Lösningar till uppgifter i Normat 2011:2

547. (*Hans Kaas Benders, Randers.*)
Antag

$$a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1} \tag{1}$$

med $a_1 = 1$, $a_2 = 2$. Så er $a_3 = 5$, $a_4 = 12 \dots$.
Vise at (1) medfører, at

$$a_{n+1}a_{n-1} = a_n^2 + (-1)^n \tag{2}$$

for $n \geq 2$. Vi har at (2) er sant for $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 5$. Antag (2). Så er, ved induktion,

$$\begin{aligned} a_{n+2}a_n &= (2a_{n+1} + a_n)a_n = 2a_{n+1}a_n + a_n^2 \\ &= 2a_{n+1}a_n + a_{n+1}a_{n-1} + (-1)^{n+1} \\ &= a_{n+1}(2a_n + a_{n-1}) + (-1)^{n+1} \\ &= a_{n+1}^2 + (-1)^{n+1} \end{aligned}$$

Altså er a_n entydigt bestemt ved (2) og rekursionsformlen for talfølgen er $a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$.
Uppgiften är också löst av *Con Amore Problemgruppe, København*, som motiverar rekursionsformeln (1) genom att hänvisa till Fibonacci-talföljden $(f_n)_1^\infty$, vilken definieras via sambandet

$$f_{n+1} = f_{n-1} + f_n,$$

och som bl. a. uppfyller

$$f_{n+1}f_{n-1} - f_n^2 = (-1)^n \text{ för } n = 2, 3, 4, \dots$$

Det ligger då nära till hands att pröva ansatsen

$$a_{n+1} = a_{n-1} + qa_n,$$

där q är ett naturligt tal. Av villkoren $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ följer så att $q = 2$.

548. (*Con Amore Problemgruppe, København*)
Vi forudskikker den bemerkning, at ℓ_2 ikke kan gå gennem O, for i så fald ville B og C være diametralt modsatte punkter på cirklen, og cirklens tangenter ville dermed være parallelle og ikke kunne skære hinanden i noget punkt Q.

Vi indfører et koordinatsystem med O som begyndelsespunkt, med x-aksen parallel med ℓ_2 og med cirklens radie som enhed; se Fig. 1. Punktet O har da naturligtvis koordinatsættet (0,0), og cirklen har ligningen $x^2 + y^2 = 1$. Lad punkterne P, A,

B, C og Q have koordinatsættena henholdsvis (p_1, p_2), (a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2) og (q_1, q_2). Da P ligger uden for cirklen, må det gælde, at $p_1^2 + p_2^2 > 1$, og da A ligger på cirklen, må det gælde, at $a_1^2 + a_2^2 = 1$; da ł$_1$ er cirklens tangent i A, har ℓ_1 ligningen $a_1x + a_2y = 1$, og da ℓ_1 går gennem P, gælder det, at

$$a_1p_1 + a_2p_2 = 1. \tag{1}$$

Da ℓ_2 går gennem P og er parallel med x-aksen, har ℓ_2 ligningen $y = p_2$, og i henhold til den indledende bemærkning er $p_2 \neq 0$.
Da B og C ligger på ℓ_2, har vi $b_2 = c_2 = p_2$. Og da B og C ligger på cirklen, må det derfor (foruden $p_2 \neq 0$) gælde, at $-1 < p_2 < 1$, og endvidere, at $b_1^2 + b_2^2 = c_1^2 + c_2^2$, og dermed, at $b_1^2 = c_1^2$. Da B og C er forskellige, har vi da, at $b_1 = -c_1$. Cirklens tangenter i B og C har endvidere ligningerne

$$b_1x + b_2y = 1 \text{ og } c_1x + c_2y = 1,$$

altså

$$b_1x + p_2y = 1 \text{ og } -b_1x + p_2y = 1,$$

og det ses let, at tangenternes skærningspunkt Q har koordinatsættet $(q_1, q_2) = (0, \frac{1}{p_2})$.
Ovenfor udtrykte vi b_2 og c_2 ved p_2, nemlig som $b_2 = c_2 = p_2$. Man kan også (men det er altså ikke nødvendigt) udtrykke b_1 og c_1 ved p_2, nemlig som $b_1 = -\sqrt{1 - p_2^2}$ og $c_1 = \sqrt{1 - p_2^2}$ (eller omvendt).
Opgaven gik jo ud på at bevise, at linien gennem A og Q og linien gennem P og O skærer hinanden under en ret vinkel, altså at $\overrightarrow{QA} = \overrightarrow{OP} = 0$. Vi finder, at

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QA} &= (a_1 - q_1, a_2 - q_2) = (a_1, a_2 - \tfrac{1}{p_2}) \text{ og} \\ \overrightarrow{OP} &= (p_1, p_2),\end{aligned}$$

og dermed har vi, idet vi benytter (1), at

$$\overrightarrow{QA} \cdot \overrightarrow{OP} = (a_1, a_2 - \tfrac{1}{p_2}) \cdot (p_1, p_2) = a_1p_1 + a_2p_2 - 1 = 0,$$

og opgaven er løst.

Vi bemærker, at det er muligt, men altså unødvendigt, at udtrykke a_1 og a_2 ved p_1 og p_2; man finder, efter en del regning, at

$$a_1 = \frac{p_1 \pm p_2\sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 1}}{p_1^2 + p_2^2} \quad \text{og} \quad a_2 = \frac{p_2 \mp p_1\sqrt{p_1^2 + p_2^2 - 1}}{p_1^2 + p_2^2}.$$

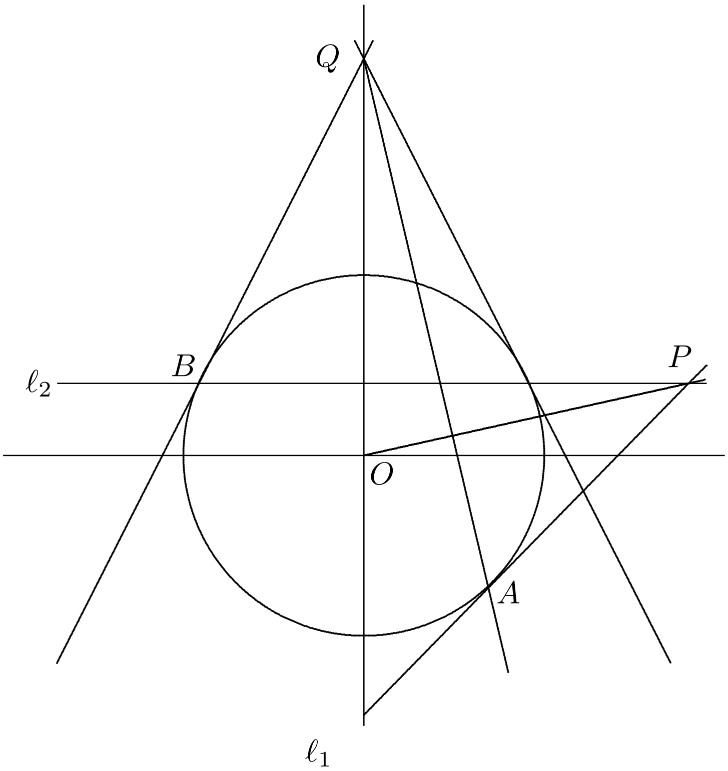

Fig. 2