Tonsättaren Per Nørgårds ”oändlighetsserie”

Hans Thunberg

Institutionen för Matematik
KTH
100 44 Stockholm thunberg@math.kth.se

1 Inledning

Den danske tonsättaren Per Nørgård[1] (f.1932) har konstruerat en algoritm för att generera tonföljder[2] (melodier) rika på symmetri- och självlikformighetsegenskaper. Med matematiskt språk handlar det om linjära differensekvationer med fördröjning, det vill säga en typ av rekursivt definierade talföljder. Denna text kommer att matematiskt formulera och bevisa ett antal av dessa följders egenskaper.

Tanken bakom Nørgårds algoritm kan sägas vara att tonföljden skall utvecklas lagbundet ur det minsta initiala fragment som kan betraktas som ett frö till en melodi, det vill säga en följd av två toner. Algoritmen är inte bunden till något speciellt tonförråd (skala), den opererar endast på toners relativa positioner inom ett givet tonförråd, som till exempel stamtonerna (de vita tangenterna på pianot) eller hela det kromatiska tonförrådet.

Givet två initiala toner, låt oss kalla dem T_0 och T_1, som utgör början på vår tonföljd, genereras resten av följden rekursivt enligt nedanstående recept. Med ett intervall I från tonen T till tonen T' menar vi här, något oegentligt, riktning och antalet tonsteg inom det givna tonförrådet från T till T', och beteckningen $-I$ syftar på det intervall som har lika många tonsteg inom tonförrådet som I men motsatt riktning.

- Avläs intervallet från T_0 till T_1, och beteckna detta intervall I_1.
- Tredje tonen T_2 fås genom att utgå ifrån T_0 och förflytta sig i tonförrådet med intervallet $-I_1$, om till exempel T_1 ligger två tonsteg över T_0 skall T_2 väljas som den ton som ligger två tonsteg under T_0.
- Fjärde tonen T_3 fås genom att utgå från T_1 och förflytta sig med intervallet I_1. Om T_1 ligger två tonsteg över T_0 skall också T_3 ligger två tonsteg över T_1.

[1] Per Nørgård är av en Nordens mest välkända tonsättare. Hösten 2012 var han föremål för Stockholms Konserthus tonsättarfestival.

[2] I konstmusikaliska sammanhang används termen ”serier” för följder av toner, eller andra musikaliska parameterar, som utgör kompositoriskt grundmaterial; de tonföljder som ges av Nørgårds algoritm visar sig var aperiodiska — härav termen ”oändlighetsserie”.

- I nästa steg fås T_4 och T_5 genom att bestämma intervallet I_2 från T_1 till T_2, och sedan låta I_2 operera på det två senaste genererade tonerna på samma sätt: T_4 fås genom att utgå från T_2 och förflytta sig intervallet $-I_2$, och T_5 fås genom att förflytta sig intervallet I_2 från T_3.

- Man fortsätter sedan rekursivt enligt samma mönster: Tonerna T_{2n} och T_{2n+1} fås genom att bestämma intervallet I_n från T_{n-1} till T_n, och sedan låta T_{2n} vara tonen ett intervall $-I_n$ från T_{2n-2}, medan T_{2n+1} definieras som tonen ett interval I_n från T_{2n-1}.

Den melodiska strukturen efter n steg återanvänds alltså för att utveckla melodin i två steg kring position $2n$.

Per Nørgård och andra kompositörer och musikteoretiker har observerat en lång rad intressanta egenskaper hos tonföljder som genereras på detta sätt, de uppvisar till exempel självlikformighet. Man har också prövat ut alternativa, à priori helt annorlunda, algoritmer för generera dessa följder. En översikt över egenskaperna hos tonföljder genererade med Nørgårds metod ges av Jørgen Mortensen på websiten *Per Nørgård. En introduktion til komponisten og hans musik*, [1], av Erling Kullberg i antologin *The Music of Per Nørgård. Fourteen Interpretative Essays*, [2], och av Mattias Svensson Sandell i ett kompendium skrivet för elever vid Gotlands Tonsättarskola, [3].

I denna artikel kommer vi alltså att beskriva dessa tonföljder som rekursivt definierade talföljder och formulera och bevisa ett antal av de funna egenskaperna. Jean-Paul Allouche och Jeffrey Shallit har tidigare visat att dessa talföljder är exempel på vad de definierar som *2-reguljära följder*, [4].

2 Definitioner och resultat

Per Nørgårds ovan beskrivna metod beskrivs naturligt med rekursivt definierade talföljder.

Definition 1 *Givet två hela tal a_0 och a_1, där $a_1 > a_0$, definierar vi Nørgårdföljden $A(a_0, a_1) = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ genom att för $n \geq 1$ låta*

$$\begin{cases} a_{2n} = a_{2n-2} - d_n \\ a_{2n+1} = a_{2n-1} + d_n \end{cases}, \quad \text{där } d_n = a_n - a_{n-1}. \tag{1}$$

Vi kommer speciellt att studera den normaliserade Nørgårdföljden[3]

$$\begin{aligned} \{c_n\}_{n=0}^{\infty} &:= A(0,1) \\ &= \{0, 1, -1, 2, 1, 0, -2, 3, -1, 2.0, 1, 2, -1, -3, 4, \dots\}. \end{aligned} \tag{2}$$

Kommentar 1 *Villkoret $a_1 > a_0$ i Definition 1 kan bytas mot villkoret $a_1 < a_0$, alla resultat nedan kommer fortfarande att gälla med den förändringen att successiva minima respektive maxima i följderna kommer att byta roll. Om $a_0 = a_1$ fås det triviala fallet med en konstant följd $a_n = a_0$, $n \geq 1$.*

[3] Denna följd har nummer A004718 i *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS).

Exempel 1 *Låt oss som illustration tabulera inledningen på den normaliserade följden* $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} := A(0,1)$ *och på följden* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} := A(1,3)$.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
c_n	0	1	−1	2	1	0	−2	3	−1	2	0	1	2	−1	−3	4
a_n	1	3	−1	5	3	1	−3	7	−1	5	1	3	5	−1	−5	9

n	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
c_n	1	0	−2	3	0	1	−1	2	−2	3	1	0	3	−2	−4	5
a_n	3	1	−3	7	1	3	−1	5	−3	7	3	1	7	−3	−7	11

Om man studerar initiala segment av Nørgårdföljder observerar man följande egenskaper.

- Följderna tycks ha lokala minima och maxima på positioner $2^k - 2$ och $2^k - 1$, och dessa lokala extremvärden tycks avta respektive öka aritmetiskt.
- Följderna tycks innehålla translaterade och spegelvända kopior av sig själv
  - om vi avläser vart fjärde element, med början på position $n = 0$, återfår vi den ursprungliga följden;
  - om vi läser av vartannat element med början på position $n = 0$ får vi en följd som är en spegelbild av den ursprungliga följden, det vill säga en följd som har samma absoluta differenser mellan elementen men med omvänt tecken;
  - om vi läser av vartannat element med början på position $n = 1$ finner vi ett translat av den ursprungliga följden ($A(1,2)$ respektive $A(3,5)$ för följderna i Exempel 1);
  - om vi läser av vart fjärde element med början vid $n = 2$ får vi en translaterad spegelbild av den ursprungliga följden;
  - om vi läser av vart fjärde element med början vid $n = 3$ får vi ännu en translaterad version av den ursprungliga följden;
  - om vi läser av vart åttonde element med början vid position $n = 6$ eller $n = 7$ får vi återigen ett speglat respektive ett rättvänt translat av ursprungsföljden.
- Följdernas inledning återkommer i allt längre block

$$\{a_5\} = \{a_0\}$$
$$\{a_{10}, a_{11}\} = \{a_0, a_1\}$$
$$\{a_{20}, a_{21}, a_{22}, a_{23}\} = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}.$$

Detta är exempel på de egenskaper hos Nørgårdföljder som vi nu formulerar mer precist i Sats 1 – 4.

Sats 1 *Om* $A(a_0, a_1) = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *är en Nørgårdföljd, och om* $d_1 = a_1 - a_0$, *gäller följande för alla naturliga tal* $k \geq 1$.

1. $\min_{0 \leq i \leq 2^k - 1}(a_i) = a_{2^k - 2}$ *och* $a_{2^{k+1} - 2} = a_{2^k - 2} - d_1 = a_0 - kd_1$.

2. $\max_{0\le i\le 2^k-1}(a_i) = a_{2^k-1}$ *och* $a_{2^{k+1}-1} = a_{2^k-1} + d_1 = a_1 + kd_1$.

3. För alla i *sådana att* $0 \le i \le 2^k - 3$ *gäller att* $a_{2^k-2} < a_i < a_{2^k-1}$.

En ändlig följd $a_0, a_1, ...a_{2^k-1}$ bestående av de 2^k första elementen antar alltså sitt strikt minsta värde i det näst sista elementet och sitt strikt största värde i sitt sista element. Dessa succesiva minima och maxima avtar respektive ökar artimetiskt med första differensen $d_1 = a_1 - a_0$. Speciellt är Nørgårdföljder uppåt och nedåt obegränsade och således också aperiodiska.

En Nørgårdföljd uppvisar självlikformighet i den meningen att den kommer att innehålla oändligt många delföljder som är identiska med translat eller translaterade spegelbilder av hela den ursprungliga följden. Detta beskrivs i Sats 2.

Sats 2 *Låt* $A(a_0, a_1) = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *vara en Nørgårdföljd.*

1. För varje $j \ge 1$ *och varje* $k \ge 1$ *gäller att*

$$a_{2^j-2+2^jk} - a_{2^j-2} = a_0 - a_k.$$

2. För varje $j \ge 1$ *och varje* $k \ge 1$ *gäller att*

$$a_{2^j-1+2^jk} - a_{2^j-1} = a_k - a_0.$$

Det första påståendet i Sats 2 säger att den delföljd som startar med elementet på position $2^j - 2$, dvs i ett av de minima som beskriv i Sats 1, och därefter består av element på succesiva avstånd 2^j, kommer att vara identisk med en translaterad spegelbild av den ursprungliga följden $A(a_0, a_1)$. Speciellt fås för $j = 1$ att delföljden bestående av alla element med jämnt index, med början i a_0, utgör den ursprungliga följdens spegelbild i a_0.

Korrolarium 1 *För varje Nørgård-följd* $A(a_0, a_1) = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *gäller att*

$$a_{2n} = 2a_0 - a_n, \quad \forall n \ge 0.$$

Av detta följer att den delföljd som utgående från a_0 består av vart fjärde (eller vart sextonde, eller vart sextiofjärde och så vidare) element är identisk med den ursprungliga följden.

Korrolarium 2 *För varje Nørgårdföljd* $A(a_0, a_1) = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ *och varje naturligt tal* $k \ge 1$ *gäller att*

$$a_{4^k n} = a_n, \quad \forall n \ge 0.$$

Exempel 2 *En kompositorisk tillämpning av detta är att man kan tänka sig att man "zoomar in" i en given Nørgårdstonföljd. Låt oss säga att vi har genererat en melodi som löper i fjärdedelsnoter och önskar fylla i denna melodi på vissa ställen med sextondelsornament. Vi kan göra detta genom att tänka på vår fjärdedelsmelodi som vart fjärde element i en underliggande följd. (Om vår ursprungliga fjärdedelsmelodi tänks ha oändlig utsträckning är den underliggande sextondelsmelodin* *identisk med denna som tonföljd.) Korrolarium 2 ger oss alltså ett sätt att utforma sextondelsornamenten så att dessa är i linje med den ursprungliga melodins självlikformighet. Detta kan för övrigt också göras genom att tillämpa ekvationerna*

$$\begin{aligned} a_{4n+1} &= -a_{4n} + 2a_0 + d_1 \\ a_{4n+2} &= -a_{4n} + 2a_0 - d_1 \\ a_{4n+3} &= a_{4n} + 2d_1 \end{aligned}$$

som gäller för varje $n \geq 0$ i varje Nørgårdföljd $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, där $d_1 = a_1 - a_0$. Dessa ekvationer kan visas för den normaliserade följden genom att studera ett träd av samma typ som i Figur 2 nedan med rot i c_n, och kan sedan generaliseras med hjälp av Proposition 3.1.

Det andra påståendet i Sats 2 säger oss att en delföljd som startar med elementet på position $2^j - 1$, dvs i ett av de maxima som beskriv i Sats 1, och därefter består av element på succesiva avstånd 2^j, kommer att vara identisk med ett translat av den ursprungliga följden $A(a_0, a_1)$. För $j = 1$ fås specialfallet att delföljden bestående av alla element med udda index är ett translat av $A(a_0, a_1)$ med $d_1 = a_1 - a_0$.

Korrolarium 3 *För varje Nørgårdföljd $A(a_0, a_1) = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ gäller att*

$$a_{2n+1} = a_n + d_1, \quad \forall n \geq 0.$$

Nästa sats säger att en Nørgårdföljd också har en annan typ av självlikformighetsstruktur. Den innebär också att de kan genereras blockvis; ur en initial delsekvens av längd 2^m genereras nästföljande 2^m element med en "klipp-och-klistra"-algoritm. För att kunna beskriva detta behöver vi följande definitioner.

Definition 2 *1. Låt $\{a_0\}_{n=0}^{2^n-1}$ vara en ändlig följd bestående av de 2^n, $n \geq 3$, första elementen i en Nørgårdföljd. Vi definierar V som dess vänstra halva och H som dess högra halva, det vill säga*

$$V = \{a_k\}_{k=0}^{2^{n-1}-1}, \qquad H = \{a_k\}_{k=2^{n-1}}^{2^n-1}.$$

2. *Om J är en ändlig följd av längd 2^k, betecknar vi dess vänstra halva J_V och dess högra halva J_H.*

3. *Om J_Σ är en ändlig följd av längd 2^k, där Σ är en ändlig följd av symbolerna V och H, betecknar vi dess vänstra respektive högra halva som $J_{\Sigma V}$ respektive $J_{\Sigma H}$.*

Sats 3 *Låt $\{a_k\}_{k=0}^{2^n-1}$ vara de 2^n, $n \geq 3$, första elementen i en Nørgårdföljd. Då gäller att*

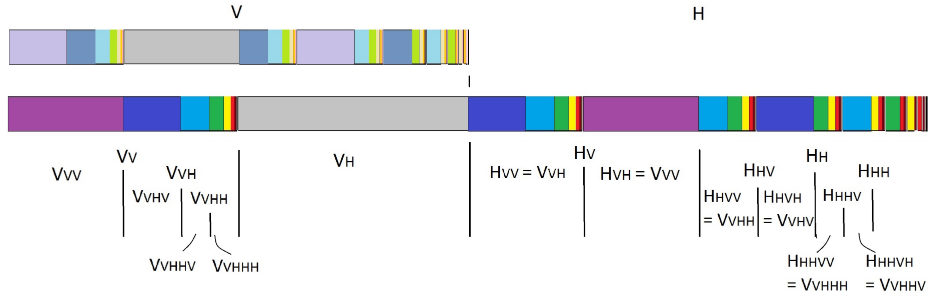
$$\begin{aligned} H_V &= V_{VH} V_{VV} \\ H_{HV} &= V_{VHH} V_{VHV} \\ H_{HHV} &= V_{VHHH} V_{VHHV} \\ &\dots \\ H_{H^{(n-3)}V} &= V_{VH^{(n-3)}H} V_{VH^{(n-3)}V} \\ H_{H^{(n-3)}H} &= \{a_0 - (n-1)d_1, a_1 + (n-1)d_1\} \end{aligned}$$

Den självlikformighetsstruktur som följer av Sats 3 illustreras i Figur 1.

Observera också speciellt att $H_{VH} = V_{VV} = \{a_0, a_1, \ldots, a_{2^{n-3}-1}\}$, allt längre block av följdens intiala element återkommer alltså ju längre fram i följden vi tittar. Med hjälp av Proposition 4.1 och Figur 4 nedan kan vi i själva verket se att

$$\{c_{5\cdot 2^k}, c_{5\cdot 2^k+1}, \ldots, c_{5\cdot 2^k+2^k-1}\} = \{c_0, c_1, \ldots, c_{2^k-1}\}$$

i den normaliserade Nørgårdföljden, och via Proposition 3.1 följer motsvarande resultat i det generella fallet.



Figur 1: Varje initialt segment av längd 2^n, $n \geq 3$, i en Nørgårdföljd har enligt Sats 3 en självlikformighetsstruktur som illustreras här. Det undre bandet representerar ett sådant initialt segment, där delsekvenser med samma färg är identiska. Notera hur den den högra halvan H byggs upp av delsegment från den vänstra halvans vänstra del, V_V. Det övre bandet visar hur samma struktur återfinns inom segmentets första halva V (om $n > 3$). På motsvarande sätt kopieras strukturen på nivå 2^n vidare in i varje initialt segment av längd 2^m, $m > n$.

Exempel 3 *Antag att vi har genererat de sexton första elementen* $\{a_k\}_{k=0}^{15}$ *av* $A(1,3)$. *Vi vill nu generera ytterligare sexton element för att erhålla* $\{a_k\}_{k=0}^{31}$. *Vi tillämpar Sats 3 med* $n = 5$, $\{a_k\}_{k=0}^{15}$ *utgör då den vänstra halvan* V *av* $\{a_k\}_{k=0}^{31}$,

$$V := \{a_k\}_{k=0}^{15} = \{1, 3, -1, 5, 3, 1, -3, 7, -1, 5, 1, 3, 5, -1, -5, 9\}.$$

För att generera $H = \{a_k\}_{k=16}^{31}$ *gör man på följande sätt.*

1. *Dela* V *i två lika delar och välj ut den vänstra delen* $V_V = \{1, 3, -1, 5, 3, 1, -3, 7\}$.

2. *Dela i sin tur* V_V *i två lika delar, dess vänstra* $V_{VV} = \{1, 3, -1, 5\}$ *och högra del* $V_{VH} = \{3, 1, -3, 7\}$.

3. *Sammanfoga* V_{VV} *och* V_{VH} *i omvänd ordning - detta ger de första 8 nya elementen,*

$$H_V = \{a_k\}_{k=16}^{23} = V_{VH}V_{VV} = \{3, 1, -3, 7, 1, 3, -1, 5\}.$$

Upprepa nu steg 1 – 3 på H_V.

4. *Välj ut den vänstra halvan* V_{VH}.
5. *Dela* V_{VH} *i två halvor* $V_{VHV} = \{3, 1\}$ *och* $V_{VHH} = \{-3, 7\}$.
6. *Sammanfoga* V_{VHV} *och* V_{VHH} *i omvänd ordning, detta ger de näst kommande fyra elementen*

$$H_{HV} = \{a_k\}_{k=24}^{27} = V_{VHH}V_{VHV} = \{-3, 7, 3, 1, \}.$$

Upprepa nu igen processen på H_{HV}.

7. *Välj vänster halva* V_{VHH}.
8. *Dela i vänster* $V_{VHHV} = \{-3\}$ *och höger del* $V_{VHHH} = \{7\}$.
9. *Sätt samman dess i omvänd ordning för att generera*

$$H_{HHV} = \{a_k\}_{k=28}^{29} = V_{VHHH}V_{VHHV} = \{7, -3\}.$$

Processen kan nu inte fortsättas längre enligt samma mönster.

10. *De två sista nya elementen* $H_{HHH} = \{a_{30}, a_{31}\}$ *bestäms nu genom att subtrahera respektive addera följdens initiala differens* $d_1 = a_1 - a_0$ *till de två sista elementen i* V, $V_{HHH} = \{a_{14}, a_{15}\}$.

$$\{a_{30}, a_{31}\} = H_{HHH} = \{a_{14} - d_1, a_{15} + d_1\} = \{-5 - 2, 9 + 2\} = \{-7, 11\}.$$

Sammanfattningsvis får alltså $\{a_k\}_{k=0}^{31}$ *ur* $V = \{a_k\}_{k=0}^{15}$ *som*

$$\{a_k\}_{k=0}^{31} = VV_{VH}V_{VV}V_{VHH}V_{VHV}V_{VHHH}V_{VHHV}\{a_{14} - d_1, a_{15} + d_1\}.$$

Nästa sats säger oss att elementen i den normaliserade följden kan beräknas direkt utan rekursion, med hjälp av indexets binära form.

Sats 4 *Låt* c_k *vara ett godtyckligt element i den normaliserade Nørgårdföjden* $A(0, 1) = \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$, *och låt* k *ha den binära representationen*

$$k = (k_j k_{j-1} k_{j-2} \ldots k_0)_2, \quad k_i \in \{0, 1\}, \quad 0 \le i \le j.$$

Då är

$$c_k = f_{k_0} \circ f_{k_1} \circ \cdots \circ f_{k_{j-1}} \circ f_{k_j}(0)$$

där $f_0(t) = -t$ *och* $f_1(t) = t + 1$.

Exempel 4 *Låt oss beräkna* c_{19} *med den metod som anges av föregående sats. Det naturliga talet* 19 *har binär representation*

$$19 = 1 \cdot 2^4 + 0 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 = (10011)_2.$$

Alltså är

$$c_{19} = f_1 \circ f_1 \circ f_0 \circ f_0 \circ f_1(0) = f_1 \circ f_1 \circ f_0 \circ f_0(1) = -(-1) + 1 + 1 = 3.$$

3 Skalning och translationer

Lemma 3.1 *Låt $X = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ och $Y = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ vara två Nørgårdföljder sådana att $x_1 - x_0 = y_1 - y_0$. Då är $y_n - x_n = y_0 - x_0$ för alla $n \geq 1$.*

Proof:
Enligt förutsättningarna gäller att $x_1 - x_0 = y_1 - y_0$ vilket naturligtvis är ekvivalent med att $y_1 - x_1 = y_0 - x_0$. Om nu påståendena i lemmat är sant för alla $k < 2n$ gäller också att

$$\begin{aligned} y_{2n} - x_{2n} &= y_{2(n-1)} - (y_n - y_{n-1}) - x_{2(n-1)} + (x_n - x_{n-1}) \\ &= y_{2(n-1)} - x_{2(n-1)} + y_{n-1} - x_{n-1} + x_n - y_n = y_0 - x_0. \end{aligned}$$

och

$$\begin{aligned} y_{2n+1} - x_{2+1} &= y_{2n-1} + (y_n - y_{n-1}) - x_{2n-1} - (x_n - x_{n-1}) \\ &= y_{2n-1} - x_{2n-1} + x_{n-1} - y_{n-1} + y_n - x_n = y_0 - x_0. \end{aligned}$$

Lemma 3.2 *Låt $X = \{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ och $Y = \{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ vara två Nørgårdföljder sådana att $x_0 = y_0 = 0$ och $x_1 \neq 0$. Då gäller att*

$$y_n = \frac{y_1}{x_1} x_n, \quad \forall n \geq 1.$$

Proof:
Definiera $q = \frac{y_1}{x_1}$. Trivialt gäller då att $y_1 = qx_1$. Om $y_k = qx_k$ för alla $k < 2n$ gäller också att

$$y_{2n} = y_{2n-2} - (y_n - y_{n-1}) = qx_{2n-2} - (qx_n - qx_{n-1}) = qx_{2n},$$

och på motsvarande sätt visas att $y_{2n+1} = x_{2n+1}$.

Proposition 3.1 *Varje Nørgård följd $A(a_0, a_1) = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ kan fås ur den normaliserade följden $A(0, 1) = \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ genom en omskalning och en translation,*

$$a_n = a_0 + c_n(a_1 - a_0), \quad \forall n \geq 0.$$

Proof:
Givet en följd $A(a_0, a_1) = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$, bildar vi först följden $\{b_n\}_{n=0}^{\infty} := A(0, a_1 - a_0)$. Enligt Lemma 3.1 är då $b_n = a_n - a_0$ för alla $n \geq 1$. Bilda nu följden $\{b_n/b_1\}_{n=0}^{\infty} = A(0, 1) = \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$. Enligt Lemma 3.2 är då $c_n = \frac{c_1}{b_1} b_n$ för alla $n \geq 1$. Sammantaget gäller alltså att

$$c_n = \frac{c_1}{b_1} b_n = \frac{1}{a_1 - a_0}(a_n - a_0), \quad n \geq 1,$$

och propositionen är bevisad.

4 Den normaliserade följden

Den rekursiva definitionen (1) tar sig en mycket enklare form för specialfallet $A(0,1)$.

Proposition 4.1 *Följden $\{c_n\}_{n=0}^{\infty} = A(0,1)$ med de två initalvärdena $c_0 = 0$ och $c_1 = 1$ ges för $n \geq 1$ av*

$$\begin{cases} c_{2n} = -c_n \\ c_{2n+1} = c_n + 1. \end{cases}$$

Proof:
Eftersom $c_0 = 0$ och $c_1 = 1$ ger (1) att

$$c_2 = c_0 - (c_1 - c_0) = -c_1 \quad \text{och} \quad c_3 = c_1 + (c_1 - c_0) = c_1 + 1.$$

Genom induktion över $n \geq 2$ fås med hjälp av (1) att

$$c_{2n} = c_{2n-2} - (c_n - c_{n-1}) = -c_{n-1} - c_n + c_{n+1} = -c_n$$

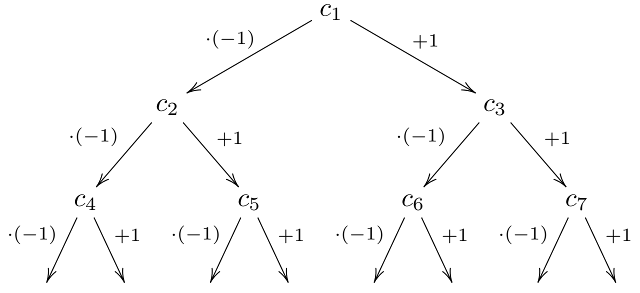
och

$$c_{2n+1} = c_{2n-1} + (c_n - c_{n-1}) = c_{n-1} + 1 + c_n - c_{n+1} = c_n + 1.$$

Exempel 5 *Vi kan beräkna c_{19} som*

$$c_{19} = c_9 + 1 = c_4 + 1 + 1 = -c_2 + 2 = c_1 + 2 = 3.$$

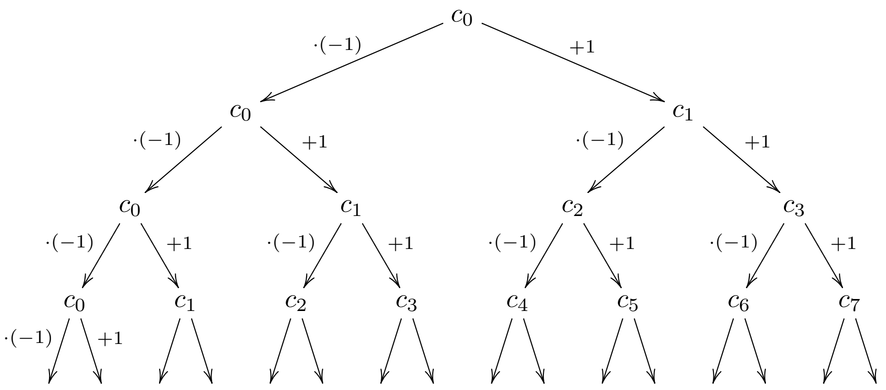
Följden $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ kan alltså ses som genererad av ett oändligt binärt träd $\mathcal{T}$, med rot i c_1, där ett steg snett till vänster motsvara multiplikation med (-1) och ett steg snett ner till höger motsvarar addition med $+1$. Se Figur 2.



Figur 2: Det binära trädet $\mathcal{T}$ som på rad 1 till och med rad n har generarat elementen $\{c_1, \ldots, c_{2^n-1}\}$ i den normaliserade Nørgårdföljden.

För att bevisa Sats 1 och 3 är det lämpligare att betrakta det utökade trädet $\mathcal{U}$ i Figur 3, som har c_0 som rot och där varje rad genereras ur den föregående av samma regler som i $\mathcal{T}$.

De 2^n första elementen $\{c_0, \ldots, c_{2^n-1}\}$ återfinns nu i $\mathcal{U}$ på rad n+1. För att verifiera detta räcker det att observera att (i) $c_0 \cdot (-1) = c_0$, (ii) den högra halvan av rad $n+1$ i $\mathcal{U}$ har sin rot i c_1 på rad 2 och följaktligen är identisk med rad n i det ursprungliga trädet $\mathcal{T}$, och att (iii) den vänstra halvan av rad $n+1$ i $\mathcal{U}$ har sin rot i c_0 på rad 2 och därför identisk med hela rad n i $\mathcal{U}$.



Figur 3: Det utökade binära trädet $\mathcal{U}$ som på rad $n+1$ har genererat elementen $\{c_0, \ldots, c_{2^n-1}\}$ i den normaliserade Nørgårdsföljden

.

5 Bevis av Sats 1 – 4

PROOF: [Bevis av Sats 1]
För den normaliserade följden $A(0,1)$ följer Sats 1 direkt ur Proposition 4.1 och det utökade binära trädet $\mathcal{U}$ i Figur 3 - maximalt värde på rad $n+1$ erhålls från roten c_0 genom att i varje steg välja att addera 1, och minimalt värde fås genom att addera 1 i alla steg utom det sista då istället teckenbyte väljs. Observera att succesiva minimumvärden och maximumvärden är $c_{2^n-2} = -(n-1)$ respektive $c_{2^n-1} = n$. Det allmänna fallet följer sedan genom att tillämpa Proposition 3.1.

[Bevis av Sats 2]

Vi bevisar först Sats 2 för den normaliserade följden $A(0,1) = \{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ genom induktion över j. Kom ihåg att $c_0 = 0$ och $c_1 = 1$.

Först konstaterar vi att för $j = 1$ är

$$\begin{gathered}
c_{2^j-2+2^jk} = c_{2k} = -c_k = 2c_0 - c_k = c_{2^j-2} + c_0 - c_k \\
\text{och} \\
c_{2^j-1+2^jk} = c_{2k+1} = c_k + 1 = c_k + c_1 - c_0 = c_k + c_{2^j-1} - c_0,
\end{gathered}$$

där vi har utnyttjat rekursionsformlerna i Proposition 4.1.

Från Proposition 4.1 ser vi också att

$$c_{2^{j-1}-1} = -c_{2^j-2} \tag{3}$$

$$c_{2^{j-1}-1} + 1 = c_{2^j-1}. \tag{4}$$

Med hjälp av $c_0 = 0$, ekvationerna (3) och (4) och Proposition 4.1 genomför vi nu induktionssteget som slutför beviset av Sats 2 för den normaliserade följden.

$$
\begin{aligned}
&c_{2^j-2+2^jk} = c_{2(2^{j-1}-1+2^{j-1}k)} = -c_{2^{j-1}-1+2^{j-1}k} = -(c_{2^{j-1}-1} + c_k - c_0) \\
&= c_{2^j-2} - c_k + c_0 \\
&\qquad\qquad \text{och} \\
&c_{2^j-1+2^jk} = c_{2(2^{j-1}+2^{j-1}k-1)+1} = c_{2^{j-1}-1+2^{j-1}k} + 1 = c_{2^{j-1}-1} + c_k + 1 - c_0 \\
&= c_{2^j-1} + c_k - c_0.
\end{aligned}
$$

Slutligen kan vi generalisera till den allmänna fallet $A(a_0, a_1) = \{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ genom att använda Proposition 3.1. Som tidigare låter vi $d_1 = a_1 - a_0$.

$$
\begin{aligned}
a_{2^j-2+2^jk} &= a_0 + c_{2^j-2+2^jk}d_1 = a_0 + (c_{2^j-2} - c_k)d_1 \\
&= a_0 + c_{2^j-2}d_1 - c_kd_1 - a_0 + a_0 = a_{2^j-2} + a_0 - a_k \\
&\qquad \text{och} \\
a_{2^j-1+2^jk} &= a_0 + c_{2^j-1+2^jk}d_1 = a_0 + (c_{2^j-1} + c_k)d_1 \\
&= a_0 + c_{2^j-1}d_1 + c_kd_1 + a_0 - a_0 = a_{2^j-1} + a_k - a_0.
\end{aligned}
$$

[Bevis av Sats 3]

Eftersom elementen i en godtycklig Nørgårdföljd enligt Proposition 3.1 fås ur den normaliserade följden genom en transformation oberoende av indexet n, följer likheterna i Sats 3 i det allmänna fallet från motsvarande likheter i det normaliserade fallet. Det räcker alltså att bevisa Sats 3 för den normaliserade följden $A(0,1) = \{c_k\}_{k=0}^{\infty}$.

Att bevisa att de 2^n första elementen i den normaliserade följden, för $n \geq 3$, uppfyller påståendet i Sats 3, är detsamma som att visa att rad $n+1$, i det utvidgade binära trädet $\mathcal{U}$ i Figur 3 uppfyller påståendet.

Rad 4 i $\mathcal{U}$ uppfyller påståendet i Sats 3 eftersom $V_{VV} = c_0 = c_5 = H_{VH}$ och $V_{VH} = c_1 = c_4 = H_{VV}$ så att $H_V = H_{VV}H_{VH} = V_{VH}V_{VV}$, och eftersom $H_H = \{c_6, c_7\} = \{-2, 3\}$.

Vi forsätter beviset genom induktion över n. Antag att påståendet i Sats 3 gäller från och med rad 4 till och med rad n i $\mathcal{U}$, det vill säga för den ändliga följden $\{c_k\}_{k=0}^{2^{n-1}-1}$.

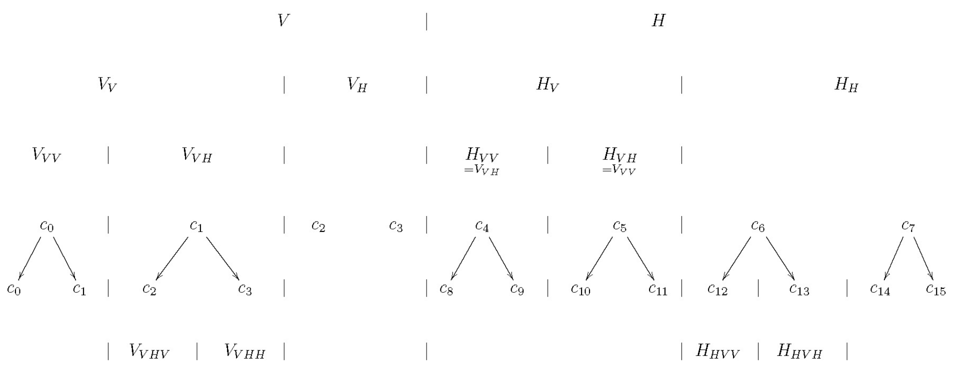
Låt V_Σ och H_Σ, där Σ är en ändlig följd av symbolerna V och H, beteckna ett interval av element i en rad k, bildat genom succesiv intervallhalvering av vänstra halvan av rad k, $V = \{c_0, c_1, \ldots, c_{2^{k-2}-1}\}$, respektive högra halvan av rad k, $H = \{c_{2^{k-2}}, \ldots, c_{2^{k-1}-1}\}$. Observera att

- varje element c_j i rad k, ger upphov till precis två element $\{c_{2j}, c_{2j+1}\}$ i rad $k+1$;
- ett interval av längd 2^j i rad k ger upphov till interval av längd 2^{j+1} i rad $k+1$;
- alla interval av typen V_Σ eller H_Σ som förekommer i Sats 3 har bildats genom succesiv intervallhalvering.

Detta innebär att varje intervall i rad n som omnämns i Sats 3, dvs H_{H^jH}, H_{H^jV}, V_{VH^jH} och V_{VH^jV}, $j = 0, 1, \ldots, (n-4)$, ger upphov till ett dubbelt så långt interval med samma relativa position, det vill säga samma index, i den dubbelt så långa raden $n + 1$. Detta innebär i sin tur att likheterna

$$
\begin{aligned}
H_V &= V_{VH}V_{VV} \\
H_{HV} &= V_{VHH}V_{VHV} \\
H_{HHV} &= V_{VHHH}V_{VHHV} \\
&\cdots \\
H_{H^{(n-4)}V} &= V_{VH^{(n-4)}H}V_{VH^{(n-4)}V},
\end{aligned}
$$

som enligt induktionsantagandet gäller på rad n, också kommer att gälla på rad $n + 1$. Detta illustreras i Figur 4.



Figur 4: Rad 4 och 5 i det utökade binära trädet $\mathcal{U}$ illusterar (i) hur ett interval av typ V_Σ eller $H_{\Sigma'}$ på rad 4 genererar interval av dubbel längd med samma index på rad 5, med bibehållande av likheter av typ $V_\Sigma = H_{\Sigma'}$; (ii) hur det på rad 5 uppstår nya interval av längd 1 (V_{VHV}, V_{VHH}, H_{HVV} och H_{HVH}).

Det återstår att visa att

$$H_{H^{(n-3)}V} = V_{VH^{(n-3)}H}V_{VH^{(n-3)}V} \tag{5}$$

$$H_{H^{(n-3)}H} = \{-n + 1, n\} \tag{6}$$

gäller på rad $n + 1$. (Kom ihåg att för den normaliserade följden är $a_0 = c_0 = 0$, $a_1 = c_1 = 1$ och $d_1 = 1$.)

För att visa Ekvation (5) konstaterar vi först att på rad $n + 1$ är $H_{H^{(n-3)}V} = \{c_{2^n-4}, c_{2^n-3}\}$. Enligt Proposition 3.1 och Sats 1 är

$$c_{2^n-4} = -c_{2^{n-1}-2} = c_{2^{n-2}-1} = n - 2$$

och

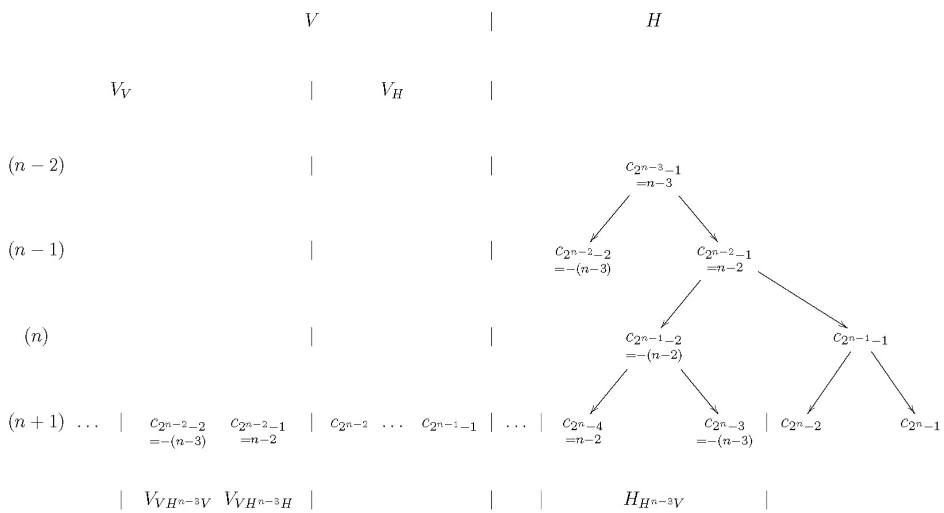
$$c_{2^n-3} = c_{2(2^{n-1}-2)+1} = c_{2^{n-1}-2} + 1 = -c_{2^{n-2}-1} + 1 = -(n - 3).$$

Alltså är $H_{H^{(n-3)}V} = \{n-2, -(n-3)\}$

Vi studerar nu höger led av Ekvation (5). Eftersom $V_{VH^{(n-3)}} = \{c_{2^{n-2}-2}, c_{2^{n-2}-1}\}$ är

$$V_{VH^{(n-3)}H}V_{VH^{(n-3)}V} = \{c_{2^{n-2}-1}, c_{2^{n-2}-2}\} = \{n-2, -(n-3)\}$$

där sista likheten återigen följer av Sats 1. Detta visas också i Figur 5. Ekvation (5) är därmed verifierad.



Figur 5: Ett utsnitt ur det utökade binära trädet $\mathcal{U}$ som illusterar varför $H_{H^{n-3}V} = V_{VH^{n-3}H}V_{VH^{n-3}V}$ på rad $n+1$ i $\mathcal{U}$, det vill säga varför $c_{2^n-4} = c_{2^{n-2}-1}$ och $c_{2^n-3} = c_{2^{n-2}-2}$ i den normaliserade Nørgårdsföljden.

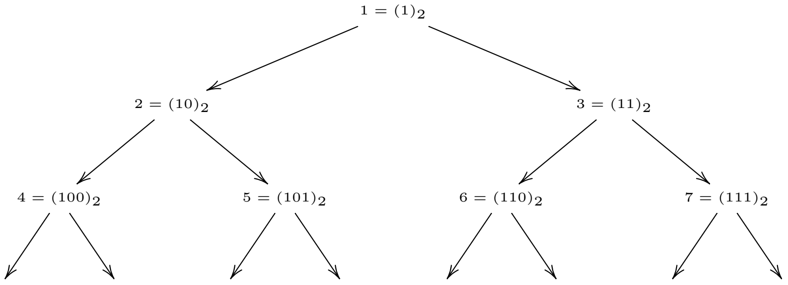
Ekvation (6) följer direkt av Sats 1 eftersom $H_{H^{(n-3)}H} = \{c_{2^n-2}, c_{2^n-1}\}$, de två sista elementen i rad $n+1$. Detta avslutar beviset för att Sats 3 gäller för den normaliserade följden $A(0,1)$, och det allmänna fallet följer som nämnts ovan därav.

[Bevis av Sats 4] För att bevisa Sats 4 räcker det att komma ihåg att den binära representationen av naturliga tal kan ges av ett binärt $\mathcal{B}$ med rot i talet 1, och där ett steg snett ned till vänster eller höger innebär att addera symbolerna 0 respektive 1 till höger i den binära utvecklingen, se Figur 6.

Sats 4 följer direkt ur en jämförelse av de binära träden $\mathcal{T}$ i Figur 2 och $\mathcal{B}$ i Figur 6.

6 Avslutande kommentarer

Som många andra tonsättare var Per Nørgård under femtio- och sextiotalet inspirerad av den så kallade seriella musiken, där kompositioner byggs upp genom att konstruera ändliga följder (som i detta sammanhang kallas serier) av värden för



Figur 6: Det binära trädet $\mathcal{B}$ som på rad 1 till och med rad n genererar den binära utvecklingen av talen $\{1, 2, \dots, 2^{n-1}\}$. Vid ett steg sned till vänster adderas symbolen 0 i slutet av den binära utvecklingen, och vid ett steg snett ned till höger symbolen 1.

olika musikaliska parameterar. Dessa följder, i sin ursprungliga form och i transformerade former, får sedan styra det musikaliska förloppet. Den seriella musiken har sitt ursprung i tolvtonstekniken som introducerades av Arnold Schönberg i början av 1900-talet, här var det de tolv tonerna i det kromatiska tonförrådet som ordnades i serier. Oändlighetsserierna kan ses som ett uttryck för Nørgårds strävan att utveckla de seriella formerna, [2]. Per Nørgård har också utvecklat en metod för att utveckla följder för tonernas tidsvärden, baserad på Fibbonacciföljden. Denna metod har diskuteras ur en matematisk synvinkel av Jeffrey Shallit, [5].

Slutligen kan nämnas att om man modifierar definitionen av den normaliserde följden till

$$\begin{aligned} c_{2n} &= c_{2n-2} + (c_n - c_{n-1}) \\ c_{2n+1} &= c_{2n-1} - (c_n - c_{n-1}), \end{aligned}$$

det vill säga att nästa element med *jämnt* index på nivå $2n$ fås rekursivt genom att *addera* differensen $(c_n - c_{n-1})$ på nivå n, medan nästa element med med *udda* index fås genom *subtrahera* $(c_n - c_{n-1})$, fås den intressanta och välstuderade så kallade Thue-Morse följden[4]. Det visar sig att detta ger en följd på två symboler som också kan bestämmas rekursivt genom

$$\begin{aligned} \{c_0, c_1\} &= \{0, 1\} \\ \{c_{2^{n-1}}, \dots, c_{2^n - 1}\} &= \{\overline{c_0}, \dots, \overline{c_{2^{n-1}-1}}\}, \quad \forall n > 1, \end{aligned}$$

där $\overline{0} = 1$ och $\overline{1} = 0$. Nørgård har även använt sig av denna talföljd i sitt komponerande.

Referenser

[1] Jørgen Mortensen,
`http://www.pernoergaard.dk/da/strukturer/uendelig/uindhold.html`, 1998 –

[4] Thue-Morse följden har nummer i A010060 i *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences* (OEIS).

1999, hämtad 5 augusti 2013.

[2] Erling Kullberg, *Beyond Infinity. On the infinity series - the DNA of hierarchical music*, i *The music of Per Nørgård. Fourteen Interpretative Essays*, red. Anders Beyer. Scholar Press, Hunts, och Ashgate Publishing Co., Vermont, 1996. ISBN 1 85928 313 6.

[3] Mattias Svensson Sandell, *Oändlighetsserien, del 1* och *del 2*. Gotlands tonsättarskola.

[4] Jean-Paul Allouche och Jeffrey Shallit, The ring of k-regular sequences, II, *Theoret. Computer Sci.*, 307 (2003), 3 – 29.

[5] Jeffrey Shallit, The Mathematics of Per Nørgård's Rythmic Infinity System, *The Fibonacci Quarterly*, 43 (2005), Nr 3, 262 – 268.