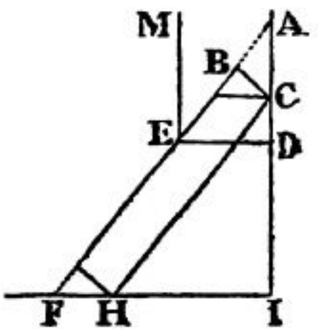
Lösningar till uppgifter i Normat 2009:2 och 2010:4

524. (*Förslagsställaren, Kent Holing, Trondheim.*) Løsningen er som hintet nært knyttet opp mot kassesproblemet fra populærmatematikken, se artikkelen *På gjengrodde stiger* i Normat fra 1997 (spesielt oppgave 11). Det gjelder å innse at problemet er ekvivalent med kasseproblemet $SLP[|DE|, |DI|, |AF|] = SLP[a, b, c_0]$ (se Normat 2003, s. 84 for SLP-notasjonen) gitt slik at problemet har én og bare én løsning $|AE|$ for gitte $|DE| = a$ og $|DI| = b$, se illustrasjonen fra Ladies Diary (LD) nedenfor. Dette inntrer hvis og bare hvis $|AF| = c_0$, der c_0 er også gitt nedenfor.

Det opprinnelige problemet (*the pole in a chimney*) fra LD i 1732 er den eldste referansen til et ikke-kvadratisk kasseproblem $SLP[a, b, c]$ $(a \neq b)$ som oppgavestilleren kjenner til.[1] (I Normat 2002, s. 92-95 finnes en historisk oversikt over kasseproblemet.[2])

Vi vet fra hintet (Normat 2003, s. 36) at $a = mr^3$, $b = ms^3$ og $c_0 = mt^3$ for m, r, s og t positive heltall med $r^2 + s^2 = t^2$ og $\gcd(r, s, t) = 1$. Videre gir dette med $|BC| = d$ og $\alpha = \sqrt[3]{b/a}$ (reell) at $|CH| = c_0 - (\alpha + 1/\alpha)d$.[3] Men, $\alpha + 1/\alpha = t^2/(rs)$, så vi har at $rs(mt^3 - |CH|) = dt^2$. Da d er antatt heltallig, må $rs|dt^2$, og derfor må $rs|d$ siden $\gcd(rs, t^2) = 1$ da $\gcd(r, s) = 1$. Da er $n = d/(rs)$ heltallig.

Med a og b relativt primiske tall og $|BC|$ minimal (dvs. $m = n = 1$), så er problemet fullstendig karakterisert ved $|DE| = r^3$, $|DI| = s^3$, $|AF| = t^3$, $|BC| = rs$ og $|CH| = (t-1)t^2$ for (r, s, t) et primitivt Pythagoreisk trippel. Merk at $|AE$, $|AI|$ og $|FI|$ er også heltallig. (Även löst av *Kåre Vedøy, Fyllingsdalen*)



[1] LD gir løsningen $|CH|$ som *14 feet 7 inches 2 tenths*, som tilsvarer 14.6 fot. Det eksakte uttrykket for $|CH|$ kan lett finnes av løsningsmetoden nedenfor: For $a = 4$, $b = 8$ og $d = 1$ har den lengst mulige pålen som får plass oppe i pipa lengden $|CH| = (4\sqrt{\alpha^2 + 1} - 1/\alpha)(\alpha^2 + 1)$ for $\alpha\sqrt[3]{2}$ (reell). Uttrykket for $|CH|$ er tilnærmet lik 14.5941 fot.

[2] Fra denne oversikten vet vi at kasseproblemet er ekvivalent med et geometrisk problem kreditert Apollonius. Lenge etter at denne historiske oversikten ble skrevet, ble oppgavestilleren gjort oppmerksom på artikkelen R. C. Archibald: *Discussion and history of certain geometrical problems of Heraclitus and Apollonius*, Proc. Edinburgh Math. Soc., 28 (1909), s. 152. (Douglas Rogers, privat kommunikasjon.) Artikkelen gir en meget grundig gjennomgang av slike problemer.

[3] Fra figuren ser vi at $|CH|/|AF| = (h - d)/h$ der h er høyden på hypotenusen AF i trekanten AFI (rett sylindrisk påle). Med vanlig notasjon for stigeproblemer lar vi $y = y_0 = |FI|$ og $z = z_0 = |AI|$. Vi finner lett h ved $c_0 h = y_0 z_0$. Siden $c_0 = \alpha(1 + \alpha^2)^{\frac{3}{2}}$, $y = y_0 = \alpha(1 + \alpha^2)$ og $z = z_0 = b + a\alpha = a\alpha(1 + \alpha^2)$, blir $|CH| = (1 - d/h)c_0 = c_0 - (c_0/h)d$. Nå er $c_0/h = \alpha + 1/\alpha$, som gir at $|CH| = c_0 - (\alpha + 1/\alpha)d$, som påstått.

543. (Förslagsställaren, *Kent Holing*) Anta at fjerdegradsligningen er gitt som $Q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$. Resolventen er da gitt ved $R(x) = x^3 - bx^2 + (ac - 4d)x + 4bd - a^2d - c^2 = 0$.

Først, så må $Q(x)$ være redusibel, for hvis ikke, så må $Q(x)$ gå opp i $R(x)$ som opplagt ikke er mulig. Videre så må $R(x)$ gå opp i $Q(x)$ da resolventen antas å være irredusibel. Vi har med andre ord at $Q(x) = (x - r)R(x)$ for r et rasjonalt tall.

Vi viser lett at $r = -(a + b)$ og $R(r) = \pm 1$. Det siste følger av at $\lambda = R(r)^2\lambda$ hvor λ er lik diskriminanten til fjerdegradsligningen (resolventen) og $\lambda \neq 0$ (resolventen er irredusibel).

Løsning av a): Anta at fjerdegradsligningen er på såkalt redusert form, dvs. at kubikkleddet mangler ($a = 0$). Siden $Q(x) - (x + b)R(x) \equiv\neq 00$, vil vi ha at $c(c + 1) = 0$, og siden $c \neq 0$, så må $c = -1$. (Hvis $c = 0$, så vil $R(b) = 0$, og det er ikke mulig da resolventen er irredusibel.)

Videre har vi at (da $a = 0$ og $c = -1$) $b(b + 1) + 4d = 0$ og $b + d - 4b^2d = 0$. Dette gir sammen med

$R(-b) = \pm 1$ at $R(x)$ ikke kan være irredusibel når $a = 0$. (Det er ingen heltallsløsninger til disse ligningene i b og d.) Altså er $a \neq 0$ når resolventen er irredusibel.

Løsning av b): Røttene til resolventen er altså alle røtter til fjerdegradsligningen. Hvis røttene til fjerdegradsligningen er gitt som x_1, x_2, x_3 og x_4, kan vi anta at røttene til resolventen er x_1, x_2 og x_3. Ved passende nummerering av røttene, kan vi med $x_4 = r$ anta at $x_1 = x_1x_2 + rx_3$.

Galois-gruppen $\mathbf{G}$ til resolventen og fjerdegradsligningen er den samme og er enten $\mathbf{S}_3$ eller $\mathbf{Z}_3$ siden resolventen er irredusibel. Er $\mathbf{G} \neq \mathbf{Z}_3$, så vil automorfien $\alpha = (1, 2)$ som bytter om på x_1 og x_2 og fikserer x_3 være et element i $\mathbf{G}$. (Merk at α har orden 2 i $\mathbf{S}_3$, og er derfor ikke i $\mathbf{Z}_3$ ($\mathbf{A}_3$).) Brukes α på ligningen $x_1 = x_1x_2 + rx_3$, så får vi at $x_1 = x_2$, men dette er ikke mulig da den irredusible resolventen ikke kan ha multiple røtter. Så, vi har at $\mathbf{G} = \mathbf{Z}_3$.

Løsning av c): Fra a) har vi at $a \neq 0$. Merk at r er et heltall siden $r = -(a + b)$ for heltall a og b.

Ved å bruke en symbolsk matematikkpakke er det forholdsvis enkelt å komme opp med eksemplene $Q_1(x) = x^4 + 2x^3 - x^2 - 3x - 1 = 0$ og $Q_2(x) = x^4 - 4x^3 + 3x^2 + 3x - 3 = 0$.

Det kan også vises at for $r \neq 0$[4] heltall, så vil

(1)
$a = -(2r^2 + r + 1)/r, b = (r^2 + r + 1)/r, c = (2r^3 + r^2 + r - 1)$ og $d = -r^2(r^2 + r + 1)$

gi fjerdegradsligninger som det spørres etter hvis vi aksepterer at $Q(x)$ og $R(x)$ kan være moniske polynom med rasjonale koeffisienter.[5]

Vi har at Q(x) = (x - r) R(x) med

$$(2) \qquad R(x) = x^3 - g(r)x^2 - (r + 1)g(r)x + r^2g(r) \quad \text{for} \quad g(r) = r + 1 + 1/r.$$

[4]Er $r = 0$, er det lett å vise at resolventen må være redusibel.

[5]Denne familien av fjerdegradsligninger skyldes Kurt Foster.

Det er mulig å vise at $R(x)$ er irredusibel for alle heltall $\neq 0$ ved å vise at ligningen $x^3 - h(r)x^2 - r(r+1)h(r)x + r^4h(r) = 0$ for $h(r) = r^2 + r + 1$ ikke kan ha heltallsrøtter.

Ved å kreve heltallskoeffisienter, så må $r = \pm 1$, som gir eksemplene $Q_1(x)$ and $Q_2(x)$ ovenfor.

Vi vil til slutt vise at en monisk fjerdegradsligning med rasjonale koeffisienter som har minst én felles rot med sin irredusible resolvent, må være på formen $Q(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ med koeffisienter gitt av (1).

Ved passende nummerering av røttene, kan vi anta at $x_1 = x_1x_2 + rx_3$, $x_2 = rx_1 + x_2x_3$ og $x_3 = x_1x_3 + rx_2$.[6]

Dette gir at $x_1 = rx_2/(r^2 - (x_2 - 1)x_2)$. Den rasjonale funksjonen $f(x) = rx/(r^2 - (x-1)x)$ må derfor oppfylle $f(f(f(x))) = x$ for alle røtter x.[7]

Dette kan brukes til å bestemme et polynom $p(x)$ for å finne $R(x)$ i $Q(x) = (x - r)R(x)$ med $Q(x)$ som i (1).

Med en programpakke for symbolsk matematikk er det enkelt å bestemme $p(x)$, og ikke minst, faktorisere $p(x)$. Polynomet $p(x)$ er av grad 9 som faktoriserer i tre lineære faktorer og to faktorer av grad 3. (Merk at x og $x - r$ er faktorer av $p(x)$.) Bare én av tredjegradsfaktorene kan være resolvent til $Q(x)$ gitt av (1). Og, det viser seg at denne faktoren er lik $R(x)$, som gitt ved (2).

[6] Forklar at $x_1 = x_1x_2 + rx_3$, $x_2 = x_1x_3 + rx_2$ og $x_3 = rx_1 + x_2x_3$ ikke er riktig.

[7] Dette er konsistent med at Galois-gruppen er $\mathbf{Z}_3$ slik at rotkroppen til resolventen (og fjerdegradsligningen) er $Q[x_2]$.