(n)$ vokser over alle grenser (så lenge k er fast). Da vil argumentasjonen ovenfor kunne overtas og det nye tallet vil automatisk være transendent. Velger vi $e(n) = 2^{n^2}$ så er betingelsen oppfylt og vi får et nytt transendent tall. Andre eksempler er $e(n) = n^n$ eller $e(n) = 2^{2^n}$. Til og med funksjoner som $e(n) = \sqrt{n!}$ eller $e(n) = (n!)^{1/3}$ fungerer i denne sammenhengen. I det aller første eksempelet i denne artikkelen var $e(n) = n^2$. Dette eksempelet kan dessverre ikke brukes til å påvise transendens med denne metoden her. Men vi kunne vise at $e(n) = n!$ gir et transendent tall. I spennet mellom disse funksjonene vil vi muligens kunne lage desimaltall som svarer til algebraiske tall. Men så snart funksjonen $e(n)$ vokser så fort som fakultetsfunksjonen har vi passert grensen for transendente tall.

Tillegg: Går man gjennom beviset for transendensen til c en gang til kan man gjøre en viss generalisering. Vi kaller s_k sifferet i posisjon k. Hos oss har det hele tiden vært 1 eller 0, men man kan tenke seg at man velger andre ting her. Det kan også være større enn 9. Men det må være et heltall. Desimaltallet vi får da kaller vi d . Igjen er d_n tilnærmelsesdesimalbrøkene til d. Da får vi

$$\frac{1}{(10^{n!})^k GM} \leq d - d_n < 2 \cdot s_{n+1} 10^{-(n+1)!}$$

og vi må sørge for at $10^{(n+1)! - kn!} < 2GMs_{n+1}$ ikke kan holde for alle n. Men der er jo plenty av plass for s_n å vokse til og med eksponentielt og vel så det. Det samme kan en selvsagt også overføre til argumentet med funksjonen $e(n)$. Eksempelvis kan man la s_n være definert slik

$$s_n = \begin{cases} p^3 + 1 \\ 0 \end{cases}$$

Her velger vi det første alternativet når $n = p!$ for et naturlig tall p og det andre alternativet ellers. Da vil begynnelsen på vårt transendente tall d se slik ut

$$d = 0,2900280000000000000000006500...$$

Her åpner det seg store muligheter for å variere den enkle oppskriften vi startet med.

3 Irrasjonaliteten av Eulertallet e og beslektede tall

Allerede i 1815 kunne Jean Baptiste Fourier (1768-1830) vise at Eulertallet e er irrasjonalt. Vi skal følge hans fotspor her og benytter oss av følgende definisjon:

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$$

Vi antar nå at tallet e kan skrives som en brøk $e = \frac{p}{q}$. Da får vi

$$\frac{p}{q} = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots$$

Ganger vi begge sider med $q!$ får vi følgende

$$\begin{aligned} (q-1)!p &= q!(1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots) \\ &= q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + \frac{q!}{q!} + \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} \cdots \end{aligned}$$

Venstresiden er selvsagt et heltall. Det er også de første $q+1$ leddene på høyresiden. Vi studerer nå restleddet

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{q!}{(q+1)!} + \frac{q!}{(q+2)!} + \frac{q!}{(q+3)!} + \cdots \\ &= \frac{1}{(q+1)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)} + \frac{1}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \cdots \\ &< \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} + \cdots = 1. \end{aligned}$$

Dermed har vi følgende situasjon. Et heltall $(q-1)!p$ er lik et annet heltall $q! + \frac{q!}{1!} + \frac{q!}{2!} + \frac{q!}{3!} + \cdots + \frac{q!}{q!}$ pluss et tall mellom null og en, en selvmotsigelse og antakelsen vår at Eulertallet e kan skrives som en brøk er uholdbar. Den siste likheten $\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} + \cdots = 1$ trenger muligens en kort forklaring. Uttrykket er en geometrisk rekke. Vi kjenner den kanskje bedre igjen når vi starter med 1, altså $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} + \cdots = \frac{1}{1-1/2} = 2$.

Dermed må uttrykket som vi har være lik $2 - 1 = 1$. Idéen som ligger bak dette eksempelet tar vi nå videre til et noe mer generelt resultat som bygger på de samme argumentene.

Teorem 1. La $a_i, i \geq 1$ være en følge av naturlige tall der $a_i \geq 2$ og der $\lim_{i\to\infty} a_i = \infty$. Sett $q_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$, da er tallet $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i}$ irrasjonalt.

Bevis. Siden $q_n = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n \geq 2^n$ så er $0 < \alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = 1$ og vi har vist at α eksisterer som reelt tall. Vi antar nå at $\alpha = \frac{p}{q}$ kan skrives som en brøk. Da har vi $\frac{p}{q} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i}$. Vi velger nå n så stor at $a_{n+1} > 2q$. Så ganger vi begge sider med $q \cdot q_n$. Da får vi

$$\begin{aligned} p \cdot q_n &= q \cdot q_n \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{q_i} \\ p \cdot q_n &= = q \cdot q_n \left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \cdots + \frac{1}{q_n} \right) + q \cdot q_n \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{q_i} \end{aligned}$$

eller

$$\begin{aligned} & p \cdot q_n - q \cdot q_n \left(\frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} + \frac{1}{q_3} + \cdots + \frac{1}{q_n} \right) = q \cdot q_n \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{1}{q_i} \\ & = q \cdot \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{q_n}{q_i} = q \left(\frac{1}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}} + \frac{1}{a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot a_{n+3}} + \cdots \right) \\ & < \frac{q}{a_{n+1}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} + \cdots \right) = \frac{2q}{a_{n+1}} < 1. \end{aligned}$$

Nå har vi fått den samme selvmotsigelsen som oppe. Venstresiden er et helt tall mens høyresiden er et tall mellom 0 og 1. Vi må altså forkaste vår antakelse at $\alpha = \frac{p}{q}$ kunne skrives som brøk.

Bemerkning: I teoremet er det nok å kreve at følgen $a_i, i \geq 1$ er slik at for hvert tall q eksisterer det en indeks n slik at $a_{n+1} \geq 2q$. Dette er et svakere krav enn $\lim_{i\to\infty} a_i = \infty$. F.eks. oppfyller følgen 2,3,2,4,2,5,2,6,2,7,2,8 det svakere kravet mens grenseverdien ikke eksiterer og ikke er uendelig. Det er nok å kreve at følgen $a_i, i \geq 1$ inneholder en delfølge som går mot uendelig.

Vi ser at $e - 2 = \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{i!}$ tilfredsstiller kravene fra teorem 1. De to første leddene i summen har nevner 1 og må derfor få litt spesialbehandling. Da ser vi at $e - 2$ er irrasjonalt og derfor må også e selv være det.

Korollar. Under de samme betingelsene som i teorem 1 er også tallet

$$\beta = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^{i+1}}{q_i}$$

irrasjonalt. De samme heltallsargumentene på venstre side av likningen gjelder også her som i teoremet. Når det gjelder høyresiden ligger den mellom -1 og 1 og vi må utelukke at den blir 0. Nå er

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_{n+1} \cdot a_{n+2}} - \frac{1}{a_{n+1} \cdot a_{n+2} \cdot a_{n+3}} - \cdots \right) \\ & > \frac{1}{a_{n+1}} \left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2 \cdot 2} - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 2} - \cdots \right) = 0 \end{aligned}$$

og vi ser at restleddet ikke kan forsvinne. Argumentet forteller også at korollaret holder for enhver fordeling av pluss- og minustegn i tellerne ikke bare for den der pluss- og minustegn alternerer. Det er mange andre eksempler som faller inn under samme setningen.

Eksempel 1. Se på tallet $a = 0,1001000010000001000000001...$ fra del 1 i artikkelen. Her har vi en ener på første, fjerde, niende, sekstende plass, osv. Vi har altså en ener i hver posisjon som svarer til et kvadrattall og ellers nullere. Her er $a_1 = 10, a_2 = 1000, a_3 = 100000, \cdots, a_i = 10^{2i-1}$ og vi ser at følgen $a_i, i \geq 1$ tilfredsstiller kravene fra teoremet. Dermed må a være irrasjonalt.

Eksempel 2. $\gamma = sin(1)$ er irrasjonalt. Vi kjenner Taylorrekken til sinusfunksjonen. Den sier at

$$sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots$$

Dermed har vi at

$$sin(1) = 1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!} + \cdots$$

Ser vi bort fra det første leddet kan vi skrive at $a_i = 2i(2i+1)$. Denne følgen oppfyller kravet fra korollaren og $sin(1)$ må være irrasjonalt. Ved hjelp av den samme Taylorrekken ser en også at

$$sin(\frac{1}{k}) = \frac{1}{k} - \frac{1}{k^3 3!} + \frac{1}{k^5 5!} - \frac{1}{k^7 7!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{k^{2n+1}(2n+1)!} + \cdots$$

er irrasjonalt for alle naturlige tall k. Her setter vi $a_1 = k$ og $a_i = k^2(2i-2)(2i-1)$ for $i > 1$. Med liknende argumenter kan en også se lett at

$$cos(1/k), sinh(1/k), cosh(1/k)$$

og selvsagt $e^{1/k}$ også må være irrasjonale for naturlige verdier av k.

I neste omgang ser vi på

$$e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!}.$$

Her kan metoden som virket så enkelt for e, dessverre ikke tas i bruk. Multipliserer vi nemlig her med $q!$ slik vi gjorde i starten av del 3 av artikkelen, så vil restleddet være lik

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{2^{q+1}q!}{(q+1)!} + \frac{2^{q+2}q!}{(q+2)!} + \frac{2^{q+3}q!}{(q+3)!} + \cdots \\ &= 2^{q+1}\left(\frac{1}{q+1} + \frac{2}{(q+1)(q+2)} + \frac{4}{(q+1)(q+2)(q+3)} + \cdots\right) \end{aligned}$$

og det sistnevnte uttrykket kan ikke vises å være under 1. Dermed må vi gå litt mer forsiktig til verks her. Vi benytter oss her av et triks som første gang ble brukt av Liouville i 1840 (se [2]).

Teorem 2 $e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!}$. er irrasjonalt.

Bevis. Vi ønsker å benytte en metode som likner den vi brukte i beviset for e men i stedet for å multiplisere begge sidene av likningen med $q!$ vil vi gjerne fjerne alle faktorer 2 fra $q!$. Vi må være litt mer presise: Vi antar igjen at $e^2 = \frac{p}{q}$ er et rasjonalt tall. I tillegg antar vi at q er odde. Nå finner vi en toerpotens som er større enn q, altså $q < 2^m = Q$. Samtidig passer vi på at $Q > 4$. Vi studerer nå $Q!$. Blant faktorene $1, 2, 3, 4, \ldots, Q$ er halvparten partall, en fjerdedel ligger i 4-gangen, en åttendedel i 8-gangen, osv. Derfor inneholder $Q!$ faktoren 2 nøyaktig $2^{m-1} + 2^{m-2} + \ldots + 2 + 1 = Q - 1$ ganger og vi vet at $\frac{Q!}{2^{Q-1}}$ er et odde heltall. Vi har faktisk vist at $\frac{Q!}{2^{Q-1}} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (Q-1)$. Dette blir det rette tallet å gange den nye likningen vår med. Vi starter med

$$\frac{p}{q} = e^2 = 1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots + \frac{2^n}{n!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^i}{i!}$$

og ganger med $\frac{Q!}{2^{Q-1}}$. Da får vi

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{Q!}{2^{Q-1}} = \frac{Q!}{2^{Q-1}} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots + \frac{2^Q}{Q!}\right) + \frac{Q!}{2^{Q-1}} \cdot \sum_{i=Q+1}^{\infty} \frac{2^i}{i!}$$

eller

$$\frac{p}{q} \cdot \frac{Q!}{2^{Q-1}} - \frac{Q!}{2^{Q-1}} \left(1 + \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \cdots + \frac{2^Q}{Q!}\right) = \frac{Q!}{2^{Q-1}} \cdot \sum_{i=Q+1}^{\infty} \frac{2^i}{i!}$$

Vi skal nå vise at venstresiden er et heltall mens høyresiden ligger mellom 0 og 1, noe som vil fremtvinge den ønskede selvmotsigelsen. $\frac{p}{q} \cdot \frac{Q!}{2^{Q-1}}$ er et helt tall siden $\frac{Q!}{2^{Q-1}} = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \ldots \cdot (Q-1)$ og q er nettopp ett av de odde tallene som dermed forkortes. Hvert av tallene $\frac{Q!}{2^{Q-1}} \cdot \frac{2^t}{t!}$ er et heltall. Det er lett å se at antall totall som er inneholdt i $t!$ er mindre eller lik $t-1$, slik at brøken ikke har noen totall igjen i nevneren når vi har forkortet den. Der er bare påfølgende odde tall i nevneren og noen totall i telleren. Dermed er $\frac{Q!}{2^{Q-1}} \cdot \frac{2^t}{t!}$ et heltall for $0 \leq t \leq Q$ og vi har vist at hele venstresiden er et heltall. Høyresiden eller restleddet ser slik ut:

$$\begin{aligned}
&\frac{Q!}{2^{Q-1}} \cdot \sum_{i=Q+1}^{\infty} \frac{2^i}{i!} = \frac{Q!}{2^{Q-1}} \cdot \left(\frac{2^{Q+1}}{(Q+1)!} + \frac{2^{Q+2}}{(Q+2)!} + \frac{2^{Q+3}}{(Q+3)!} + \cdots + \right) \\
&= \frac{4}{Q+1} \cdot \left(1 + \frac{2}{Q+2} + \frac{2 \cdot 2}{(Q+2)(Q+3)} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{(Q+2)(Q+3)(Q+4)} + \cdots + \right) \\
&< \frac{4}{Q+1} \cdot \left(1 + \frac{2}{Q+2} + \frac{2 \cdot 2}{(Q+2)(Q+2)} + \frac{2 \cdot 2 \cdot 2}{(Q+2)(Q+2)(Q+2)} + \cdots + \right) \\
&= \frac{4}{Q+1} \cdot \left(1 + \frac{2}{Q+2} + \left(\frac{2}{Q+2}\right)^2 + \left(\frac{2}{Q+2}\right)^3 + \cdots + \right) \\
&= \frac{4}{Q+1} \cdot \frac{1}{1 - 2/(Q+2)} = \frac{4}{Q+1} \cdot \frac{Q+2}{Q} < \frac{4 \cdot 7}{6 \cdot 5} < 1
\end{aligned}$$

for $Q > 4$, noe som vi sikret oss da vi valgte Q. Hvis nå q ikke var odde, så vil p være odde, siden vi kan forutsette at brøken er forkortet. Da ser vi på brøken

$$\frac{q}{p} = e^{-2} = 1 - \frac{2}{1!} + \frac{2^2}{2!} - \frac{2^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{2^n}{n!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{2^i}{i!}.$$

Her vil de samme argumentene for å vise at noen uttrykk er heltall og at restleddet ligger mellom 0 og 1 gjelde og vi har vist den ønskete selvmotsigelsen.

Med de samme argumentene kan en også vise at $sin(2), cos(2), sinh(2)$ og $cosh(2)$ er irrasjonale. Det samme gjelder $cos(\sqrt{2})$ og $cosh(\sqrt{2})$ siden de tilhørende Taylorrekkene bare involverer jamne potenser.

Bemerkning: Liouville[2] kunne vise at tallet e ikke kunne være rot i noen kvadratisk likning med rasjonale koeffisienter. Hvis e oppfyller en slik likning kan vi omforme likningen til

$$ae + \frac{b}{e} = c,$$

der a, b og c er heltall. Nå vet vi at

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}$$

og at

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{i!}$$

Vi velger nå et stort tall q og ganger likningen med $q!$. Da får vi

$$\frac{a}{q+1} \left(1 + \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+2)(q+3)} + \dots \right) \pm \frac{b}{q+1} \left(1 - \frac{1}{q+2} + \frac{1}{(q+2)(q+3)} - \dots \right) = \mu,$$

der μ er et heltall. Hvis b er negativ må vi velge q som odde tall, ellers partall. Da er det lett å vise at venstresiden er et lite tall mellom 0 og 1 og vi har kommet frem til den samme selvmotsigelsen som før.

Teorem 3. La $a_i, i \geq 1$ og $p_i, i \geq 1$ være følger av naturlige tall der $a_i \geq 2$ slik at $\lim_{i\to\infty} \frac{p_i}{a_i} = 0$. Sett $q_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots a_n$. Da er tallet $\alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{q_i}$ irrasjonalt.

Bevis. Siden $\lim_{i\to\infty} \frac{p_i}{a_i} = 0$ kan vi finne en indeks n slik at $\frac{p_n}{a_n} < 1$ og det samme gjelder for alle videre indekser. Vi setter $T = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{p_i}{q_i}$. Siden $q_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \ldots a_n \geq 2^n$ så er

$$0 < \alpha = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{q_i} = T + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{p_i}{q_i} = T + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{p_i}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_i} =$$
$$= T + \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots a_{i-1}} \left(\frac{p_i}{a_i}\right) \leq T + 2$$

og vi har vist at α eksisterer som reelt tall. Vi antar nå at $\alpha = \frac{p}{q}$ kan skrives som en brøk. Nesten som i beviset for teorem 1 velger vi nå n så stor at $\frac{p_{n+1}}{a_{n+1}} < \frac{1}{2q}$ også for alle påfølgende indekser. Så ganger vi begge sider av likningen $\frac{p}{q} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{p_i}{q_i}$ med $q \cdot q_n$. Da får vi

$$p \cdot q_n - q\left(\frac{p_1 q_n}{q_1} + \frac{p_2 q_n}{q_2} + \frac{p_3 q_n}{q_3} + \ldots + \frac{p_n q_n}{q_n}\right) = q \cdot q_n \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{p_i}{q_i}$$
$$= q \sum_{i=n+1}^{\infty} \frac{p_i \cdot q_n}{q_i} = q\left(\frac{p_{n+1}}{a_{n+1}} + \frac{1}{a_{n+1}} \cdot \frac{p_{n+2}}{a_{n+2}} + \frac{1}{a_{n+1}a_{n+2}} \cdot \frac{p_{n+3}}{a_{n+3}} + \ldots\right)$$
$$< q \cdot \frac{1}{2q}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 2\cdot 2} + \ldots\right) = \frac{2q}{2q} = 1$$

Nå har vi fått den samme selvmotsigelsen som oppe. Venstresiden er et helt tall mens høyresiden er et tall mellom 0 og 1 og vi må forkaste vår antakelse at $\alpha = \frac{p}{q}$ kunne skrives som brøk.

Teorem 3 gir noe større frihet til å konstruere irrasjonale tall siden tellerne i brøkene i den uendelige summen ikke behøver å være 1. På den andre siden må vi anta at $\lim_{i\to\infty} \frac{p_i}{a_i} = 0$, som er et sterkt krav (se bemerkningen etter teorem 1). Teorem 3 gir en god del muligheter til å konstruere nye irrasjonale tall. Her kommer en av dem. La $a_i, i \geq 1$ og $p_i, i \geq 1$ være tallfølger som oppfyller betingelsene i teorem 3 og la $1 \leq c_i \leq p_i, i \geq 1$ være en følge av naturlige tall. Da vil også tallet $\kappa = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{c_i}{q_i}$ være irrasjonalt. Alle argumentene fra teoremet kan overtas.

Her kommer enda en ny metode for å lage nye irrasjonale tall. La $a_i, i \geq 1$ og $p_i, i \geq 1$ være tallfølger som oppfyller betingelsene i teorem 3 og la q_{i_j} være en delfølge av q_i. Da vil også tallet $\delta = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{p_{i_j}}{q_{i_j}}$ være irrasjonalt. Alle argumentene fra teoremet kan overtas.

4 Avslutning

Vi har vist hvordan man med enkle midler kan konstruere irrasjonale tall og siden også transendente tall. Metoden bygger først og fremst på en forståelse av desimaltall. Metoden tillater mange variasjoner og en får et lite glimt av mangfoldet i tallverdenen. I tillegg får vi et innblikk i tallet e og andre beslektede tall sin irrasjonalitet. Vi utviklet flere verktøy for å lage irrasjonale tall selv.

Referanser

[1] Liouville, J., *Sur les classes très étendues de quantités dont la valeur n'est ni algébraique ni meme réductible à des irrationelles algébraiques*, J. Math. Pures et Appl. (1) 16, 133-142 (1851).

[2] Liouville, J., *Sur l'irrationalité du nombre e=2,718?* Journal de Mathématiques Pures et Appl. (1) 5 (1840), 192; Addition, 193-194

[3] Skovsmose, O. *Undersøkelseslandskaper*, I rapporten "Matematikk for alle" Landslag for matematikk i skolen (Sommerkurs i Trondheim 1998)