Uppgifter

556. En lekhage är bildad av sammanlänkade vertikala sidostycken, så att hagens golv har formen av en pentagon med sidolängderna 5, 5, 8, 5, 6 dm resp. (se Fig. 1). Genom att variera vinklarna mellan sidostyckena kan vi ändra form och storlek av hagens golv. Karakterisera pentagonens form när arean är så stor som möjligt. Bestäm denna area.

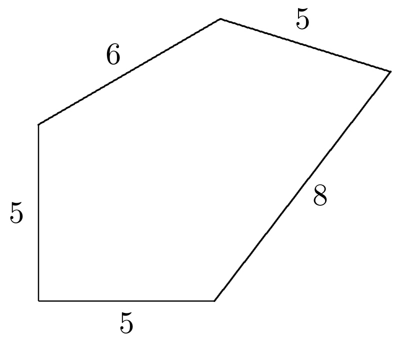

Fig. 1

557. Låt $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vara givna punkter på en cirkel. På hur många olika sätt kan man färglägga punkterna med p färger, $p \geq 2$, så att två intilliggande punkter alltid har olika färg?

558. Nio kort numrerade från 1 till 9 är placerade i rad i en slumpmässig ordning. Uppgiften består i att ordna korten så att talen bildar en växande eller avtagande följd, helst i så få steg som möjligt. Ett steg innebär i detta fall att man i raden väljer ett block av intilliggande kort, där talen bildar en monoton följd, och placerar de så valda korten i omvänd ordning. Exempelvis kan talföljden $34\underline{8621}759$ i ett steg ändras till $34\underline{1268}759$. Visa att högst 12 steg krävs för att skapa en monoton följd av talen på de nio korten. Ange en övre gräns för antalet erforderliga steg om endast block med två kort är tillåtna.

559. Bestäm alla par av positiva heltal (x, n) för vilka $x^n + 2^n + 1$ är en delare till $x^{n+1} + 2^{n+1} + 1$.

560. För två punkter D och E på sidan AB i triangeln ABC gäller sambandet

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{AE}{EB} = \left(\frac{AC}{CB}\right)^2 .$$

Visa att $\angle ACD = \angle BCE$.

561. *(Kent Holing.)* La a, b og c være gitte tall med $c > b > a > 0$. Gjennom punktet $B = (a, b)$ skal det trekkes rette linjer som avskjæres av koordinataksene med linjesegmenter av gitt lengde c (se Fig. 2). Vi skal løse problemet geometrisk der det er mulig. (Vi antar at B og c kan konstrueres.) (Hint: Problemet er nært knyttet opp mot kasseproblemet, som er diskutert i Normat 1997, s. 62. Artikkelen

gir god bakgrunn for å løse oppgaven.)
For en linje L_i gjennom B, la C_i være skjæringspunktet som angitt på figuren (med $a = b$). Hvis problemet har 4 (forskjellige) løsninger, så ser vi at to av linjene har linjesegmenter i første kvadrant (L_1 og L_2) mens de to andre linjene (L_3 og L_4) har linjesegmenter i henholdsvis andre og fjerde kvadrant.

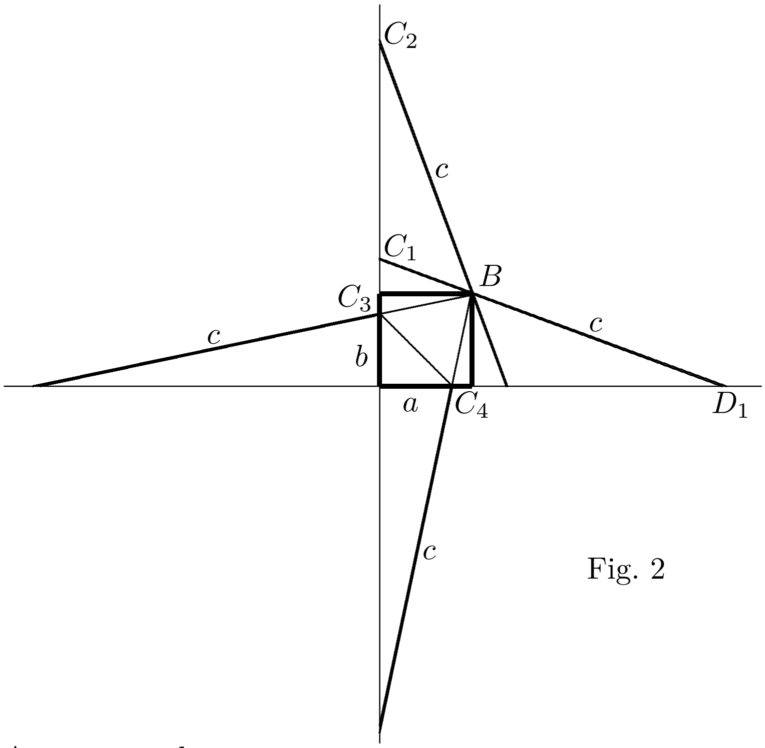

Fig. 2

Anta at $a = b$.

a) Hvorfor kan linjene - når de eksisterer - da konstrueres med bruk av bare passer og linjal? Gjør greie for konstruksjonen, og drøft geometrisk antallet løsninger.

b) Forklar både geometrisk og algebraisk hvorfor trekantene BC_3C_4 og BC_2D_1 alltid er likebente trekanter når $L_1 \neq L_2$ eksisterer. Hva skjer når $L_1 \equiv L_2$?

c) For gitte hele tall a og c slik at $L_1 \neq L_2$ eksisterer, vis at hvis $|BC_1|$ eller $|BC_2|$ er heltall, så er både $|BC_1|$ og $|BC_2|$ heltall, mens verken $|BC_3|$ eller $|BC_4|$ er det.

Anta så at vi kan ha $a \neq b$.

d) For gitte hele tall a, b og c slik at $L_1 \equiv L_2$ eksisterer, forklar at $a \neq b$. Det er da kjent (oppgave 404b), Normat 2003, s. 35) at $|BC_1| = |BC_2|$ må være heltall. Vis også at her kan heller ikke $|BC_3|$ eller $|BC_4|$ være heltall. Forklar også at hvis $L_i \equiv L_j$ for $i \neq j$, så gjelder dette bare for L_1 og L_2.

e) Når a, b og c er heltall, vis at hvis vi har mer enn 2 heltallsløsninger $|BC_i|$, så må de være forskjellig og $a \neq b$.

f)*(Vanskelig.) For $a \neq b$, gi uendelig mange eksempler med fire forskjellige linjer der $|BC_1|$ og $|BC_2|$ begge er heltall, mens verken $|BC_3|$ eller $|BC_4|$ er det. Gjør dette ved å gi en én-parameter familie der a, b og c er gitt som polynomer $a(n)$,

$b(n)$ og $c(n)$ for n et naturlig tall.

g)*(Svært vanskelig!) For $a \neq b$, gi uendelig mange eksempler med fire linjer med linjesegmenter $|BC_i|$ som alle har lengder som er heltall. Gjør dette ved å gi en to-parameter familie. Hvorfor må linjene alle være forskjellig?

(Uppgifterna 557, 559 och 560 är olympiadproblem hämtade från tävlingar i Rumänien och Polen. Uppgift 558 ingick bland listade problem inför en IMO-tävling.)

Lösningar skickas senast 15 oktober 2013 till:
Dag Jonsson, nilsdag@hotmail.com
Paprikagatan 8
SE-75449 Uppsala

Anm. Vi välkomnar givetvis lösningar även efter angivet datum så länge inga andra lösningar har presenterats i tidskriften.